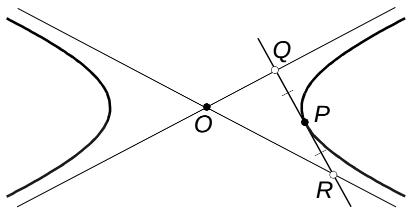
Wat te bewijzen is (31)

Rubriek

Een mooie eigenschap van de hyperbool, die bij navraag onder leraren niet zo heel erg bekend blijkt te zijn, is de volgende: *Het raakpunt van een willekeurige raaklijn aan een hyperbool is het midden van het lijnstuk dat door het paar asymptoten van die raaklijn wordt afgesneden.*



De vraag naar het bewijs hiervan zou goed passen in een schoolboek over klassieke analytische meetkunde. Een mogelijke aanpak zou dan zijn:

– kies het assenstelsel zodanig dat de x- en y-as samenvallen met de symmetrie-assen van de hyperbool.
– de vergelijkingen van hyperbool en raaklijn hebben nu respectievelijk de gedaante

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{en} \qquad \frac{x_Px}{a^2}-\frac{y_Py}{b^2} = 1$$

– Snijding van die raaklijn met de asymptoten

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b} = 0 \qquad \text{en} \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 0$$

levert na uitgekiend algebrawerk op:

$$x_Q + x_R = 2x_P \qquad \text{en} \qquad y_Q + y_R = 2y_P$$

en daarmee is het bewijs geleverd.

Soepeler met xy = k

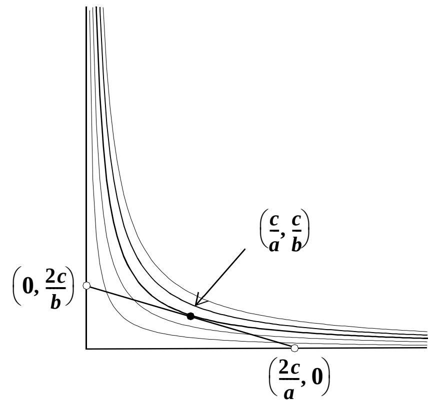
De lezer die het bovenstaande (zonder gebruik van computeralgebra) heeft willen narekenen, zal hebben gemerkt dat het vereiste algebrawerk nog niet zo eenvoudig is. Voor onze huidige VWO-leerlingen zou het vrijwel zeker te hoog gegrepen zijn. Nemen we echter als uitgangspunt de orthogonale hyperbool (met vergelijking $xy = k$), dan verloopt de berekening – via differentiaalrekening – wat soepeler en het bewijs van het gestelde zou zelfs op het eindexamen kunnen worden gevraagd. Gelet op de stijl van de huidige examens zou er dan waarschijnlijk eerst een opstapvraag komen, bijvoorbeeld:
toon aan dat de raaklijn in het punt (x_P , y_P) van de hyperbool de vergelijking $y_Px + x_Py = 2k$ heeft.
Na voltooiing van deze niet al te moeilijke opdracht loopt de rest ook op rolletjes. De bedoelde raaklijn snijdt de asymptoten immers in $(2x_P , 0)$ en $(0 , 2y_P)$ – daarbij komt de betrekking $x_Py_P = k$ opnieuw om de hoek kijken – en hieruit volgt dan onmiddellijk de in de aanhef bedoelde eigenschap.

Ik merk nog op dat de beperking tot de orthogonale hyperbool slechts in schijn een beperking is. Bij een scheve hyperbool kunnen de asymptoten ook als x- en y-as worden bestempeld; in het zo gekozen scheve assenstelsel heeft de scheve hyperbool dan een vergelijking van de gedaante $xy = k$ en alle berekeningen blijven hetzelfde.

