

**Gilberte Verbeek** stuitte tijdens een zoektocht voor een themanummer van ons Vlaamse zustertijdschrift *Uitwiskeling* op het fenomeen *phyllotaxis*. Daar is op het internet veel over te vinden, maar alleen hier kun je de phyllotaxis simuleren op de GRM; in de vorm van een vraag-en-antwoordformat waar zonder al te veel moeite een werkblad voor leerlingen van te maken is.

## Phyllotaxis, Fibonacci en de gulden snede

### Inleiding

Bij mijn zoektocht naar onderwerpen voor een themanummer van *Uitwiskeling* leerde ik een tot dan toe voor mij onbekend begrip kennen: 'phyllotaxis', de wetenschap die zich bezighoudt met het bestuderen van de stand van de bladeren ( $\pi\upsilon\lambda\lambda\omicron\nu$  = blad,  $\tau\acute{\alpha}\xi\iota\varsigma$  = slagorde, stand). Sindsdien lijkt deze term regelmatig op te duiken, bijvoorbeeld in het Zebraboekje over de gulden snede.

De gulden snede blijkt een zeer populair 'vrijeruimteonderwerp' te zijn. Dat merkten we op een recent georganiseerde uitwisselingsnamiddag. Een van de bijdragen ging over het relativeren van de gulden snede in de natuur en de kunst, zoals sommige hedendaagse filosofen ook doen. Marguerite Neveux schreef hierover in *Le Nombre d'or, Radiografie d'un mythe*. In *De ontsteking van Pythagoras* stelt Albert Van der Schoot dat bijna alle manifestaties van de gulden verhouding in de natuur ontstaan in de menselijke geest: niet de natuur heeft die orde, maar de mens 'ziet die orde'. Maar hij maakt een uitzondering voor de phyllotaxis.

Ik wilde me voor het themanummer over wiskunde en biologie verder verdiepen in die phyllotaxis en verslond de site <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/>. Ik raakte in vervoering van de regelmatige patronen in de natuur. Door 'Fibonacci numbers and nature' aan te klikken, kun je kennismaken met verbanden die gelegd worden tussen de rij van Fibonacci en de natuur: de manier waarop blaadjes op een stengel groeien, het aantal kelkblaadjes van bloemen, spiralen bij planten, groenten en fruit ...

Op <http://maven.smith.edu/~phyllo/> vond ik nog meer informatie. Er wordt een classificatie opgemaakt volgens de wijze waarop bloemen en bladeren rond de stengel van een plant groeien. Spiraalvormige phyllotaxis is er een van, en zo komen we terecht in de wereld van de spiralen. Ontdek je in de foto's in figuur 1 telkens twee sets spiralen? Tel de spiralen in wijzerzin en in tegenwijzerzin. Vind je dan twee opeenvolgende getallen van de rij van Fibonacci?

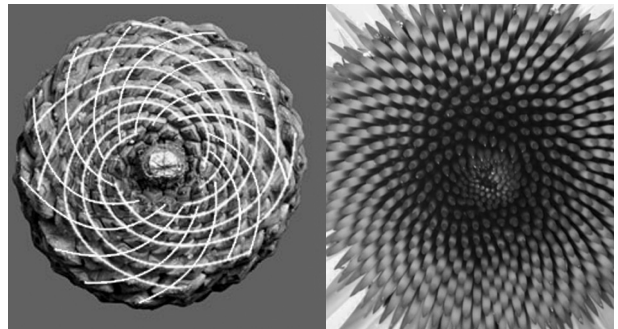


fig. 1 Spiralen in dennenappel en rode zonnehoed

Men bekijkt op <http://www.math.ohio-state.edu/~goldstin/pinecones.html> de dennenappel langs de andere zijde. Susan Goldstine nummerde de verschillende bloemblaadjes (ook de dennenappel is een bloem met verdroogde, verharde bloemblaadjes) volgens de opeenvolgende groeipunten. Zij constateert dat blaadjes met een nummer uit de rij van Fibonacci bijna boven elkaar liggen.



