Redactioneel[1]

- HF's werken aan onderwijs -

Dat 17 september 2005 een bijzondere dag is voor al degenen die het wiskundeonderwijskunde een warm hart toedragen, zal weinigen ontgaan zijn. Op deze dag herdenken we dat professor Hans Freudenthal honderd jaar geleden werd geboren. Dit was aanleiding om te reflecteren op de betekenis die professor Freudenthal voor het reken- en wiskundeonderwijs kan worden toegekend. Wat is er mooier dan die reflecties in een speciale uitgave op te schrijven? Een uitgave waaraan veel auteurs hebben bijgedragen, met veelal persoonlijke herinneringen aan Freudenthal, maar ook auteurs die hem niet kennen, die Freudenthals werken nauwkeurig hebben bestudeerd en onder de indruk zijn geraakt van zijn creativiteit en eruditie.
Met enige trots presenteren wij daarom deze speciale uitgave van twee tijdschriften, 'Nieuwe Wiskrant' en 'Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk', die deze bundel gezamenlijk totstandbrachten.[2]

Zoals gezegd, veel auteurs, uit binnen- en buitenland, belichten in hun bijdrage de relatie die zij met het onderwijskundige werk van Freudenthal voor het reken- en wiskundeonderwijs hebben. Ieder neemt een ander aspect voor zijn of haar rekening. En door al die stukken tezamen zou men Freudenthal kunnen 'horen'. In zijn autobiografisch boek 'Knipsels uit een leven', met de titel 'Schrijf dat op, Hans', zegt hij op een gegeven moment:

> Wanneer ik stukken lees van mensen die ik ken, hoor ik hun stem.

Horen wij de stem van Freudenthal in onze herinnering of door zijn geschriften te lezen? Zijn stem horen is een, zijn gedachten volgen en hem goed begrijpen, is twee. Bij het bestuderen van de vele artikelen en boeken van zijn hand raken we niet zelden onder de indruk, door de rijkdom van zijn gedachten, zijn bijzondere kijk op veel zaken of het mooie proza dat hij schreef:

> Ik vertel verhalen, omdat ik hoop dat anderen ze onthouden en aan het nageslacht doorgeven - een ijdele hoop. Verhalen over mezelf, maar meestal over anderen. En dan gebeurt het telkens weer dat iemand zegt: 'Schrijf dat op, Hans!' ...

Het zijn niet anders dan 'knipsels uit een leven'. Maar over het effect van wat hij schreef en wat hij ermee beoogde, was hij zelf niettemin soms onzeker. Hij wilde goed begrepen worden, maar wist ook dat zijn schrijfsels vaak anders werden geïnterpreteerd dan bedoeld:

> Het is niet eenvoudig te tonen zoals je bent, vooral als je helemaal niet zo bent.

Hij noemde zichzelf een *enfant terrible*. Freudenthal wist dat hij aan de weg timmerde en wilde dat zijn boeken en artikelen effect zouden sorteren, maar ook dat maakte hem niet zelden onzeker.
Deed hij er wel goed mee? Geldt het volgende citaat uit de autobiografie, waarmee Freudenthal het hoofdstuk over onderwijs afsluit en dat slaat op zijn poging om de lerarenopleidingen voor de universiteiten te behouden, wellicht ook voor ander werk waarmee hij zijn idealen probeerde te verwezenlijken?

> Ja, ik was een tamboer, maar dan voor dovemansoren. (...) Nee, ik was geen goede tamboer. Een goede tamboer gaat niet diep in de nacht, maar in de ochtend trommelen - als het tijd is om op te staan. Maar ik denk niet dat ik er spijt van heb. Een *enfant terrible* hoort trots op zijn ondeugden te zijn.

Hoe is Freudenthal, als wiskundige opgeleid aan de universiteit van Berlijn en naar Nederland gehaald om wiskunde te doceren, zo diep betrokken geraakt bij het reken- en wiskunde*onderwijs*? Verschillende schrijvers van artikelen in deze bundel tippen deze interessante vraag aan. Het antwoord vinden we vooral in 'Schrijf dat op, Hans'. Het betreft een weg die Freudenthal gedurende meer dan een half leven lang heeft afgelegd en die verschillende bakens heeft gekend. We gaan er op een viertal in. Hij schrijft, op pagina 336, dat die weg niet eenvoudig te reconstrueren is:

> Ik heb vanaf het begin van mijn verblijf in Nederland mijn kritiek op het Nederlandse wiskundeonderwijs niet onder stoelen en banken gestoken, al bleven het onderonsjes (met collega's en studenten; toevoeging red.).

Dat is het eerste baken. Dan komen de oorlogsjaren die zo belangrijk blijken te worden in Freudenthals wiskundeonderwijskundige ontwikkeling (pag.337):

> Iets anders dat ik heb neergeschreven en niet gepubliceerd - trouwens niet eens voltooid - was een rekendidactiek.

> Het manuscript - 103 bladzijden folio getypt en wat niet-getypte die zoek geraakt zijn - moet uit 1942 dateren.

Hij schreef dit manuscript om twee van zijn kinderen te kunnen helpen met hun leren rekenen. Dit manuscript is als tweede baken te beschouwen.

Het derde baken in zijn ontwikkeling gaat over zijn participatie in de Wiskundewerk-gemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs (WVO), vlak na de oorlog. We volgen de tekst van Freudenthal (pag.337-338) in zijn reflectie op de gebeurtenissen:

> Een zwak idee van wat eigenlijk ‘Rekendidactiek’ behelsd zou hebben, geeft het - eveneens niet gepubliceerde - manuscript van een lezing, ‘Opvoeding tot denken’, die ik op de eerste conferentie van de Werkgemeenschap van Opvoeding en Onderwijs (WVO) na de oorlog, in augustus 1945, op Rhederoord heb gehouden - nu, veertig jaar later, houd ik er op een enkel fundamenteel punt - speciaal wat het leren van de grondbewerkingen betreft - een andere mening op na. Aan de andere kant, in het manuscript bladerend, vind ik veel van mijn tegenwoordige opvattingen terug. Soms tot mijn eigen verbazing.

Als we willen weten welke standpunten Freudenthal toen huldigde en veertig jaar later nog kon onderschrijven, wordt een tipje van de sluier in de aansluitende tekst van hem opgelicht (pag.338):

> Ik beschouwde het toen bij voorbeeld al als een averechts idee het klassikale onderwijs te vervangen door individueel onderwijs, zoals de Montessorianen deden; ik had toen al mijn zinnen gezet op onderwijs in kleine groepen ...

Freudenthal neemt hiermee een positie in die indruist tegen de ‘modieuze’ trend in de onderwijskunde, zoals hij tegen zoveel fulmineert wat uit die hoek het onderwijs binnenwaait. Hij heeft die veronderstelde bijdrage van de onderwijskunde aan het onderwijs later vaak ‘lege dozen’ genoemd (pag.338):

> Op mijn scepticisme ten aanzien wat psychologie en algemene didactiek en methodenleer tot de rekendidactiek konden bijdragen, hoef ik heden nog geen fundamentele correctie aan te brengen (op de gedachten die hij in zijn lezing van 1945 uitsprak; toevoeging red.), van het voordeel van de twijfel dat ik toen nog aan de toetsontwikkeling wilde toekennen, is alleen de twijfel overgebleven.

