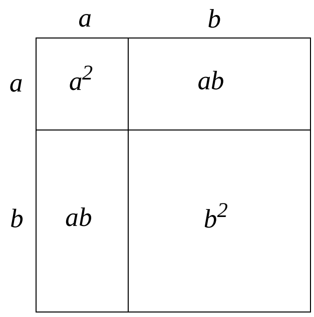
Meteen na het verschijnen van *Wat a is, dat kun je niet weten* is **Sieb Kemme** gevraagd het boek te lezen en opkomende gedachten aan het papier toe te vertrouwen.

Algebra moet!

Een persoonlijke reactie naar aanleiding van *Wat a is, dat kun je niet weten*

Hoezo betekenisvolle algebra?

Het begint meteen al goed. In het voorwoord schrijven de auteurs: ‘*Met dit boek wil het Freudenthal Instituut een positie in deze discussie [over de schoolalgebra] innemen. De realistische benadering van algebraonderwijs is het uitgangspunt voor een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school.*’ Met zo’n introductie kan niemand het oneens zijn. Betekenisvolle algebra, mooier kunnen we het niet maken. Maar is het ook realistisch? Wat bedoelen de auteurs eigenlijk met ‘betekenisvolle algebra’?
Aan het eind van het eerste hoofdstuk geven de auteurs een visie op het leren van algebra. Onder het kopje ‘Algebra heeft zin’ geven de auteurs een toelichting: ‘*Of de leerling algebra nu op een concreet of een abstract niveau gebruikt, cruciaal is dat het werk als betekenisvol wordt ervaren. Soms vereist dit een concrete probleemsituatie uit de belevingswereld van de leerling. In andere gevallen ligt de betekenis voor de leerling besloten in een meer abstracte, theoretische context. Waar het om gaat, is dat de probleemsituatie ‘experientally real’ is, dus door de leerlingen als echt en betekenisvol wordt ervaren.*’
Gesnapt? Nee, bepaald niet. Algebra is dus betekenisvol voor leerlingen als ze dat als betekenisvol ervaren. Zo, daar heb je geen woord Engels voor nodig. Maar veel wijzer word je er ook niet van.
Wat zouden de auteurs als betekenisvol ervaren bij de afleiding: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?
Uit de teksten blijkt dat het meestal gaat om een visuele weergave van een algebraïsche uitdrukking.



Zoals het vierkant met zijden $a + b$ en de bijbehorende verdeling van de oppervlakte in de twee vierkanten a^2 en b^2 en de twee gelijke rechthoeken $2ab$. Kan dit een betekenisvolle voorstelling zijn van dit merkwaardige product? Ja, maar dat is er een in de rol van een ezelsbrug om te onthouden dat zich bij de uitwerking een term $2ab$ voegt en dus dat $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$. Na het leren werken met die afleiding, moet die ezelsbrug zo gauw mogelijk aan de kant. Die zit alleen maar in de weg en vertraagt het uitvoerende werk. De situatie is ongeveer vergelijkbaar met het optellen van breuken door pizza’s te verdelen. Mooi om te laten zien waarom die regels zo werken, af en toe nog een keer terug laten komen als leerlingen in de fout gaan en dan zo snel mogelijk vergeten, want je hebt er alleen maar last van bij het eigenlijke rekenwerk. Die meetkundige betekenis van $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ speelt dus een inzichtelijke rol bij de leerfase van die afleiding. In de verwerkingsfase, bij het inoefenen en toepassen, zal de afleiding het niveau van een bijna gedachteloos automatisme moeten zien te bereiken. De vraag blijft hoe je dat betekenisvol kunt oefenen. Het vierkant is maar één voorbeeld van het betekenis geven aan een algebraïsche uitdrukking. In de publicatie staan meer, ook niet-meetkundige voorbeelden. Voor al deze voorbeelden geldt echter hetzelfde bezwaar: ze leveren een inzichtelijke bijdrage in het eerste leerproces, in de oefenfase moet je er los van kunnen komen.

Oefenen en basisvaardigheden (in HAVO en VWO)
Vanaf nu is het goed te realiseren dat het volgende zich beperkt tot het wiskundeonderwijs op HAVO en VWO. Voor het VMBO geldt een heel ander verhaal. Eenvoudigweg omdat algebra geen rol speelt in het beroepsperspectief en nauwelijks bij de doorstroming naar vervolgopleidingen van de meeste VMBO’ers.
De huidige opzet van het algebraonderwijs in het VMBO, gekoppeld aan verbanden tussen grootheden en aan regelmaat en patronen, zonder al te veel oefening, levert voor deze leerlingen min of meer betekenisvolle wiskunde op. In de laatste twee leerjaren zou het wat meer aan het praktijkvak gekoppeld mogen zijn, maar het niveau is goed genoeg. Het routinematig leren beheersen van algebraïsche