fig. 2 Genummerde blaadjes

Hoe komt het dat de natuur vaak getallen oplevert die behoren tot deze rij? De interessante onderdelen van bloemen – bloemblaadjes, zaadjes, kelkblaadjes, meeldraden enzovoort – groeien allemaal uit kleine stukjes plantweefsel die primordia worden genoemd. De broers Auguste en Louis Bravais ontdekten in 1837 dat de nieuwe primordia op voorspelbare plaatsen ontstaan rond het meristeem (groei- of deelweefsel). De hoek tussen opeenvolgende primordia bleek over het algemeen dicht bij  $137,5^\circ$  te liggen. Waarom dat zo was, wisten ze niet, maar hun experimenten toonden aan dat het zo was. Omwille van het verband met de gulden verhouding wordt deze hoek de gulden hoek genoemd. In de volgende werktekst stellen we een wiskundig model op voor het groeien van primordia. We gaan er van uit dat de leerlingen ondertussen de gulden verhouding  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  behandeld hebben en dat zij vertrouwd zijn met de goniometrische getallen op een cirkel. In de tekst komt een parametervergelijking aan bod en wordt verondersteld dat de leerlingen de basisfuncties voor het werken met de GRM en parametervergelijkingen onder de knie hebben.

### Spiral phyllotaxis: een wiskundig model

Bij spiraalvormige phyllotaxis (bladstand) ontstaan de primordia één voor één in het minst bevolkte gebied rond het ronde meristeem (plantaardig celweefsel in de stengel). Zij verplaatsen zich volgens een straal weg van het centrum als ze groeien. Deze twee wetten werden ontdekt na een microscopie studie van het meristeem door de plantkundige Wilhelm Hofmeister in 1868.

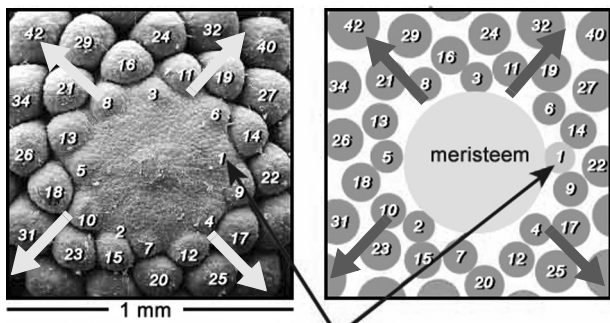
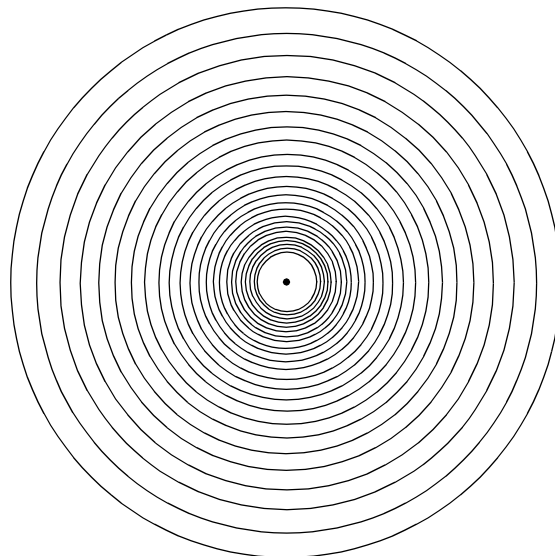


fig. 3 Links: primordia verplaatsen zich weg van het centrum als ze groeien. Rechts: nieuwe primordia ontstaan in het minst bevolkte gebied

Een zonnebloem is een mooi voorbeeld van spiraalvormige phyllotaxis. De zonnepitten worden keurig gerangschikt volgens spiralen. In wat volgt zullen we spreken van zaadjes in plaats van primordia.

Het wiskundig model voor spiraalvormige phyllotaxis maakt gebruik van een spiraalvormig rooster. In zo'n rooster zijn de punten geschikt op concentrische cirkels met een straal die geleidelijk groter wordt. Opeenvolgende punten liggen ten opzichte van elkaar gedraaid over een vaste hoek  $d$ , de divergentiehoek.

1. Creëer een spiraalvormig rooster op de onderstaande figuur met concentrische cirkels. Kies daartoe een divergentiehoek, leg het eerste punt op de binnenste cirkel en schik de volgende punten volgens het hierboven beschreven model.



2. We beschouwen nu een assenstelsel met de oorsprong in het middelpunt van de cirkels. De diameter van de binnenste cirkel is 2. De positieve  $x$ -as loopt door het eerste punt van de spiraal. Bepaal de coördinaten van dit punt.
3. Wat zijn de coördinaten van de punten op dezelfde binnencirkel die ten opzichte van het eerste punt over hoeken van  $d^\circ$ ,  $2d^\circ$ ,  $3d^\circ$ , ...,  $nd^\circ$  gedraaid zijn?

De stralen van de cirkels moeten geleidelijk groter worden. We stellen dat  $r_n$  de straal is van de  $n$ de cirkel. Enkele mogelijkheden voor de steeds groter wordende stralen zijn:  $r_n = 2\sqrt{n}$ ,  $r_n = \frac{1}{2}\sqrt{n}$ ,  $r_n = G^n$  met  $G$  een getal groter dan 1. De keuze die je maakt, wordt bepaald door de beginsituatie en de snelheid waarmee de straal moet toenemen. In wat volgt, werken we met de meetkundige rij  $r_n = G^n$ .

4. Geef de stralen van de opeenvolgende concentrische cirkels en bepaal de straal van de  $n$ de concentrische cirkel van het meristeem. ( $G$ ,  $G^2$ ,  $G^3$ , ...,  $G^n$ )
5. Bepaal de coördinaten van de zaadjes op de eerste, tweede, ...  $n$ de concentrische cirkel die tegenover het jongste zaadje over hoeken van  $d^\circ$ ,  $2d^\circ$ , ...,  $nd^\circ$  gedraaid zijn.  
 $((G\cos d, G\sin d), (G^2\cos 2d, G^2\sin 2d), (G^3\cos 3d, G^3\sin 3d), \dots, (G^n\cos nd, G^n\sin nd))$

Een willekeurig punt van een spiraal wordt dus bepaald door de volgende parametervergelijking:

$$\begin{cases} x(t) = G^t \cos(td) \\ y(t) = G^t \sin(td) \end{cases} \text{ met } t \in \mathbb{R}.$$

We onderzoeken de rol van de divergentiehoek  $d$ .

6. Stel  $G = 1,01$  en  $d = \frac{1}{5}360^\circ$ . Kies via **MODE** voor **Par** en stel zo je grafische rekenmachine in voor parame-

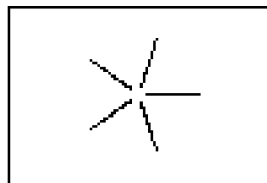
tervergelijkingen. Voer de parametervergelijkingen in, gebruik de onderstaande vensterinstellingen en zet via **2nd FORMAT Axes Off** de assen van het assenstelsel af. Onderzoek nu op welke manier opeenvolgende zaadjes gerangschikt worden. Welke hoek wordt tussen twee opeenvolgende zaadjes gevormd? Gebruik eventueel **TRACE** om de opeenvolgende zaadjes te volgen.

```
WINDOW
Tmin=0
Tmax=200
Tstep=1
Xmin=-10
Xmax=10
Xscl=1
Ymin=-10
```

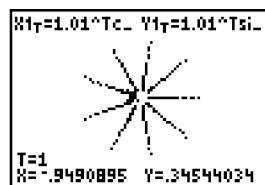
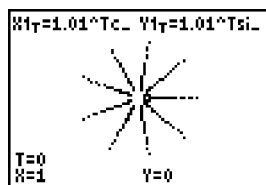
```
WINDOW
↑Tstep=1
Xmin=-10
Xmax=10
Xscl=1
Ymin=-10
Ymax=10
Yscl=1
```

(De opeenvolgende zaadjes worden op vijf radiale 'spaken' gerangschikt. De opeenvolgende hoeken zijn veelvouden van  $72^\circ$ . Na het vierde veelvoud komen, op volledige omwentelingen na, dezelfde hoeken weer terug:)

```
Plot1 Plot2 Plot3
X1T=1.01^Tcos(T
1/5*360)
Y1T=1.01^Tsin(T
1/5*360)
X2T=
Y2T=
X3T=
```

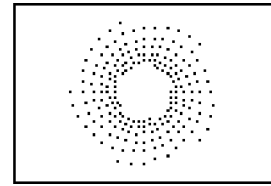
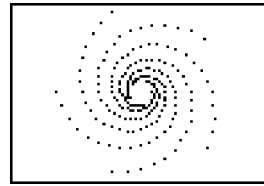


7. Kies nu  $d = \frac{4}{9}\sqrt{360^\circ}$ . Ga de rangschikking van de zaadjes en de hoek tussen twee opeenvolgende zaadjes na.  
(De zaadjes worden nu op negen radiale 'spaken' gerangschikt. De opeenvolgende hoeken zijn veelvouden van  $160^\circ$ .)



8. Experimenteer met verschillende divergentiehoeken van de vorm  $d = \frac{p}{q}\sqrt{360^\circ}$  met  $p, q \in \mathbb{R}$ . Beoordeel telkens hoe de zaadjes gerangschikt worden.  
(De linkerafbeelding in de volgende figuur hoort bij een divergentiehoek  $d = \frac{7}{36}\sqrt{360^\circ}$ . Hier lijken de zaadjes gerangschikt volgens spiralen. Zaadjes die tot een zelfde radiale 'spaan' behoren, komen in dit voorbeeld ver van elkaar te liggen omdat de noemer groot is en de teller en de noemer onderling ondeelbaar zijn. Het volgende zaadje van dezelfde spaak ligt 36 concentrische cirkels verder. Als  $G$  kleiner genomen wordt, waardoor de opeenvolgende concentrische cirkels dichter bij elkaar liggen, zie je de radiale spaken weer iets beter. In de rechterschermafdruck is  $G = 1,005$  en zijn de windowinstellingen gewijzigd.

Op de schermafdruck zie je 36 radiale spaken:)



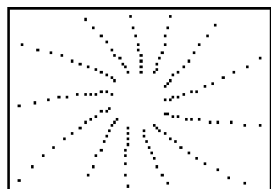
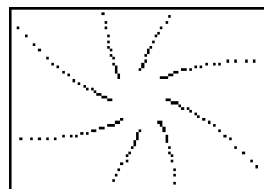
Wanneer de divergentiehoek  $d$  gelijk is aan  $\frac{p}{q} \cdot 360^\circ$  (en  $p$  en  $q$  onderling ondeelbaar zijn) rangschikken de zaadjes zich volgens  $q$  radiale spaken. We kiezen nu divergentiehoeken van dezelfde vorm waarbij  $p$  en  $q$  opeenvolgende getallen zijn van de rij van Fibonacci.

9. Bepaal de decimale waarden van de volgende verhouding van opeenvolgende Fibonaccigetallen:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13}, \frac{1}{21}, \frac{1}{34}, \frac{1}{55}.$$

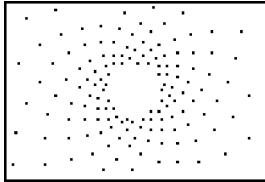
Vergelijk je resultaten met  $\frac{1}{\phi}$ , waarbij  $\phi$  de gulden verhouding is. Groepeer vervolgens de verhoudingen die kleiner en die groter zijn dan  $\frac{1}{\phi}$ . (1, 0,5, 0,66 ..., 0,6, 0,625, 0,61538461 ..., 0,61904761 ..., 0,61764705 ..., 0,61818181 ...,  $\frac{1}{\phi} = 0,61803398$ . De opeenvolgende verhoudingen naderen steeds dichter tot  $\frac{1}{\phi}$  en zijn alternerend groter of kleiner.)

10. Als  $d = \frac{5}{8} \cdot 360^\circ = 0,625 \cdot 360^\circ$  ontstaan er acht radiale spaken, en er ontstaan er dertien als  $d = \frac{8}{13} \cdot 360^\circ = 0,61538461 \dots \cdot 360^\circ$ .  
Wat gebeurt er nu als we een veelvoud van  $360^\circ$  nemen dat net iets kleiner is dan  $0,625$ , of net iets groter dan  $0,61538461 \dots$ ? Kies achtereenvolgens  $d = 0,62545 \cdot 360^\circ$  en  $d = 0,6157 \cdot 360^\circ$  en ga na hoe de opeenvolgende zaadjes gerangschikt worden.