Verder dan deze, vrij algemeen geformuleerde kritiek, gaat Freudenthal echter als hij de cognitieve ontwikkeling van kinderen beschrijft zoals hij die ziet (pag.338):

> In het manuscript van 1942 keer ik me bij voorbeeld tegen degenen die in het onderwijs de cognitieve ontwikkeling willen vervangen door een cognitieve volgorde, preciezer: door die cognitieve volgorde die uit hun eigen (logische) analyse voortvloeit. Het lijkt of ik toen vooruit liep op mijn kritiek op Piaget (...), maar ook mijn kritiek op de New Math.
>
> De voorstanders van New Math waren nog radicaler dan degenen die ik in mijn manuscript van 1942 bestreed.
> Ze stelden immers dat de structuur der wiskunde- en dat was dan de door Bourbaki uitgelijnde - ook de structuur van het onderwijs moest bepalen.

Freudenthals activiteiten in deze Wiskunde Werkgroep van de WVO zijn zonder twijfel cruciaal voor zijn ontwikkeling als wiskunde-onderwijskundige. Zelf steekt hij dat niet onder stoelen of banken. Hij noemt deze werkgroep bij herhaling ‘mijn hogeschool van de wiskunde-onderwijskunde’.
Het vierde baken in Freudenthals leven als wiskunde-onderwijskundige strekt zich over ettelijke jaren uit. Ze start met de instelling van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) in 1961, aanvankelijk bedoeld om leerplannen voor het voortgezet onderwijs - met de Mammoetwet rigoureus op de schop genomen - samen te stellen. De instelling van de CMLW werd door de politiek gesteund en financieel mogelijk gemaakt. Freudenthal werd al snel bij het werk van de CMLW betrokken, hoewel hij aanvankelijk sceptisch stond ten opzichte van haar opdracht. In zijn autobiografie schrijft hij erover dat hij - en anderen - zich er aanvankelijk door overrompeld voelde (pag.351).

> Auteursgroepen die in het buitenland hun licht hadden opgestoken, waren ons te vlug af geweest. Voor de leerplannen er kwamen, waren ze al geïnterpreteerd. Een beetje New Math, niet veel, maar toch té veel en in elk geval gespeend van elke relatie met de realiteit, van elk inzicht in de dienende taak van de wiskunde. Had het anders gekund? Misschien wel, als we enkele jaren respijt hadden gehad. De spoed van toen heeft ons vijftien tot twintig jaar gekost. Het nieuwe bleek praktisch van begin af aan mis.

Als het nog niet duidelijk was geworden, dan wordt het nu overduidelijk: Freudenthal acht invoering van de ‘New Math’ een ramp voor het onderwijs. Dit wordt een van de thema’s die hij in die jaren erna veelvuldig bespeelt, een thema dat mede aan de wieg van het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskundeonderwijs (IOWO, 1971-1980) heeft gestaan. In diverse bijdragen in deze bundel worden deze gebeurtenissen aan de orde gesteld en wordt er gememoreerd aan het feit dat Freudenthal hier niet in z’n eentje heeft geopereerd. Ook de inspanningen van bijvoorbeeld Wijdeveld en Goffree zijn onmisbaar voor de oprichting van het IOWO geweest. Maar niettemin: het was Freudenthal die al in het begin van de jaren zestig de noodklok over het Nederlandse wiskundeonderwijs luidde en het zo mede mogelijk maakte dat er in ons land een geheel nieuwe ontwikkeling in gang werd gezet, die zou worden aangestuurd door een speciaal instituut voor de ontwikkeling van het reken- en wiskundeonderwijs: het IOWO.
De oprichting van dit instituut werd door de CMLW sterk bevorderd. In de commissie werd bepleit dat ook het onderwijs in het rekenen van de lagere school bij de ver-

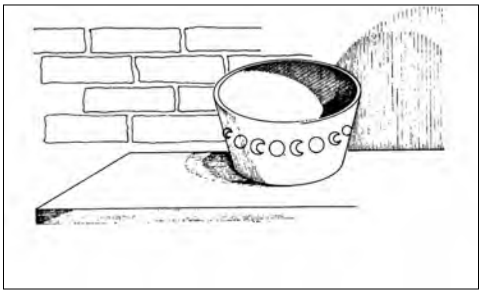
nieuwing werd betrokken. Zo gebeurde het ook, al had de oprichting van het IOWO de nodige voeten in aarde. In de zomer van 1971 kon het IOWO van start gaan. In zijn bijdrage in deze bundel vertelt Wijdeveld hoe dit in z'n werk is gegaan.

We komen dan bij het laatste wapenfeit van betekenis van Freudenthal: zijn rol in het IOWO, waar hij in de eerste jaren - tot 1975 - zowel hoogleraar-directeur als boegbeeld van was. Met een team dat hem stimuleerde en dat in grote lijnen voor dezelfde richting als hijzelf koos, ging Freudenthal aan de slag, veelal als gelijkwaardig lid van het team, soms als initiator, als tamboer op de grote trom of zelfs op zijn knieën, met name als het om het observeren van leerprocessen van leerlingen ging. Freudenthal gaf soms de grote lijn aan, maar werd soms ook in de gewenste richting geduwd. De grote lijn had hij, zoals gezegd, eerder ontwikkeld, in meer dan een half werkzaam leven. De duwtjes die hij van zijn collega's kreeg, gaven hem nieuwe kracht en boden hem nieuwe inzichten. Hij 'ging op z'n knieën' om kinderen te observeren en met ze te praten over reken-wiskundeonderwijs, zoals in de ontwerpschool van Wiskobas in Arnhem, en later in de ontwerp-opleiding voor leraren basisonderwijs in Gorcum. Maar de eerste contouren van, laten we zeggen, zijn ideaal van reken-wiskundeonderwijs, werden al in 1942 zichtbaar, zo leren we uit zijn autobiografie.

We zijn natuurlijk benieuwd naar dat ideaalbeeld. Wat beoogde Freudenthal eigenlijk? Waar streefde hij naar? Welke de elementen waren voor hem essentieel? Is er wel sprake van een grote lijn, van 1942 tot zijn overlijden op 13 oktober 1990? Het lijkt zo te zijn als we zijn biografie lezen, maar het is realistischer om vast te stellen dat Freudenthal vanaf zijn eerste, prille aanzet in 1942, en misschien al van daarvoor, een ontwikkeling doormaakte, die uiteindelijk leidde tot de persoon die wij ons nu herinneren. Freudenthal integreerde met andere woorden de gebeurtenissen in de wiskunde-onderwijskundige wereld in zijn denken, zoals iedereen dat zou doen, en zag daarmee bepaalde zaken steeds weer anders, soms ook scherper. We krijgen een indruk van deze ontwikkeling uit de verschillende bijdragen die in deze bundel zijn opgenomen. Ons zal dan, naast alle overeenkomsten die er uit de artikelen spreken, ook de diversiteit opvallen. In hun totaliteit bieden ze een aardig beeld van Freudenthals ontwikkeling en zijn denken. Om het antwoord te geven op de vraag welke essentiële elementen in Freudenthals geschriften vaak terug komen, zullen we enkele zaken aanstippen.