Eerlijk delen loont

In een vroegere aflevering van deze rubriek is al eens ter sprake geweest dat in het geval de variabelen x en y een constante som – zeg $2c$ – hebben, hun product maximaal is in het geval van de 'eerlijke' verdeling: $x = y = c$.
Stel maar $x = c + z$, dan $y = c – z$ en er volgt $xy = c^2 – z^2$ hetgeen maximaal is voor $z = 0$.
Een onmiddellijk gevolg hiervan is:
als a, b en c positieve constanten zijn en als het getallenpaar (x , y) voldoet aan ax + by = 2c, dan is abxy, en dus ook xy, maximaal in het geval ax = by = c.
Dit nu kan meetkundig worden geïnterpreteerd.
$ax + by = 2c$ stelt bij vaste a, b en c een rechte lijn voor die de x^+-as snijdt in $(\frac{2c}{a},0)$ en de y^+-as in $(0, \frac{2c}{b})$.

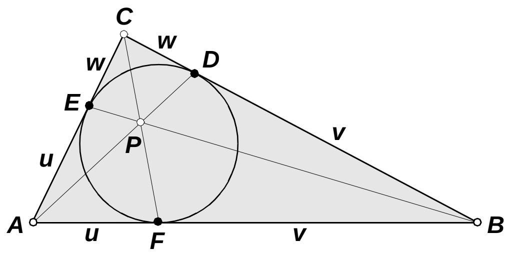
De vergelijking $xy = k$ representeert, bij variabele $k > 0$ en in een recht- of scheefhoekig assenstelsel, een verzameling hyperbolen met de asymptoten $x = 0$ en $y = 0$.



Er zijn hyperbolen die de lijn $ax + by = 2c$ in twee punten snijden en er zijn er die dat niet doen. In de overgangssituatie raakt de hyperbool de lijn en dat geval komt overeen met het bereiken van de maximale waarde van k (= xy) gegeven $ax + by = 2c$. Omdat dit maximum bereikt wordt in het geval $ax = by = c$, weet ik nu dat het raakpunt midden tussen de punten $(\frac{2c}{a},0)$ en $(0, \frac{2c}{b})$ ligt.

Van cirkel naar hyperbool

De bovenste figuur links op de volgende bladzijde toont een driehoek met ingeschreven cirkel. De lijnen die de hoekpunten verbinden met de raakpunten op de overstaande zijden, gaan door één punt (punt van Gergonne).



Het bewijs van de bedoelde eigenschap is eenvoudig voor wie vertrouwd is met de stelling van Ceva (zie het artikel van Louis Maassen in dit nummer).

AF en *AE* zijn als raaklijnstukken uit een punt aan de cirkel evenlang; net zo *BF* en *BD* en ook *CD* en *CE*.

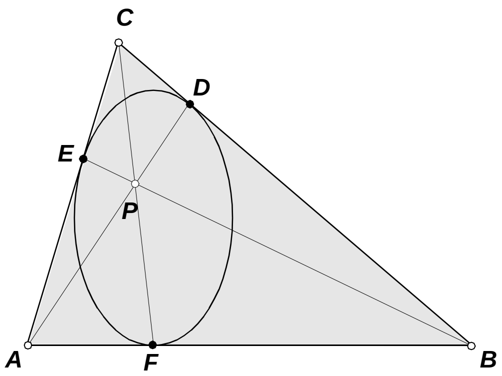
Noem ik die lengten achtereenvolgens *u*, *v* en *w*, dan volgt uit:

$$\frac{u}{v}\cdot\frac{v}{w}\cdot\frac{w}{u} = 1$$

de concurrentie van *AD*, *BE* en *CF*.

De lezer kan nagaan dat ook voor de drie aangeschreven cirkels van de driehoek geldt dat de lijnen die de hoekpunten verbinden met raakpunten op de overstaande zijden door één punt gaan.

