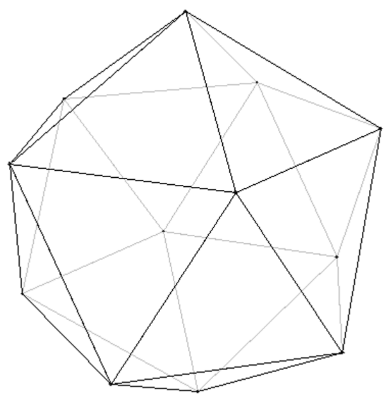
In 1981 al stond er in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* een artikel van Goethals en Seidel over de perfecte bal. **Aart Blokhuis** herlas het artikel en komt tot onderstaande bespiegelingen.

Bespiegelingen rond de voetbal

Inleiding

De komende weken staan in het teken van de voetbal. Het maken van een perfecte bal is een kunst, en voornamelijk een kwestie van ervaring, gezond verstand en kennis van materiaal. Dat weerhoudt ons er niet van ons met wat wiskundige aspecten van de voetbal bezig te houden.

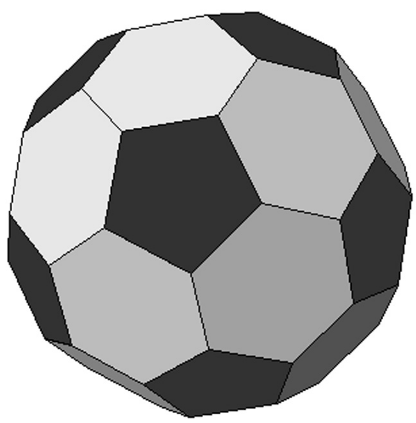
De eerste ruwe benadering van een redelijk rollend object is de kubus met afgeronde hoeken zoals we die kennen van de gebruikelijke dobbelsteen. Natuurlijk is hier het doel niet om een zo rond mogelijk object te maken, maar eerder een compromis tussen iets rolbaars, met stabiele zijden. Bij het populaire kinderspel *Anera's Arena* zijn dobbelstenen corresponderend met het viervlak, de normale kubus, het achtvlak, en het twintigvlak (icosaëder).



Merkwaardig genoeg ontbreekt het twaalfvlak. Van de regelmatige veelvlakken is de icosaëder de meest natuurlijke kandidaat voor het basismodel voor een voetbal. De icosaëder heeft twaalf hoekpunten, dertig zijden, en twintig driehoekige zijvlakken, waarvan er in elk hoekpunt vijf bij elkaar komen.

De echte voetbal

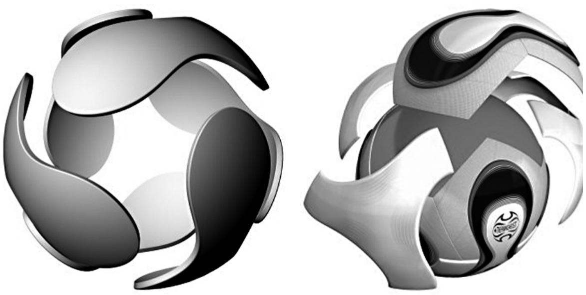
De 'echte' voetbal heeft als meest gangbare onderliggende vorm een soort van twintig- en twaalfvlak. Wij kunnen hem laten ontstaan uit het twintigvlak door elk hoekpunt af te snijden, zodat er ter plekke een regelmatige vijfhoek ontstaat. De twintig driehoekige zijden veranderen nu in zeshoeken, waar bij de snede 'natuurlijk' zo gekozen wordt dat ook de zeshoeken regelmatig zijn. We krijgen op deze manier een figuur met zestig hoekpunten, die op een bol liggen, twaalf vijfhoekige zijden en twintig zeshoeken. Een wiskundige vraagt zich nu natuurlijk af: is dit de rondste voetbal die zo uit een icosaëder gemaakt kan worden? Kunnen de zestig hoekpunten slimmer gekozen worden? Of meer ambitieus, wat als we een bal met zeg 2006 hoekpunten nemen, hoe verdelen we deze 2006 punten netjes over het oppervlak? De eerste vraag kan alleen beantwoord worden als we een maat hebben (verzinnen) die ons vertelt hoe goed een een verzameling punten de bol representeert.



Eén dimensie lager zal iedereen deze vraag intuïtief juist beantwoorden, de beste manier om een cirkel te 'benaderen' met n punten is met de hoekpunten van een regelmatige n-hoek. Elke maat waarbij deze figuur niet als winnaar uit de bus komt, is bij voorbaat verdacht.

Hier is een maat die in dit opzicht prima voldoet en niet alleen van theoretisch belang is: Stel, we willen de gemiddelde waarde van een functie weten op een zeker gebied. We gaan er hierbij natuurlijk van uit dat het gebied ‘fatsoenlijk’ is, en de functie ook. Kiest men nu een aantal punten in dit gebied en berekent men het gemiddelde van de functiewaarden in deze punten, dan hoopt men dat dit een goede benadering is wanneer de punten ‘gelijkmatig’ verdeeld zijn en de functie ‘eenvoudig’ is. Voor de eenheidscirkel C in het (x,y)-vlak geldt dat als $f(x,y)$ een polynoom is van graad ten hoogste 4, dan is de gemiddelde waarde van f op C gelijk aan de gemiddelde waarde van f op de hoekpunten van een regelmatige vijfhoek. Dit is niet zo moeilijk in te zien, als we bedenken dat C geparametrizeerd kan worden met $x = \cos\phi$ en $y = \sin\phi$. We zeggen dat de regelmatige vijfhoek sterkte 4 heeft. (Vraag: hoe zit het met de sterkte van de regelmatige n-hoek?)