In de eerste plaats moeten we de vraag aan de orde stellen wat de invloed van Freudenthal eigenlijk is geweest. We hebben in het voorgaande gezien dat hij daar zelf bij tijd en wijle erg onzeker over was. In persoonlijke contacten komt bijvoorbeeld een andere Freudenthal naar voren dan uit zijn schrijfsels en geschriften. We zouden hier eigenlijk aan toe moeten voegen: 'zoals dat wellicht in wezen voor ieder mens geldt'. In persoonlijke communicatie met hem ging het zelden of nooit over 'grote lijnen'. Hij was, zo leek het, meer in problemen van micro-didactische aard geïnteresseerd. Dan ging het meestal over interpretaties van bepaalde gebeurtenissen in de klas, over observaties die hijzelf of anderen, collega's vooral, deden. Theoretische verhandelingen bewaarde hij voor zijn boeken en voor lezingen die hij gaf.
We zullen een voorbeeld geven van Freudenthals interesse in de micro-didactiek. Het wordt beschreven door Jan van den Brink, destijds medewerker van Wiskobas - een afdeling van het IOWO - die tot taak had het reken-wiskundeprogramma van de basisschool te vernieuwen. Het gebeurde vindt in de jaren zeventig plaats op de Dr.W. Dreesschool te Arnhem, de ontwerpschool van Wiskobas.

> Op een dag - het moet in of omstreeks 1973 geweest zijn - wees Freudenthal me tijdens een les over tellen op een ordinair margarinekuipje, dat in de klas in de vensterbank stond en daar als bloempot dienst deed. Op het kuipje bevonden zich twee figuurtjes, een zonnetje en een maantje, afwisselend, het hele kuipje rond.



figuur 1

> Deze 'vaas' werd het startpunt voor een serie uiterst belangrijke onderwijsactiviteiten. Professor Freudenthal wees de klas op het vaasje en vroeg: 'Zijn er meer zonnetjes dan maantjes op de vaas?' En, daarna: 'Hoeveel figuurtjes in totaal?' Natuurlijk kunnen de kinderen niet alle figuurtjes op de vaas zien. De achterkant onttrekt zich immers aan hun waarneming. Dit gegeven nu werd de essentie van een serie activiteiten waarbij het erom ging dat niet zichtbare voorwerpen, voorwerpen die zich niet in het blikveld van de kinderen bevinden, het mathematiseren van de ruimte uitlokken.

Als instapvoorbeeld van Freudenthals 'fundamentele uitgangspunten' kiezen we zijn opvatting over de rol die de realiteit in het reken-wiskundeonderwijs zou moeten spelen. We raken dan aan verschillende belangrijke concepten uit zijn denken, zoals die van het kernconcept van zijn 'didactische fenomenologie'.
Een van zijn grote onderwijskundige werken bevat deze term in de titel: 'Didactische fenomenologie van wiskundige structuren'. Het dateert uit 1984 en bevat voorbeelden van wat hij bedoelt: wiskundige fenomenen als

lengte, natuurlijke getallen, breuken en verhoudingen en evenredigheid worden in een didactische context beschreven.
Op de eerste pagina maakt Freudenthal ons duidelijk wat hij onder 'didactische fenomenologie' verstaat (pag.9):

> Onze wiskundige begrippen, structuren, denkbeelden zijn uitgevonden als werktuigen om de verschijnselen van de fysische, sociale, mentale wereld te ordenen. *Fenomenologie* van wiskundige begrippen, structuren, denkbeelden betekent: ze in hun relatie tot de fenomenen te beschrijven waarvoor zij geschapen en waartoe zij uitgebreid werden in het leerproces der mensheid; en voorzover deze beschrijving met het leerproces van de jonge generatie te maken heeft, wordt zij didactische fenomenologie, wegwijzer voor de onderwijsgevende naar de instap van de lerende in het leerproces van de mensheid.

Dit citaat bevat twee interessante begrippen uit Freudenthals 'grote lijn' in zijn denken: het eerste is het idee van de 'geleide heruitvinding', een begrip dat in verschillende bijdragen in deze bundel wordt uitgewerkt. Het tweede is het begrip 'realiteit'. Eerder werd al aangemerkt dat Freudenthals kritiek op de 'New Math' deels het gebrek aan realiteitswaarde van die vernieuwing betrof. Hij benadrukt in zijn geschriften vaak dat wiskunde zijns inziens *een dienende rol* heeft. Onderwijs in rekenen-wiskunde moet daarop aansluiten:

> Dat wiskunde in de realiteit wordt beoefend en ook zo moet worden onderwezen, is een denkbeeld dat zich in mijn ontwikkeling steeds verder ontplooide, mede door het besef van de cruciale betekenis van de reflectie. Het is een uitdijende realiteit en hetgeen die realiteit in 'abstracte' sferen doet uitdijen, is de telkens herhaalde reflectie. Wiskunde wordt in de realiteit beoefend, mede om van de weeromstuit die realiteit - dus niet alleen door uitdijen - te beïnvloeden en te veranderen. 'Wiskunde toepassen'- noem je dat als het in heel 'concrete' realiteit geschiedt. Voor het merendeel van wie op school rekenen-wiskunde leren is dit toepassen zelfs het rationale van het wiskunde-onderwijs. (pag.359)

Dit betekent dat Freudenthal de vormende waarde van de wiskunde toen nog nadrukkelijk ontkende. Enkele jaren later schrijft hij echter:

> Nu, op het eind van de weg, sla ik de vormende waarde van het wiskunde-leren hoog aan, geweldig hoog (pag.360).

De Moor concludeert in zijn proefschrift over deze ommezwaai van Freudenthal:

> We moeten hierbij echter aantekenen dat hij op dat moment een geheel ander wiskundeonderwijs - hij dacht aan de realistische aanpak - voor ogen had dan zo'n halve eeuw daarvoor.

'Ja', zegt Freudenthal zelf, 'het komt er op aan wat je wiskunde en wiskunde-onderwijs noemt.'

Deze drie elementen uit 'het ideaal' van Freudenthal, de nadruk op de realiteit, de idee van de geleide heruitvinding en de fenomenologische beschrijving ten behoeve van een didactische uitwerking, werden door ontwikkelaars van het IOWO als de bron beschouwd voor het ontwerpen van onderwijsactiviteiten en het uitlijnen van leergangen. Of deze ontwerpen pasten in zijn beeld van reken-wiskundeonderwijs met een open structuur van onderzoeks- en probleemgerichte activiteiten, zag Freudenthal scherp. En daar maakte hij de ontwerpers van 'zijn' IOWO op geëigende momenten - bijvoorbeeld in de kadervormingsbijeenkomsten - bewust van. Zoals uit veel bijdragen in deze bundel blijkt, was Freudenthal in die bijeenkomsten op z'n best in de beoordeling van micro-didactische situaties, van observaties en analyses, gedaan met het oog op cognitieve aspecten van het leren van rekenen-wiskunde.

Er is nog zoveel te zeggen over Freudenthals ontwikkeling als wiskunde-onderwijskundige. Veel daarvan is en blijft in deze redactionele inleiding op deze bundel onbesproken. Vanzelfsprekend, want om alles wat Freudenthal heeft aangekaart de revue te laten passeren, is onmogelijk. Vooral omdat de nuancering dan ontbreekt. Juist om die nuancering gaat het immers. Verschillende bijdragen kiezen een verschillende invalshoek, die tot verschillende conclusies kan leiden. Die nuanceringen maken deze bundel bijdragen zo levendig, denken wij. Juist de totaliteit van al die invalshoeken, biedt een interessant beeld van het wiskundig-onderwijskundig denken van professor Hans Freudenthal: meer dan een half leven op weg in een poging om zijn idealen te verwezenlijken.

Hans ter Heege, Tom Goris, Ronald Keijzer & Lidy Wesker

Noten

1 De redacteuren zijn de oud-medewerkers van Wiskobas zeer erkentelijk voor de informatie die zij van hen kregen, waardoor deze inleiding kon worden samengesteld en verbeterd.
2 Met speciale dank aan Betty Heijman, Nathalie Kuipers, Ank van de Heiden, Ellen Hanepen & Liesbeth Walther voor hun redactionele bijdragen aan deze bundel.

In his autobiography 'Schrijf dat op, Hans; knipsels uit een leven' (1987) Freudenthal, who was a mathematician in his early years, described his personal development as a mathematics educationalist. Which questions can we derive from this book? Can we identify beacons in his growing understanding of educational processes, in which a crucial role is given to observations of children and adult mathematics learners? An important beacon can be found in his work in iowo (1971-1980). Freudenthal participated in the work of this institute in an open and creative way, in which he integrated ideas and proposals from the other members of staff. In this publication, several examples of his work as an educationalist who is deeply involved in the development of mathematics education are worked out, showing us Freudenthal's development.

Woord vooraf

Jan de Lange
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Oberwohlfach, ja, als wiskundige moest je daar toch minstens één keer in je leven geweest zijn, zeiden al die wiskundigen. Veel belangrijker dan Napels zien.
Er was sprake dat er een bijeenkomst zou zijn over didactiek, of in ieder geval over onderwijs in de wiskunde. Uiteraard kon daar maar één man centraal staan: de Nederlandse Duitser of de Duitse Nederlander Hans Freudenthal.
Freudenthal had een kamer naast mij op het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO; we spreken over de periode 1976-1980). Dat ik op het IOWO werkte was al een verhaal op zich, want ik vond het altijd maar een vreemd instituut. Maar, hoewel ik hem nog nooit ontmoet had, de naam Hans Freudenthal had voor mij iets magisch. Die aantrekkingskracht deed mij uiteindelijk als medewerker bij het IOWO belanden. In 1980, ter gelegenheid van *HF75*, schreef ik:

> Freudenthal. Weliswaar nooit gezien, gehoord of gelezen, maar toch. Een magische naam. Die magie werd onmiddellijk bevestigd door de eerste ontmoeting: deze professor zag er precies uit zoals een professor eruit diende te zien:

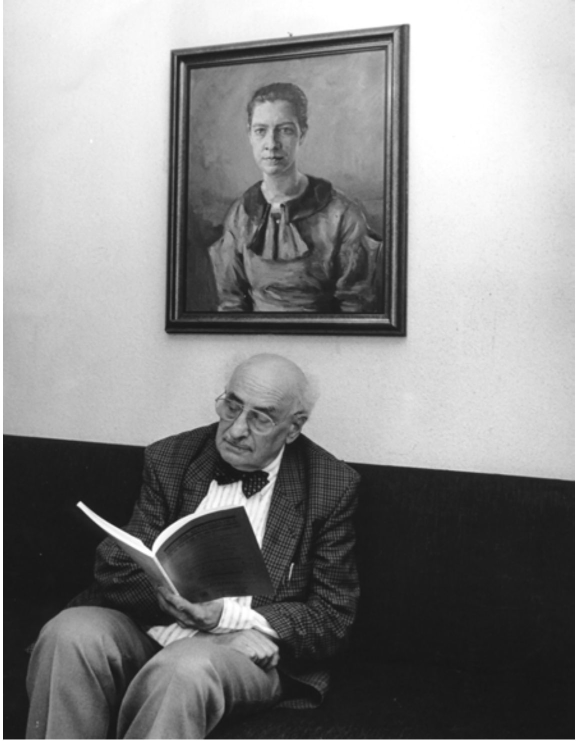
> Bovendien was ook zijn gedrag geheel in overeenstemming met dat uiterlijk.

Oberwohlfach was rond *HF74*. Freudenthal had bedacht dat het wel leuk was als niet alleen hij een verhaal hield, maar ook een van zijn *didactical engineers* iets zou vertellen over hoe zijn principes gestalte kregen in leerlingmateriaal. Dus kwam hij bij me langs om te vertellen dat ik mee ging naar Oberwohlfach. En mijn lezing moest in het Duits. *Selbstverständlich*.
Als chauffeur was ik Freudenthal redelijk goed bevallen. Hij verkneukelde zich in het bijzonder wanneer ik hem kwam ophalen in mijn toenmalige trots: een LandRover, maar dan wel zo'n echte, zonder enig comfort of vering. Dat vond'ie prachtig, z'n ogen glommen, maar zijn gestel leed aanzienlijk wanneer we over langere afstanden moesten rijden. Dus leek Oberwohlfach per LandRover mij geen goede gedachte. Gelukkig heb ik twee zussen die wel eens een weekje wilden LandRoveren en tevens in het bezit waren van een enigszins fatsoenlijke automobiel, waardoor Freudenthal een wat comfortabeler reis in het vooruitzicht kon worden gesteld. Het zou immers een lange dag worden.
Om half acht in de ochtend meldde ik mij in de Utrechtse wijk Oog in Al, bij de familie Freudenthal. Hij deed zelf open. 'Och ja, daar bent u', hetgeen op zich een juiste constatering was. Hij verwees mij naar zijn vrouw Suus die, nog in nachtjapon, mij een plekje op de bank aanbood. 'Koffie?', vroeg ze hartelijk. Ze pakte de ronde glazen pot waarin zo te zien al heel wat koffie gezet was in het verleden, en plaatste deze onder het apparaat. Gezellig pruttelend droop de koffie door, weer een nieuwe rand aanbrengend in de glazen kan. Freudenthal was nog druk met zich te organiseren, hoewel het totaal onduidelijk was waarmee precies. Een echte professor. Een dikke schijf ontbijtkoek werd mij ook geserveerd, en een tweede bakje koffie was standaard. Het had wel wat, daar thuis. Een heel simpel ingericht huis, twee hartelijke, maar aparte mensen die geheel de sfeer bepaalden.Toen we vertrokken deed Freudenthal alsof het verwisselen van de LandRover voor een meer beschaafde automobiel hem niets uitmaakte, maar toch bleef de indruk hangen dat hij liever in Oberwohlfach was aangekomen in een LandRover. *Entschuldigung*.