Op mijn computer kan ik bovenstaand plaatje oprekken en dat levert dan bijvoorbeeld dit op:



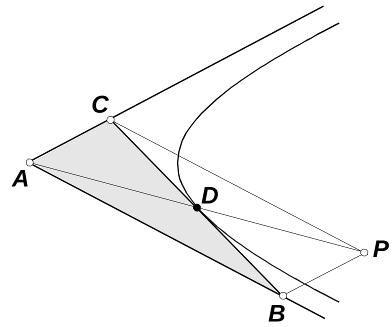
Zo'n oprekking is een voorbeeld van een affiene transformatie. Noch het raken, noch het door één punt gaan van de drie lijnen wordt aangetast door zo'n transformatie en dit leidt tot de stelling dat in het geval een *ellips* de drie zijden van en driehoek raakt, de drie lijnen van de hoekpunten naar de overstaande raakpunten concurrent zijn.

Deze stelling draagt wel de naam van MacLaurin.

In plaats van 'oprekken' kan de laatste figuur ook uit de eerste worden verkregen door scheve projectie; men kan dan letterlijk spreken van een schaduwfiguur.

Ik merk nog op dat een driehoek precies één ingeschreven cirkel heeft, maar oneindig veel in- en aangeschreven ellipsen. Omdat iedere ellips opgerekt kan worden tot een cirkel weet ik dat de stelling van MacLaurin voor alle driehoeken met bijpassende ellipsen geldt.

Schaduwfiguren kunnen ook via centrale projectie ontstaan en daarmee komen ook hyperbolen en parabolen in het vizier! De driehoek met ingeschreven cirkel kan zo geplaatst worden ten opzichte van het projectiecentrum en het vlak waarop geprojecteerd wordt dat het beeld van



de cirkel een hyperbool is, terwijl twee van de drie rakende zijden als asymptoot worden geprojecteerd.

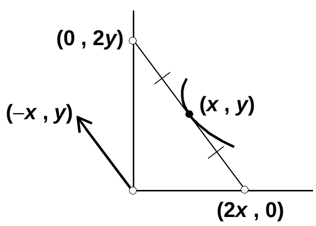
De stelling van MacLaurin is nu ook op deze situatie van toepassing, waarbij zoals in de tekening, de raakpunten op *AB* en *AC* de 'oneindig verre' punten van die lijnen zijn. Dat betekent dan dat de lijnen die *B* en *C* verbinden met de overstaande raakpunten parallel zijn aan de beide asymptoten. Nu zijn *BC* en *AP* de diagonalen van het parallellogram *ABPC* en bijgevolg is *D* het midden van *BC*!

Karakteristiek voor de hyperbool?

Een meetkundig bewijs schenkt op de een of andere manier vaak meer voldoening dan een algebraïsch-analytisch bewijs. De analyse is echter superieur waar het hier de beantwoording van de vraag betreft of *er nog andere krommen bestaan met de eigenschap dat alle raaklijnen twee vaste snijdende lijnen zodanig treffen dat het raakpunt steeds precies midden tussen de snijpunten ligt.*

Zonder beperking der algemeenheid kan ik voor die twee snijdende lijnen de coördinaatassen kiezen (die niet perse onderling loodrecht hoeven te zijn).

Laat $x = X(t)$, $y = Y(t)$ een parametervoorstelling van zo'n kromme zijn, met *X* en *Y* als differentieerbare functies..



Wil de kromme de gewenste eigenschap hebben, dan zal de vector $(-X(t)\ ,\ Y(t))$ een richtingsvector zijn van de raaklijn in het punt $(X(t)\ ,\ Y(t))$.

Anderzijds is ook $(X'(t)\ ,\ Y'(t))$ een richtingsvector van die raaklijn en hieruit volgt dan:

$$X(t)\cdot Y'(t) + Y(t)\cdot X'(t) = 0$$

en via de productregel:

$$X(t)\cdot Y(t) = C$$

waarbij *C* een constante is.

De kromme is dus zeker (een deel van) een hyperbool.

De eigenschap waar het me in dit stukje om te doen was, is blijkbaar karakteristiek voor de hyperbool.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl