

Hoe kromme lijnen op een platte wereldkaart inspireren tot het bedenken van de perfecte bal, en hoe dit **Rijkje Dekker** weer inspireert tot activiteiten voor leerlingen in de wiskundeles...

De perfecte bal

Inleiding

In dit artikel volg ik drie routes. De eerste volg ik samen met twee Nederlandse broers die mij begeleiden bij hun fantastische vinding, de perfecte voetbal. Het is een spannende route met onverwachte vergezichten. De tweede route volg ik met een paar kleine groepjes erg actieve brugklasleerlingen. We zullen wat praten en wat met een voetbal spelen, en ik vertel ze over de uitvinding van de broers, waarna ze graag willen weten hoe dat gegaan is, en ik vertel ze dat zijzelf, slim als ze zijn, de perfecte voetbal opnieuw kunnen uitvinden. Ik ben zelf steeds op zoek naar zijpaden en spring van het ene pad naar het andere. De derde route is niet echt een pad, maar een vlucht boven het spannende landschap, die op een ander niveau laat zien wat er gebeurt. En aan het eind dalen we, en zijn de mensen bijna te herkennen ...

Een probleem in de lucht

Op een dag zat Frank Schaper, een Nederlandse ingenieur, het in-flight magazine te lezen zoals hij meestal doet als hij vliegt, en ergerde zich aan het feit dat op de wereldkaarten in zo'n tijdschrift de routelijnen van vluchten altijd met niet-rechte lijnen worden aangegeven. Aangezien de wereld een groot dorp is geworden, zou het toch mogelijk moeten zijn om een 'wegenkaart' van de wereld te maken waarop routes en afstanden worden weergegeven met rechte lijnen? De aarde is een bol, dus een projectie op een plat vlak is altijd onvolmaakt. Toen moest hij aan een voetbal denken: de aarde geprojecteerd op 20 zeshoeken en 12 vijfhoeken: een losbladige verzameling van 32 kleine kaartjes. Twee plaatsen kunnen met elkaar verbonden worden door de kaartjes zodanig te schikken dat er een rechte lijn, die zowel de afstand als de daadwerkelijke route weergeeft, tussen de plaatsen getrokken kan worden. Probleem opgelost, dacht hij ...

Een grote bal in de klas

Kaarten, projecties van de aarde in het platte vlak, Mercator, Fuller; dit is een rijk geografisch domein om wis-

kundig te verkennen, maar misschien staat het iets te ver van de wereld van brugklasleerlingen af. Bovendien is het, om projecties van een bol naar een plat vlak goed te kunnen begrijpen, een goed idee om te proberen een (grote) bol te construeren van een vlak. Hoe maak je een grote bol van vlakke elementen zoals vijf- en zeshoeken? Met de bouwmaterialen bij de hand is dit een uitstekend probleem voor kleine groepen: het probleem is zeer echt en betekenisvol voor de leerlingen, en het is een complex probleem: het is niet makkelijk en vraagt verschillende vaardigheden van (verschillende) leerlingen om opgelost te kunnen worden. Constructie is een belangrijk aspect van het probleem, waardoor de gedachten van de leerlingen zichtbaar, en onderwerp van gesprek zijn. Het probleem is ook gericht op niveauverhoging: de perfecte bol moet nog steeds heruitgevonden worden.

Zes maanden

Frank is intussen niet helemaal tevreden met zijn oplossing. Wat als de schaal op de vijfhoeken niet gelijk is aan de schaal op de zeshoeken? Dan is er een probleem! Hij heeft zes maanden met deze vraag in zijn hoofd rondgelopen. Hij heeft geen model gebouwd en met niemand overlegd, maar uiteindelijk is hij tot de conclusie gekomen dat de schaal niet gelijk is, omdat de vijfhoeken verder van het centrum van de bol verwijderd zijn dan de zeshoeken. Maar als dit zo is, kan de schaal gelijkge maakt worden door de vijfhoeken wat dichterbij het midden toe te brengen. Daardoor worden ze wat groter, zodat ze in verbinding blijven met de zeshoeken. De zeshoeken moeten wat kleiner en onregelmatig worden: de zijden tussen de zeshoeken en de vijfhoeken worden wat groter. Maar dan is het ook een perfecte bol!