Oberwohlfach was heel erg ver, en ik dacht dat het met Freudenthal in de auto nog wel eens veel verder zou kunnen zijn. Dat bleek een misvatting. Zelden zo'n leuke man in de auto gehad. Nadat hij eerst uit de doeken deed hoe slecht hij zelf reed in zijn Peugeot, aansluitend analyseerde hoe slecht er op dat moment om mij heen werd gereden, kwamen we ter zake. Hij veranderde in een orakel dat op het ene moment bevlogen over wiskunde zat te vertellen, om vervolgens de wiskundigen tot op het bot te fileren. Prachtig, zoals dat ging. Dieudonné was daarbij vooral het haasje. Deze beroemde Franse wiskundige van de Groupe Bourbaki had al heel wat aanvaringen met hem gehad over wiskundeonderwijs, en wie daar eenmaal *live* getuige van was geweest (zoals ik een keer in Mons, België), zou dat nooit meer vergeten. 'Ach ja, zo'n ongelóóflijk domme man', was een van zijn standaardkwalificaties. 'Die begrijpt er ja helemaal niets van!'

De zeven uur (geloof ik) vlogen om. Over onze verhaaltjes voor Oberwohlfach hebben we het niet kunnen hebben, daarvoor bleek de reis te kort. Niet dat het er veel toe deed; ons duo-optreden werd algemeen als succesvol ervaren.
Maar ook dat deed er niet toe, zoals Freudenthal op de weg terug evalueerde: 'Ach ja, die Duitsers zullen het nooit echt goed begrijpen.' Uit mijn hart gegrepen.

Mijn ervaring overdenkend, stelde ik mij de vraag hoe Freudenthal begrepen wordt. Ik bedoel: nu, in deze tijd en door mensen die hem al dan niet persoonlijk gekend hebben.
Ruim een jaar geleden staken de redacties van de twee tijdschriften die het Freudenthal Instituut uitgeeft de koppen bij elkaar. Een gezamenlijke special over Freudenthal ter gelegenheid van zijn honderdste geboortedag moest er komen! Tal van auteurs, uit binnen- en buitenland, met kennis van basis- of voortgezet onderwijs, is gevraagd een bijdrage te leveren. Dit resulteerde in deze special: een rijk gevarieerde bundel van persoonlijke reflecties op het werk van Freudenthal. In de meeste gevallen geschreven met het oog op de betekenis van Freudenthals gedachtengoed in deze tijd, bijna zestig jaar na zijn eerste publicaties over wiskundeonderwijs. Alleen al aan de omvang van deze bundel kun je zien dat dit gedachtengoed leeft!



Hans en Suus Freudenthal

Retrospectief

Mirjam Freudenthal

figuur 1: familie Freudenthal

Een korte impressie van mijn herinneringen aan mijn vader in zijn relatie tot mijn kinderen is niet eenvoudig te schrijven. Die herinneringen beslaan een periode van bijna twintig jaar, de eerste ervan gaan terug tot 35 jaar geleden. Ook zijn ze heel divers. De didactisch-wiskundige wereld kent die relatie al uit de aantekeningen die mijn vader maakte over zijn wandelingen met Bastiaan.[1] Wandelingen die in 1972 beginnen, als Bastiaan precies twee jaar is.

Directe aanleiding is de geboorte van zijn zusje Monica, één dag voor Bastiaans tweede verjaardag. Bastiaan is met zijn vele vragen nadrukkelijk aanwezig en naar mijn idee gunde mijn vader me wel een paar uurtjes rust. In korte tijd werd het wandelen een vrijwel dagelijks ritueel; we woonden ook maar twee straten van elkaar. Later, als de kinderen overdag op school zijn en na school hun besognes hebben, concentreren de wandelingen zich meer op de weekenden. Al vrij snel werden die meer dan alleen een rondgang om mij te ontlasten. Bastiaans ‘opa Hans’, of vaak ook alleen maar ‘Hans’, genoot er echt van om met dat jongetje, dat in meerdere opzichten een evenbeeld van hemzelf was, te wandelen.

Dat wandelen was niet het doel op zich, het werd een samen ontdekken, samen leren, samen genieten. Belangrijk was steeds weer de inhoud, wat er gezien werd en waarom iets was zoals het was. Altijd met elkaar praten, uitleggen en discussiëren op een serieuze, haast volwassen manier, dat was het meest kenmerkende en dat is wat mij het meest is bijgebleven.

Verrassend was steeds opnieuw het enthousiasme en de verhalen van beiden bij terugkeer. ‘We leren allebei steeds weer van elkaar’, was regelmatig een van mijn vaders opmerkingen. Bastiaan, constant op zoek naar verklaringen, opa op zoek naar de wijze waarop die te geven. Ik herinner me nog de woorden: ‘Piaget heeft het helemaal verkeerd, zijn leerontwikkelingsschema deugt niet, want het is door Bastiaan al meerdere keren gekraakt'.

De wandelingen duren ongeveer twee uur en gaan aanvankelijk door de Utrechtse wijk Oog in Al, maar als het jochie beter kan lopen begeven die twee zich ook daarbuiten, onder meer naar het Merwedekanaal, het rangeerstation van de spoorwegen en het Julianapark. Als Bastiaan ouder wordt, en de andere twee kinderen vaak ook meegaan, wordt de auto of de trein genomen en gaan ze naar de Soesterduinen, de Leusderheide, Kootwijkerzand of worden er musea bezocht: de prehistorische boot van het Centraal Museum is een geliefd studieobject. Maar ook het Mathematisch Instituut op de Uithof wordt regelmatig aangedaan. Ook daar blijven de wandelingen niet onopgemerkt. Zo ontvangt mijn vader van de heer Freriks,[2] amanuensis bij natuurkunde, een speciaal samengesteld pakket met natuurkundige proeven die hij samen met Bastiaan ter plekke kan uitvoeren.[3] Vaak worden in die jaren onze vakanties gezamenlijk met mijn ouders doorgebracht. Een geliefd oord was het Bayrisches Wald waar wij logeerden in het buitenhuis van professor Karl Strambach en zijn vrouw Maria. In de uitgestrekte bossen en velden brengt mijn vader met veel geduld zijn belangstelling voor alles wat er leeft in de natuur over op de kleinkinderen. En tijdens een vakantie op de Lüneburgerheide kan hij samen met hen vol overgave kijken naar de trek van grote mieren en hun drukke werkzaamheden of hen langdurig vertellen over de zaadvorming van grassen en de evolutie naar granen.
De wandelingen maakten in ons gezin onderdeel uit van het dagelijkse leven. Destijds realiseerden we ons eigenlijk niet het heel bijzondere van een dergelijke relatie tussen onze kinderen en hun grootouders (ook mijn moeder was, mede door haar interesse voor onderwijsvernieuwing, natuurlijk altijd erg bij hun wel en wee betrokken, al was ook zij geen lid van opa's wandelclubje), een relatie die hun latere leven duidelijk heeft beïnvloed. Signalen van buiten hebben mij dit in de loop der jaren duidelijk gemaakt.
Een tweetal voorbeelden kan dit illustreren.