Een rondere voetbal?



Net als een tennisbal is de nieuwe WK-bal opgebouwd uit ‘propellerstroken’ die het aantal naden verminderen ten opzichte van de klassieke bal met vijf- en zeshoeken. Het binnenste van de bal bestaat uit PUR-schuim. Het schuim zorgt voor het juiste gewicht, zodat de buitenste lagen dunner en elastischer kunnen zijn. Het schuim helpt ook bij de vormvastheid van de bal. Beeld: Adidas

Op de bol bestaat helaas geen analoge familie van mooi liggende puntverzamelingen van willekeurige grootte, maar het ligt voor de hand om te kijken naar de hoekpunten van de regelmatige veelvlakken.

Voor de icosaëder geldt dat hij alle polynomen op de bol van graad ten hoogste 5 juist integreert, met andere woorden de icosaëder heeft sterkte 5. Voor mensen die expliciet willen rekenen: hier is een geschikte verzamelingen coordinaten voor de hoekpunten van het twintigvlak. Laat τ de gulden snede zijn, dus

$$\tau = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

en

$$\tau^2 = \tau + 1\,.$$

De vier punten met coördinaten $(0, \pm 1, \pm\tau)$, plus de acht punten die hieruit ontstaan door de coordinaten cyclisch te verwisselen, vormen de hoekpunten van een regelmatig twintigvlak. (Om het op de eenheidsbol te krijgen, moet natuurlijk genormeerd worden.) Als we kijken naar de rotaties en spiegelingen van de bol die de icosaëder invariant laten, dan krijgen we een groep (van orde 120).

Zetten we een punt op een van de zijden van de icosaëder, (niet precies in het midden) en passen we vervolgens alle rotaties (en spiegelingen) op de icosaëder toe, dan vinden we zo een verzameling van 60 punten, waarvan onze voetbal een speciaal voorbeeld is.

Voor de sportliefhebbers is het natuurlijk interessant om te weten hoe ‘rond’ de voetbal is, dat wil zeggen de sterkte van de 60 hoekpunten van de klassieke voetbal. Die is niet slecht, namelijk ook 5, net als de icosaëder die eraan ten grondslag ligt, maar het blijkt dat er een betere keuze is voor het ‘voortbrengende punt’. Deze betere keuze levert ons de beroemde voetbal van Seidel (welke voetbal om volstrekt onduidelijke redenen de huidige, waarmee Nederland nog nooit wereldkampioen is geworden, nog niet vervangen heeft). Deze verzameling heeft maar liefst sterkte 9. Hij lijkt natuurlijk sterk op de standaardvoetbal, onstaat ook uit de icosaëder door de hoekpunten af te snijden, alleen zijn de resulterende zeshoeken niet helemaal regelmatig.

Waarom dit mogelijk is, en voor verdere verwijzingen en generalisaties, refereer ik aan het zeer leesbare artikel *The Football* van J.M. Goethals en J.J. Seidel in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* uit 1981

Een voetbal met 2006 punten

Bekijken we eerst weer eens de regelmatige n-hoek op de cirkel. Voor elke keuze van een middellijn is het natuurlijk zo dat er evenveel (of bijna evenveel als n oneven is en de lijn niet door een hoekpunt gaat) punten liggen aan beide zijden. Bestaat iets soortgelijks ook op de bol? Dit is de inhoud van een wonderbaarlijk mooi wiskundig resultaat van Gale uit 1956 , precies 50 jaar geleden dus.

Ook hier gaat het over de regelmatige verdeling van punten op een bol. Is het mogelijk 50 (of 2006) kaarsen op een bolvormige verjaardagstaart te plaatsen, zodat bij elke verdeling van de bol in twee gelijke helften met een vlak door twee van de kaarsen, er aan beide zijden precies 24 (of 1002) kaarsjes zijn?

Het antwoord is ja, en het (constructieve) bewijs van Gale berust op eerstejaars lineaire algebra en zou door een ambitieuze leraar misschien zelfs aan een ambitieuze eindexamenklas uitgelegd kunnen worden. Ook dit resultaat heeft niets met dimensie 3 en met het getal 50 of 2006 te maken, maar geldt voor alle dimensies een aantallen.

Ik illustreer het idee met een verzameling van zes punten op de bol. Beschouw de volgende matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & 9 & -1 & -4 & -10 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 25 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Door een soort van wonder vormen de zes rijvectoren (na normering) in de rechterhelft van deze matrix de gevraagde verzameling. De reden dat dit werkt, is voornamelijk de bijzondere vorm van de linkerkant, en het feit dat de kolommen rechts loodrecht staan op de kolommen links (en onafhankelijk zijn). Om 50 punten op de bol te krijgen, maken we een 50 bij 50 matrix met links 47 kolommen, en rechts nog steeds 3 op een manier die hopelijk duidelijk is uit het voorbeeld.

Aart Blokhuis
T.U. Eindhoven.