Eén uur

Rol de ballen eens door de klas om te zien hoe rond ze zijn. Blaas een ronde ballon op in een bal, en kijk hoe deze de binnenkant raakt. Ontdek dat de vijfhoeken verder uit het midden liggen dan de zeshoeken, en denk na over wat dat betekent voor een echte voetbal. En wat is

het effect voor voetballers wanneer ze een vijfhoek dan wel een zeshoek raken? We kunnen naar oude voetballen kijken en zien of het verschil in spanning op de vijf- en zeshoeken gevolgen heeft voor de 'huid' van de bal. We kunnen brainstormen over manieren om de bal perfecter, ronder te maken. Dit zijn allemaal goede activiteiten voor leerlingen in kleine groepjes. De vragen kunnen op meerdere niveaus behandeld worden en roepen onderlinge discussie op bij de leerlingen wanneer die grip op het probleem proberen te krijgen. Ze zullen elkaar om ideeën vragen en die ook laten zien, er zal uitleg gevraagd en gegeven worden aan elkaar, er zal commentaar op elkaars ideeën zijn, leerlingen zullen hun ideeën trachten te onderbouwen, en uiteindelijk levert dit alles ideeën op om tot een nog rondere bal te komen.

Frank zou ongetwijfeld jaloers zijn als hij kon zien hoe het denkproces wordt versneld door experimenten en discussies!

Op de keukentafel

Intussen heeft Frank Schaper thuis de keukentafel geclaimd om prototypen van de perfecte wereldbol die hij in zijn hoofd al heeft uitgevonden, te maken.



Op een avond laat Frank z'n werk aan z'n oudere broer Bert, een ontwerper, zien. Bert heeft een hele reeks vragen en Frank deelt zijn gedachten met hem. Maar Bert is kritisch, en neemt niet zonder meer alle ideeën van z'n broertje aan, dus hij levert commentaar op het werk van Frank, die zijn keuzes verantwoordt; uiteindelijk is Bert ervan overtuigd dat Frank een fantastische uitvinding heeft gedaan. Frank raakt hier zelf ook steeds meer van overtuigd, en dan zetten ze samen de belangrijkste stap: als de wereldbol verbeterd kan worden, geldt dat natuurlijk ook voor een voetbal! Beiden raken echt enthousiast. Ze werken hard aan een wiskundige onderbouwing van het geheel en aan een presentatie van hun uitvinding om interesse te wekken.

Uiteindelijk raakte een Grote Naam uit de sportwereld echt geïnteresseerd en overtuigd, niet alleen door de wis-

kundige berekeningen, maar vooral door een oude voetbal die Frank en Bert hadden meegenomen, waarop duidelijk te zien was dat de zeshoeken meer versleten zijn dan de vijfhoeken, door de grotere spanning op de zeshoeken. Intussen zijn we een paar jaar verder, en veel Engelse en Spaanse teams, en ook een aantal nationale elftallen, zoals Nederland en Brazilië, gebruiken de nieuwe bal; het succes van de perfecte voetbal blijkt wel uit de statistieken. Het Portugese elftal heeft ook besloten de nieuwe bal te gaan gebruiken, maar moest tijdens het Europese Kampioenschap in 2004 met een andere bal spelen helaas ...

Geen makkelijk probleem

De ontdekking dat de bal ronder gemaakt kan worden, is te doen voor kinderen in de brugklas. Ook kunnen verbeteringen worden geformuleerd. De berekeningen zijn echter wel te moeilijk. Eventueel zou het empirisch kunnen worden vastgesteld, door te experimenteren, maar als we het precies willen weten, moeten we op zoek naar andere bronnen. Zijn er oudere leerlingen die kunnen helpen? Wat als de kinderen uit de brugklas een presentatie houden voor oudere scholieren, waarin ze hun bevindingen uitleggen en om hulp vragen? Zoiets zou een wiskunde-project kunnen zijn voor leerlingen die een wiskundige of technische studie willen gaan volgen. En binnen een school zou het wiskundig en sociaal goed zijn als oudere leerlingen de jongere konden helpen met hun heruitvindingen. Materialen maken voor de perfecte voetbal zou ook een onderdeel van een dergelijk project kunnen zijn, waardoor ook leerlingen erbij betrokken raken die graag met hun handen werken en dingen beter begrijpen als ze al hun zintuigen kunnen gebruiken.



Zodoende kunnen er nieuwe, betere ballen worden gemaakt en bewonderd. De nieuwe voetbal laten zien en je afvragen of Figo zijn perfecte trappen in de finale met deze bal had kunnen maken, is een mooie afronding van het verhaal van de perfecte voetbal.