Zo ontmoette ik enkele jaren geleden tijdens een promotie, waar ook Bastiaan bij aanwezig was, de echtgenote van een hoogleraar die mij vroeg of dat jongetje dat met mijn vader vroeger door de wijk Oog in Al liep dezelfde was als de jongeman vlak naast mij. Zij bezocht als jonge vrouw regelmatig haar moeder die in de wijk woonde. Voor haar was de 'professor' (zo was hij in de buurt bekend), die met dat kleine jongetje met de blonde krullen regelmatig passeerde, steeds weer een opvallende en vertederende verschijning: uit de houding van de grootvader straalde de constante en bijzondere aandacht die hij voor zijn kleine wandelgenoot had.
Een ander voorval had plaats bij de promotie van R. Dekker. Een van de opponenten haalde bij zijn interventie de herinnering op aan een voorval dat plaatsvond in het Evoluon in Eindhoven toen hij daar met een kleinkind een bezoek bracht. Op een zeker moment had zich in het museum een groep mensen verzameld om een oudere heer die, zonder acht te slaan op al die mensen, aan twee of drie kinderen de werking van enkele instrumenten uitlegde en dat op een voor ieder zó begrijpelijke wijze; het bleek mijn vader met zijn kleinkinderen te zijn. De spreker bekende dat hij zich wat achteraf bij het gehoor had gevoegd en met zijn kleinkind meeluisterde. Dat studenten wel eens klaagden over mijn vaders moeilijke manier van uitleg was niet te begrijpen als je zag hoe goed hem dit blijkbaar met kleine kinderen afging.

Mocht lijken dat mijn vader vooral tegen een didactisch-mathematische achtergrond met de kleinkinderen communiceerde, was dat echter geenszins het geval. Veel belangrijker immers is de algemene culturele belangstelling die hij hen heeft meegegeven. Geschiedenis, kunst en literatuur hadden zijn grote belangstelling en die deelde hij met hen. Van de regelmatige bezoekjes die Bastiaan en zijn zusjes aan opa's studeerkamer brachten, een sanctuarium waar wij vijfentwintig jaar eerder als kinderen slechts zelden mochten komen, hoorden wij pas veel later. Daar werd in aansluiting op de wandelingen de kennisuitwisseling voortgezet. Bastiaans grote passie voor het surrealisme vloeit direct voort uit de al van voor de Tweede Wereldoorlog daterende vriendschap tussen mijn ouders en Kurt Schwitters waarover hem verteld werd, en waardoor zij kunstobjecten van Schwitters in huis hadden. En zijn belangstelling voor geschiedenis deelde mijn vader met alle drie de kinderen. Monica's voorliefde voor genealogie werd in het bijzonder gestimuleerd door zijn gesprekken met haar over de Tweede Wereldoorlog en over zijn familie; haar las hij voor uit de gedichten die hij in het werkkamp Havelte geschreven had.

Was mijn vader in mijn jeugd vooral geobsedeerd door de zuivere wiskunde, in het bijzonder de topologie, een passie die je met kleine kinderen niet goed kunt delen, zijn groeiende interesse in de didactiek van de wiskunde en daarbuiten maakte mijn kinderen deelgenoten in het zoeken naar kennis en het dienstbaar maken daarvan. Mocht ik als dochter misschien iets gemist hebben, als moeder is dat drievoudig ingehaald.

Noten

1 *Pedomorfose, 25, 30* en *37*, 1975 en 1976; uitgave Stichting Jenaplan.
2 Dit staat mij in het bijzonder bij omdat ik de heer Freriks kende van de korte periode dat ik wis- en natuurkunde studeerde.
3 *Pedomorfose, 35*, 1976.

Encounters with Hans Freudenthal

Zbigniew Semadeni
University of Warsaw, Poland

It is a difficult task to write about the greatest - in my opinion - personality of mathematics education in the twentieth century. In addition to his books and articles, Hans Freudenthal's heritage includes the founding of three lasting institutions: the journal 'Educational Studies in Mathematics', the 'International Congresses on Mathematical Education (ICME), held every four years and the Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO), now Freudenthal Institute. What follows are my recollections of what he said at various conferences. Some of his ideas impressed me so much that I still vividly recall their meaning, but not always the relevant circumstances.

My first encounter was not with Freudenthal himself but with his book on 'Lingua cosmica' (called, for short, 'Lincos'), entitled 'Lincos. Design of a language for cosmic intercourse', published by North Holland in 1960. He posed the following problem:

> Suppose humans had to deal with aliens from outer space. By what means could we possibly establish contact with them?

Freudenthal proposed an artificial language, 'moderately formalized', as he put it, adding 'we do not object to fully-formalized language'. Nevertheless, the text from Chapter I on shows Freudenthal mastery in developing formal logical systems, while the Introduction (44 pages) is written in his specific style which is known from his books on education.

In 1973 Freudenthal published his monumental work 'Mathematics as an Educational Task'. He told me later that he would have phrased his criticism of 'New Math' reforms in the book in much sharper form had he anticipated the poor implementation of the ideas of the reformers (in his opinion, it was often 'new nonsense' rather than 'New Math') and the devastating effects of hasty reforms.
He once expressed the controversial view that mathematics courses offered in the pre-service education of prospective mathematics teachers in elementary or junior secondary schools should not include topics (such as calculus) which were not to be taught in such schools.

> What is the use of teaching linear algebra to future teachers if they do not know how to measure the height of a tree on the other side of a river using Thales' theorem?

argued Freudenthal. This was in stark contrast to the accepted notion, which I had often heard, that the teacher's knowledge should be deeper and more extensive than what he and/or she would actually teach (one version of this notion had been expressed by F. Klein in his celebrated treatise 'Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus').

At a certain conference, Freudenthal spoke of his concept of a paradigmatic example. He took the idea from the method of teaching the grammar of a second language. A single, suitably chosen, model example is much more effective than abstract rules of declination (for example, in Latin, the declination of a masculine noun belonging to the second of the five classes of nouns is best taught by quoting a single example, say, dominus, domini, domino, dominum, domino, domine). Freudenthal argued that the use of paradigmatic examples is a worthwhile idea in mathematics education.

Another of his themes was the phenomenon of discontinuity in the learning of mathematics. Freudenthal gave some examples to the effect that learning is not a simple accumulation of knowledge; there may be certain conspicuous mental jumps, when the child suddenly understands something new (and is often so excited that he or she continues to think about it and speak to everybody about the discovery).

Freudenthal used to relate stories about the 'mathematical behaviour' of his grandchildren. These stories were always telling and very interesting. However, I sometimes heard critical comments of fellow participants at conferences to the effect that Freudenthal drew didactical conclusions from a sample of two children. My feeling was different; I believed that what Freudenthal was saying was actually based on much broader knowledge, but that he chose this vivid way of presenting his ideas rather than their scholarly exposition.

In 1975 I organized a symposium in Warsaw on the teaching of probability. One of the speakers was Freudenthal. He talked about an intriguing event in a classroom which he had recently visited. The children were to deal for the first time with some problems related to probability. At the beginning, they were shown a die and were asked the question: ‘Who has a greater chance of scoring 6: the teacher or a child?’. ‘The teacher’, was the children’s answer, and they appeared to be convinced of this. The answer was not commented on. The first task for the children was to cut pieces of cardboard and use glue to make cardboard cubes to be thrown later during the lesson. The children were clumsy, and Freudenthal was dissatisfied with the fact that so much time was spent before they could start doing the things that were the purpose of the activity. When the children were ready to throw the dice they were asked the same question: ‘Who has a greater chance of scoring 6: the teacher or a child?’. To Freudenthal’s surprise, the children answered that the chances were the same, and they behaved as if they had always been convinced of this. After his talk, I asked Freudenthal whether a written version of the story was available. He sat down in the afternoon and next day gave me a handwritten text, ready to be translated into Polish.

Freudenthal’s attitude towards mathematics education evolved considerably following his involvement with it. He later appeared to mistrust profoundly the general theories in mathematics education, especially if they made excessive claims or unjustified statements.
He brilliantly spotted misinterpretations, groundless assumptions, lack of coherence, and other weak points of such theories. In particular, in an appendix to his 1973 book, after paying a tribute to Piaget’s ‘wealth of work, his originality, not to say genius’, he gave a precise list of shortcomings in Piaget’s findings and his invalid conclusions. In his books Freudenthal rarely made explicit references to anybody’s work. This, and his criticism, may have caused reservations, and possibly even a reluctant attitude towards his work, on the part of researchers in the field, a reluctance not expressed openly because of his unquestionable prestige.

Freudenthal’s books, including his last book ‘China Lectures’(1991), are marked by great originality, and contain many deeply thought out ideas and well-presented material. However, they are not written in a scholarly style. They lack indices, and this makes it difficult even to retrace an item in the text. The language of his books is very rich, stimulating, and clear, but not always easy to read (and at times difficult to translate into another language).

I have learnt more from Freudenthal and from his writings about mathematics education than from anybody else.

Literatuur

Freudenthal, H. (1960). *Lincos - Design of a Language for Cosmic Intercourse.* Amsterdam: North Holland.
Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht: Kluwer.

Freudenthal als eerste redacteur van ‘Educational Studies in Mathematics’

Hans ter Heege
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Professor Freudenthals activiteiten en interessegebieden waren gevarieerd. In de laatste jaren van zijn leven handelen veel van zijn bijdragen over het onderwijs in rekenen-wiskunde.
In deze bijdrage ga ik in op Freudenthals rol in het ontstaan en de eerste jaren van haar bestaan van het gerenommeerde internationale tijdschrift voor (reken-)wiskundeonderwijs ‘Educational Studies in Mathematics’.

In de jaren zestig van de twintigste eeuw timmerde Freudenthal nationaal en internationaal aan de weg met zijn opvattingen over het leren van wiskunde door kinderen en jongeren.
Ik stelde me de vraag hoe Freudenthal tegen de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs in de wereld aankeek en welke betekenis hij in dit opzicht hechtte aan het tijdschrift ‘Educational Studies in Mathematics’ (ESM). Ik vond het belangrijkste deel van het antwoord in een artikel van Hanna en Sidoli in jaargang 50 van ESM, uit 2002, met de titel ‘The story of ESM’. Freudenthal was de oprichter en gedurende zeven jaar de eerste redacteur van dit tijdschrift. De genoemde auteurs hebben geprobeerd de visie van Freudenthal en zijn redactioneel beleid in kaart te brengen, onder meer door verschillende ‘medespelers’ uit die tijd en van later te interviewen. Hanna en Sidoli beschrijven veel meer geschiedenis dan alleen de Freudenthalperiode, maar ik zal me tot die delen uit hun artikelen beperken die over Freudenthal gaan, om een beeld te schetsen van de invloed die hij in de jaren zestig en zeventig van de twintigste eeuw op de internationale ontwikkeling van het (reken-)wiskundeonderwijs had.

In het midden van de vorige eeuw was het tijdschrift ‘L’Enseignement Mathématique’ al meer dan een halve eeuw het officiële tijdschrift van de ‘International Committee of Mathematics Instruction’ (ICMI). Het blad had zich in die jaren doen kennen als een tijdschrift dat voor wiskundigen interessant was. Er ontstond in de jaren zestig echter behoefte om meer aandacht te besteden aan het onderwijs in wiskunde. Op het Colloquium van het ‘International Congress on Mathematics Education’ (ICME) van 1964, waar over de modernisering van leerplannen in het voortgezet onderwijs werd gesproken, nam men een resolutie aan van de volgende strekking:

> Er is dringend behoefte aan meer informatie over verschillende activiteiten in diverse landen inzake de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs (in het voortgezet onderwijs). Deze informatie zou verspreid kunnen worden door een actief en toegankelijk internationaal informatiecentrum of door een gezaghebbend tijdschrift over wiskundeonderwijs.

Freudenthal pakte die handschoen op en nam het initiatief om een dergelijk tijdschrift te beginnen. Uitgever zou Reidel in Dordrecht worden. Het tijdschrift kreeg, op voorstel van de wiskundige P. Hilton, de naam ‘Educational Studies in Mathematics’. Om het blad te financieren, wendde Freudenthal zich tot de UNESCO, waarmee de ICMI na enige tijd een contract afsloot, waardoor het blad haar financiële basis kreeg.

In het eerste nummer van ESM, dat in 1967 verscheen, nam Freudenthal zijn openingslezing op, die hij uitsprak op het ICMI Colloquium van 1967, met de titel ‘Why to Teach Mathematics so as to be useful’ (Freudenthal, 1967). Daarin hij gaf in algemene termen zijn visie op wiskundeonderwijs weer. Hij betoogde in dit artikel dat wiskunde een bijzondere menselijke activiteit is en dat alle kinderen het recht zouden moeten hebben om wiskundeonderwijs te krijgen, wat geheel in overeenstemming was met de eerste van acht stellingen die in het jaar daaropvolgend op een conferentie van leraren in Lausanne werden geponeerd (‘Propositions on the Teaching of Mathematics’). Ook die stellingen werden in ESM gepubliceerd. Zij bevatten de kernideeën van Freudenthals beleid als redacteur van ESM, menen Hanna en Sidoli.
Om welke kernideeën gaat het? De auteurs noemen er vier:

1 dat wiskundeonderwijs er voor iedereen is;
2 dat het oogmerk van wiskundeonderwijs niet louter het verwerven van wiskundige kennis betekent;
3 dat wiskundeonderwijs continu herzien zal moeten worden;

4 dat het onderwijzen van wiskunde in verschillende landen kan profiteren van ontwikkelingen die in een enkel land kunnen worden gesignaleerd.

Freudenthal bleef gedurende tien jaar redacteur van ESM. Hij werd bijgestaan door een redactieraad van zeventien leden, merendeels uit Europese landen afkomstig, die hij in samenspraak met P. Hilton had gekozen. De rol die deze redactieraad speelde, is niet altijd duidelijk: Freudenthal bepaalde grotendeels zelf wat in het blad werd afgedrukt en wat niet. Daarover doen aardige anekdotes de ronde, die overigens zullen hebben bijgedragen tot de mythevorming rond Freudenthal. Hanna en Sidoli beschrijven het volgende voorval:

> ... when Geoffrey Howson submitted his first paper to ESM in 1973 on 'Charles Godfrey and the reform of mathematics education', a historical study, he was somewhat surprised to receive a reply from Freudenthal to the effect that: 'There are only two rules governing papers to be accepted for ESM. The first is that ESM does not publish papers on the history of mathematics or mathematics education. The second is that all rules can be changed'.