vaardigheden speelt hier, terecht, nauwelijks een rol.
Die 'gedachteloze routine' wordt netjes genoemd in een eerdere opmerking in dit eerste hoofdstuk: het lijkt echter wel duidelijk dat het belangrijk is om een aantal basisbewerkingen te ontwikkelen, zodat deze geroutineerd en zonder veel fouten kunnen worden uitgevoerd. Dat vraagt behalve inzicht ook oefening en onderhoud, en daarop wordt in hoofdstuk 7 en 8 nader ingegaan. Gek, dat deze opvatting niet terugkomt in de visie op algebra. Wordt dit als minder belangrijk ervaren? Dit is toch precies waar de algebraïsche schoen wringt bij de overstap van VO naar HO? Dus op naar hoofdstuk 7 en 8 om te kijken of hier misschien de oplossing wordt aangedragen voor het raadsel hoe je betekenisvol kunt oefenen.
Hoofdstuk 7 heet: *Oefening baart kunst.* In de eerste drie paragrafen passeert een aantal didactische theorieën de revue over algebraïsche vaardigheden en wordt een schets gegeven van de huidige situatie. Grappig is te zien dat die didactische theorieën uit de jaren 70 stammen. Tussen toen en nu is er kennelijk weinig fundamenteels ontwikkeld op dit terrein.
Onder het sleutelbegrip 'productief oefenen' wordt vanaf paragraaf 4 een aantal voorbeelden gegeven hoe leerlingen op een gevarieerde en uitdagende manier met algebraïsche vaardigheden aan de slag kunnen. Met de toevoeging 'productief' wordt afstand genomen van de ouderwetse rijtjessommen die vooral gebaseerd waren op de voordoen-nadoendidactiek. Door productief te oefenen wordt de leerling meer uitgedaagd om na te denken en zelf oplossingen te vinden. Sommige voorbeelden zijn trouwe bekenden, zoals de bordjesmethode en de rechthoeken (zie hiervoor). Daarnaast staat er ook een aantal nieuwe, puzzelachtige opgaven. Als geheel is het een goeddoordachte en rijke bron die heel goed als startpunt gebruikt kan worden voor het ontwikkelen van een nieuwe leerlijn algebraïsche vaardigheden HAVO en VWO vanaf leerjaar 1 tot en met 5/6. Het betekenisvolle oefenen voor leerlingen zit vooral in het puzzelachtige van de opgaven. De wiskundige puzzel als realistische context, wie had dat kunnen denken? Of daarmee ook het gewenste niveau van routine bereikt wordt, is nog een open vraag.
Hoofdstuk 8, Algebra en ICT, is het tweede hoofdstuk dat in verband staat met het aanleren van algebraïsche vaardigheden. Op het eerste gezicht een merkwaardige keuze want de computer zou juist het algebraïsche rekenwerk uit handen kunnen nemen. Het onderwerp wordt breed aangevlogen met een bespreking van de huidige mogelijkheden en de verschillende rollen van ICT bij algebra, waaronder ICT als oefenomgeving. Voor het oefenen met ICT van algebraïsche vaardigheden zijn vooral de algebra applets interessant. Ze bieden veel variatie en geven direct terugkoppeling. Het gaat hierbij allang niet meer om de ouderwetse 'drill and practice'-programma's zoals we die uit het vroegere DOS-tijdperk kennen, maar om speelse en grafisch vormgegeven programma's waarin elke nieuwe opgave het nodige denkwerk vraagt. Heel geschikt om leerlingen aanvullend puzzelend en dus betekenisvol mee te laten werken.
Overigens is het teleurstellend te moeten constateren dat we acht jaar na invoering van de grafische rekenmachine plus een aantal voorafgaande experimentele jaren, nog steeds geen duidelijke didactische lijn hebben kunnen ontwikkelen voor de GR binnen de algebra. Duidelijk is dat de verhouding nog volledig zoek is tussen werken met pen en papier en werken op de GR. Moeten we de GR maar niet gewoon in haar hok terugzetten van handig en daarom onmisbaar rekentuig? En alle didactische verwachtingen die we van haar hadden als didactisch hulpmiddel bij het leren van wiskunde gewoon overboord gooien? Eerst komt het denken, daarna de machine.

De overige hoofdstukken

De overige hoofdstukken zijn vooral informatief van karakter en beschrijven de stand van zaken in de verschillende schooltypes: van basisschool naar voortgezet onderwijs (hoofdstuk 2), in het VMBO (hoofdstuk 3), in onderbouw HAVO en VWO (hoofdstuk 4), in de tweede fase van HAVO en VWO (hoofdstuk 5). De hoofdstukken 4 en 5 eindigen beide met de bekentenis dat de ontwikkeling en onderhoud van routinematige algebraïsche vaardigheden een rol moet spelen in HAVO en VWO, zonder dat dit echter concreet wordt gemaakt, bijvoorbeeld door een lijst te geven van belangrijke en minder belangrijke vaardigheden, uitgesplitst naar het relevante niveau. Hoofdstuk 6 beschrijft de verschillen in notatie en denkwijze tussen wiskunde enerzijds en de natuur- en techniekvakken anderzijds. Die verschillen zijn zo groot dat het niemand zal verbazen dat er nauwelijks transfer kan optreden in algebraïsche vaardigheden tussen beide werelden.
De geschiedenis van de algebra komt in het laatste hoofdstuk 9 aan bod. Boeiende kost, ook voor leerlingen. Jammer dat het een beetje in de wiskunde zèlf blijft hangen en dat de kracht van de algebra als efficiënte taal voor de wiskundige gedachte in niet specifiek wiskundige situaties, bijvoorbeeld in de natuurkunde, niet sterker naar voren komt.

Tot slot

Veel van de successen uit de wiskunde en de natuurwetenschappen hebben we te danken aan het feit dat een lumineuze gedachte kon worden weergegeven, en daarmee hanteerbaar worden gemaakt, door middel van passende formules. Algebra is het skelet van de wiskunde. Zonder handigheid in algebraïsche vaardigheden zakt de boel in elkaar. Dat geldt voor de wiskunde als wetenschap, maar ook voor de schoolwiskunde op HAVO en VWO. De voldoening die je kunt beleven aan het vinden van een oplossing na een stevige stoeipartij met formules, mogen we onze HAVO- en VWO-leerlingen niet onthouden. Algebra moet, maar dan goed!

Sieb Kemme, Lettelbert