Op een ander niveau

Goede problemen voor interactie in kleine groepen

Wat zijn goede wiskunde problemen waar kleine groepen mee aan de slag kunnen? We zagen dat het probleem van Frank begon met een uit irritatie geboren vraag. Het zou ideaal zijn als leerlingvragen aan de basis lagen van het oplossen van problemen door leerlingen, maar in de kunstmatige omgeving van de wiskundeles is het vaak de leraar die problemen aandraagt en hoopt dat de leerlingen zich deze eigen maken. Daarom moeten problemen zorgvuldig geconstrueerd worden, vooral voor kleine groepjes.

Om te beginnen moet een probleem echt of betekenisvol zijn voor de leerlingen. Voor brugklasleerlingen kan het goed zijn om problemen uit hun eigen belevingswereld te gebruiken, dus hoewel een inflight magazine daar waarschijnlijk geen deel van uitmaakt, doet voetbal dat wel. Een kritische kanttekening: in Nederland raken steeds meer meisjes en vrouwen geïnteresseerd in voetbal, en er zijn veel meisjes die zelf fanatiek voetbal spelen. Ik weet niet hoe dat in Portugal ligt. Het kan zijn dat het probleem voor veel leerlingen aantrekkelijk(er) wordt door het enigszins uit de voetbalcontext te halen en grote, felgekleurde ballen te maken.

Een andere belangrijke eigenschap is dat de problemen complex moeten zijn, in de zin dat er verschillende vaardigheden van verschillende leerlingen voor nodig zijn om ze op te lossen. De leerlingen hebben elkaars bijdragen nodig. Frank dacht dat hij het alleen, in z'n hoofd, kon en hij kwam er na een paar maanden inderdaad uit. Maar de bijbehorende denkprocessen zijn erg ingewikkeld; dit zou ook een van de redenen kunnen zijn dat hij er zolang over heeft gedaan.

Goede problemen voor kleine groepen moeten ook constructief zijn, dat wil zeggen dat ze tot tastbare producten leiden, iets wat zeer duidelijk is in het geval van de bal. Door samen iets te maken, worden de verschillende ideeën zichtbaar en onderwerp van discussie.

Een laatste punt is dat de problemen gericht moeten zijn op niveauverhoging. Een sterk motief voor het werken in een groep is dat men meer inzicht kan verwerven dan wanneer er alleen wordt gewerkt, en de problemen zouden daaraan moeten bijdragen. Het is mogelijk de voetbal perfect te maken, en dat vraagt om het reconstrueren van de gemaakte bal en de bijbehorende mentale constructies.

Belangrijke interactie voor niveauverhoging?

Het is belangrijk voor de interactie dat leerlingen elkaar hun ideeën, hun mentale werk, vertellen of laten zien. Het stelt ze in staat afstand te nemen van hun eigen gedachten.

De leerlingen kunnen dit stimuleren door elkaar vragen te stellen zoals 'wat ben je aan het doen?' of 'wat heb je al?'

Elkaar je werk laten zien kan leiden tot een vraag om iets te verduidelijken of uit te leggen: 'Waarom doe je dat?', 'Hoe heb je dat gevonden?'. Om je eigen denkproces te kunnen uitleggen, moet je op je werk reflecteren. Reflectie is essentieel voor echt inzicht.

Als je je werk uitlegt, kan er commentaar van anderen komen: 'Maar dat is fout, omdat ...' Kritiek kan weer leiden tot het verantwoorden van het eigen werk, een belangrijke wiskundige activiteit, die dicht bij bewijzen ligt. Als een leerling er niet in slaagt zijn of haar werk te verantwoorden, zeker als dat in een groep gebeurt, kan dat leiden tot het reconstrueren van de eigen gedachten en mentale producten, wat weer kan leiden tot niveauverhoging.

Wat voor hulp van de leraar?

Leraren zijn van groot belang bij het creëren van de leeromgeving: het creëren van de context, problemen tot leven brengen, het vertrouwen uitspreken dat de groepjes het voor elkaar krijgen als ze goed overleggen, en het tonen van echte interesse voor de producten die gemaakt en aan het eind gepresenteerd worden.

Het ingrijpen tijdens het groepswork zou tot een minimum beperkt moeten blijven. Het begeleiden van het proces van uitleg en commentaar heeft meer effect op niveauverhoging dan hulp bieden bij het oplossen van het probleem. Het is beter de problemen aan de groepjes over te laten. Dit intensificeert het denkproces van de leerlingen en de behoefte aan elkaars bijdragen. Zelfs bij het begeleiden van de interactie is het nodig voorzichtig te zijn. Sommige groepjes regelen het onderlinge overleg uitstekend en het zou zonde zijn dat proces te verstoren. Op het moment dat de oplossingen gepresenteerd en met de hele klas geëvalueerd worden, heeft de leraar de touwtjes weer in handen.



Een perfecte wedstrijd

Laag boven Setúbal vliegend, op een zonnige namiddag in juli 1997, tijdens een fantastische CIEAEM conferentie over interacties in de wiskundeles, was het mogelijk om een zeer gemengde groep wiskundeleraren, didactici, hun vrienden, leerlingen en kinderen te zien voetballen met veel plezier en passie, en met een verre van perfecte bal. Maar het was een perfecte wedstrijd ...

*Rijkje Dekker, Universiteit van Amsterdam,
Instituut voor de Lerarenopleiding*

Literatuur

Abrantes, P., J. Porfírio & M. Baía (Eds.) (1998). *Les interactions dans la classe de mathématiques, Actes de la CIEAEM 49*, Setúbal: Escola Superior de Educação de Setúbal.

Dekker, R., M. Elshout-Mohr & T. Wood (in press). How children regulate their own collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics*.

Dekker, R. & M. Elshout-Mohr (2004). Teacher interventions aimed at mathematical level raising during collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics*, 56(1), 39-56.

Dekker, R., M. Elshout-Mohr & T. Wood (2004). Working together on assignments: Multiple analysis of learning events. In: J. van der Linden & P. Renshaw (Eds.), *Dialogic Learning*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 145-170.

Dekker, R., & M. Elshout-Mohr (1998). A process model for interaction and mathematical level raising. *Educational Studies in Mathematics*, 35(3), 303-314.

www.apm.pt/emce_pa/ . (2005). Encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes.

www.frankschaper.nl (met dank voor zijn enthousiaste medewerking).

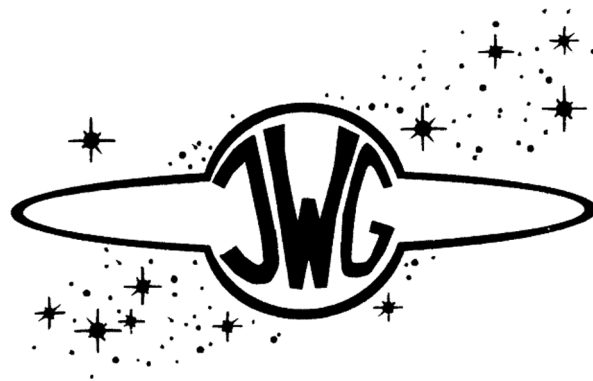
Het heelal binnen handbereik

Jongeren zelf aan de slag in grote sterrenwacht tijdens zomerkamp in Zuid-Frankrijk

Zelf sterrenstelsels aan de rand van het heelal zien? Of kleuren fotograferen in gasnevels waarin sterren worden geboren of sterven? Normaal is dit het werk van professionele astronomen met grote telescopen, maar voor één keer kan iedereen dit ook zelf doen. Op de sterrenwacht Sirene in de Franse Alpen krijgen scholieren en studenten deze zomer de kans met grote telescopen en andere apparatuur de Franse sterrenhemel te bewonderen. Daarmee zullen ze in detail kijken naar bijvoorbeeld de planeet Jupiter met zijn enorme wervelstormen, maantjes en de vele andere objecten die het heelal rijk is.

Daarnaast kunnen die beelden elektronisch worden gefotografeerd en op de computer worden bewerkt met de software van astronomen. Zowel beginners als gevorderden worden op hun eigen niveau wegwijs gemaakt door de begeleiding, die deels uit sterrenkundigen bestaat. De sterrenwacht ligt op een van de donkerste plaatsen van West-Europa en tijdens het kamp is het nieuwe Maan.

Maar een sterrenkundekamp is natuurlijk niet alleen sterrenkunde; het is vooral een gezellige vakantie met dertig andere jongeren en volop vrije tijd om nieuwe vrienden te



maken, een potje petanque te spelen, Franse wijn en kaas te proeven, of gewoon lekker in de zon te liggen tussen de lavendelvelden. Kijk voor meer informatie op <http://www.sirenekamp.nl>, of neem contact op met Wouter van Reeve, sirenekamp@sterrenkunde.nl.

Het kamp is bedoeld voor scholieren, studenten en andere jongeren van 16 jaar en ouder en vindt plaats op de sterrenwacht Sirene in Zuid-Frankrijk van 19 t/m 27 augustus 2006. Deelname aan het kamp kost 675 euro en is inclusief reis- en verblijfkosten, maaltijden, het gebruik van de sterrenwacht en een halfjaarlidmaatschap van de JongerenWerkGroep voor Sterrenkunde.