(We constateren dat een veelvoud van  $360^\circ$  dat net iets kleiner is dan  $\frac{5}{8}$ , acht spaken oplevert die een bocht maken in wijzerzin en een veelvoud dat net iets groter is dan  $\frac{8}{13}$ , dertien spaken oplevert die een bocht maken in tegenwijzerzin. Daarenboven is  $\frac{8}{13} < \frac{1}{\phi} < \frac{5}{8}$ .)

11. Neem als divergentiehoek een veelvoud van  $360^\circ$  dat net iets kleiner is dan  $\frac{13}{21}$ . Voorspel het aantal spaken en de bocht die ze maken. Controleer dit vervolgens met je rekenmachine.  
(Voor de onderstaande afdruck is  $d = 0,618 \cdot 360^\circ$ . We kunnen eenentwintig spaken tellen die in wijzerzin afbuigen, maar tevens dertien die in tegenwijzerzin afbuigen. Dit is normaal omdat  $0,618$  ook net iets groter is dan  $\frac{8}{13}$ .)



We zien dat er telkens spiralen in Fibonacci-aantal voorkomen wanneer we met verhoudingen van Fibonacci-tallen werken. We zouden radiale spaken in Fibonacci-aantallen moeten zien, maar we zien een compromis waarin we een groep gebogen spaken kunnen onderscheiden voor het ene Fibonaccigetal en een andere groep voor het volgende Fibonaccigetal.

Zolang de divergentiehoek  $d$  een rationaal veelvoud van  $360^\circ$  is, ordenen de zaadjes zich volgens radiale spaken. In wat volgt, beschouwen we irrationale veelvoud van  $360^\circ$  als divergentiehoek en gebruiken we de volgende parametervergelijkingen, die de groei van de zaadjes in een zonnebloem simuleren:

$$\begin{cases} x(t) = 0,5\sqrt{t}\cos(td) \\ y(t) = 0,5\sqrt{t}\sin(td) \end{cases} \text{ met } t \in \mathbb{R}.$$

12. Onderzoek de rangschikking van de zaadjes volgens het bovenstaande model en kies achtereenvolgens de volgende divergentiehoeken:  $d = \frac{1}{2}360^\circ$ ,  $d = \frac{1}{\sqrt{5}}360^\circ$ ,  $d = \frac{1}{\pi}360^\circ$ ,  $d = \frac{1}{e}360^\circ$  en  $d = \frac{1}{\phi}360^\circ$ .  
Welke hoek zorgt voor de meest efficiënte rangschikking van zaadjes waarbij vrijwel alle ruimte gelijkmatig benut wordt?

De broers Bravais ontdekten in 1837 dat de hoek tussen opeenvolgende zaadjes over het algemeen dicht bij  $137,5^\circ$  blijkt te liggen. Waarom wisten ze niet. De natuur heeft een goede reden om voor de gulden snede te kiezen. Een plant met zaden in de vorm van radiale spaken zou niet erg sterk zijn. Zaadjes die zich rangschikken volgens  $\frac{1}{\phi}360^\circ$  vormen een stevige en compacte zaadbol.

13. Welk verband bestaat er tussen de 'ideale hoek' die je hierboven vond en de hoek van de broers?  
 $(\frac{1}{\phi}360^\circ \approx 222,5^\circ = 360^\circ - 137,5^\circ)$   
 $137,5^\circ$  wordt de gulden hoek genoemd.

Gilberte Verbeeck  
Sint Jozefinstituut, Essen (B)

## Literatuur

Aerts, R. & M. Deprez (2004). *De gulden snede, een tekst voor de vrije ruimte*.  
 Cogneau, E. et al (2004). *Wiskundeproject 5.2*. Wolters Plantyn.  
 Kleijne, W. & T. Konings (2000). *De gulden snede*. Epsilon Uitgaven, Zebrareeks.  
 Neveux, M. (1995). *Le nombre d'or, Radiografie d'un mythe*. Paris: Seuil.  
 Roelens, M. (1998). Redactioneel. *Uitwisseling*, 14(2).  
 Schoot, A. Van der (1999). *De ontstelling van Pythagoras*. Kok Agora.  
 Stewart, I. (1998). *Het magisch labyrint*. Nieuwezijds.