Het artikel van Howson werd geaccepteerd. (Howson, 1973).

Freudenthals redacteurschap kenmerkt zich door 'zijn autonomie' in de beoordeling van artikelen en in publicatie ervan. Daardoor kan men Freudenthals persoonlijke interesse voor bepaalde delen van de wiskunde, zoals de meetkunde, in het aantal geplaatste artikelen herkennen. De auteurs van het artikel 'The Story of ESM' menen niettemin dat dit tijdschrift in de jaren van haar bestaan een rijke bron aan innovatieve ideeën heeft opgeleverd voor academici (ontwikkelaars en onderzoekers) en voor leraren.

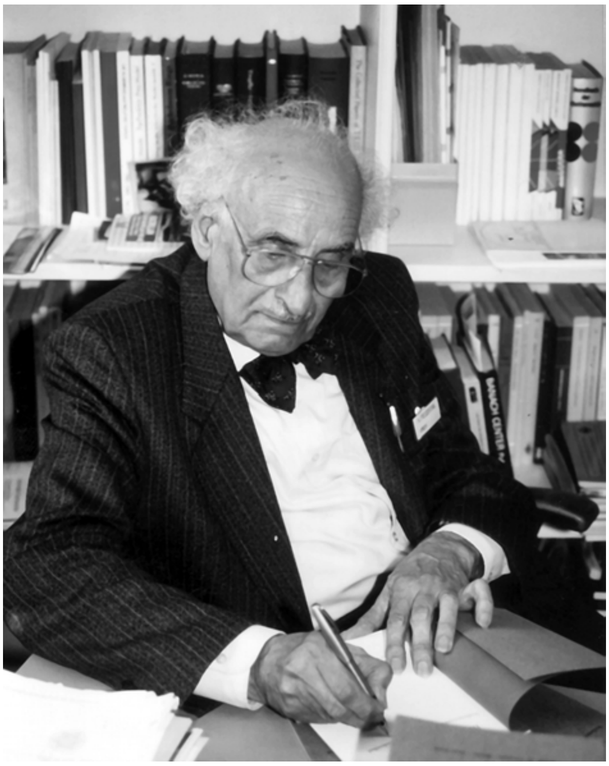
Literatuur

Freudenthal, H. (1967). Why to Teach Mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics, 1*, 3-8.

Hanna, G. & N. Sidoli (2002). The story of ESM. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 123-156.

Howson, G. (1973). Charles Godfrey and the reform of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 5*, 157-180.

Freudenthal was interested in awide variety of activities. He wrote many articles and papers on mathematics education, and became nationally and internationally famous for his ideas on young children's mathematics learning.
This contribution will commemorate Freudenthal's role in one of these aspects, namely the initiation of the international periodical 'Educational Studies in Mathematics' and the years in which he was the first editor of this journal.



Encounters with Hans Freudenthal

Christine Keitel
Freie Universität Berlin

Christine Keitel (Freie Universität Berlin) had a very personal relationship with Hans Freudenthal. We asked her to write down some of her memories and to focus on the significance of Freudenthal's ideas for today's mathematics education. Christine Keitel is one of the successors of Freudenthal as president of CIEAEM*, an international conference co-founded by Freudenthal in 1950.*

In 2005 we celebrate Hans Freudenthal's 100 years, and still today we feel the great void his death, fifteen years ago, has left. Hans Freudenthal was a most extraordinary man. The broadest range of mind and competence in mathematics and mathematics education, imbedded in a profound 'Bildung' he had absorbed in a good old German classical education, and a wonderful character, were united in him. As much as he felt privileged by being supported in his studies by the greatest scientist of that time assembled at the Berlin university, as much he did support younger colleagues later on. For me the greatest wonder was that he had come out of all the terrible experiences that he had endured under the Nazi regime, as a noble, thoroughly humane personality. His early career amidst the foremost avant-garde in mathematics, philosophy and science had been cut off. During the German occupation of the Netherlands he had lived in concealment under a permanent threat of discovery and death, finally in a labour camp with his death before his eyes. And yet, there was no bitterness, there was not the slightest reserve towards a German, there never was a moralizing attitude. Instead: a gentle, attentive person, showing warmth and sympathy to everybody who approached him, encouraging everybody by taking him or her seriously. The lesson he had chosen to learn from his former experiences seemed to be: education, helping to make mankind better than it had been. I never knew whether he believed in that as a possibility, or whether he took it as a duty without alternative.

In these days, when we read so much about Einstein, and when I try to figure out who and how Einstein may have been as a real person, it is always my image of Freudenthal which superposes my fiction.

When Freudenthal stated about school mathematics that 'mathematics is not a set of knowledge, mathematics is an activity, a habit, an attitude of mind' he just described how he practiced mathematics in his own work. His professional reasoning was never at rest, and it seems that whatever he encountered around him, professional discussions with colleagues, talks with children, or any trifle occurrence, he immediately and permanently related all this to the subject matter actually in hand. His openness and always alert attention granted him a particular gift of observation, and together with his fabulous memory furnished him an inexhaustible store of examples, illustrations, and, before all, inspiration for fresh and original ideas. I think that this was at the base of a characteristic feature of Hans Freudenthal, which all who knew him, loved and admired so much: his vivid, colourful, animated and animating speech. It goes without saying that his original thinking and proceeding did not fit in the tracks of scholarly conventions.

It actually occurred on my first personal encounter with Hans Freudenthal that I got a rich impression of these exciting features of his personality and his way of practising mathematics. And it enhanced excitement that it was a somewhat disastrous event: in 1975, the Department of Mathematics of the Freie Universität Berlin had invited Hans Freudenthal to give a lecture. Hans Freudenthal was famous among mathematicians because of his earlier mathematics research work, but they did not know much about his later fate and work. Many of them came, from Berlin and elsewhere in Germany. And Hans Freudenthal gave a full lecture about the wanderings with his grandson Bastiaan, at which occasions he used to explore the pre-mathematical thinking of a four year old child.

There were plenty of wonderful anecdotes. At the end, the professionals shook their heads, and more or less bluntly regretted that the formerly great man had so much degenerated to an ordinary grandfather. When the discussion was to start, there was a big silence. Maybe it was because the silence was so painful that I dared to put some questions to the speaker. Afterwards, at the informal part of the event, Hans Freudenthal insisted that I sit next to him in order to continue the discussion, and the German mathematics professors turned up their noses - and I enjoyed that Hans Freudenthal preferred a nobody to a more worthy company. Many years later when the 'Didactical Phenomenology of Mathematical Structures' was published, I was extremely surprised to find Hans Freudenthal to refer to our 1975 conversation, and how much he had taken me seriously (p.178).

Today it may be necessary to recall the state of affairs of mathematics education in those days: in Germany, enterprises in mathematics didactics were few and isolated within the borders of national traditions. The newly founded first supra-regional Institute of Didactics of Mathematics in Bielefeld had started to establish international contacts, but had not yet presented much of the recent international developments, and moreover the different working groups within referred to different theoretical perspectives and cooperation with the fields of practice was in the beginning. In general, subject matter didactics relied on petrified schemes and materials, their theoretical bases dating back to early in the century. Hans Freudenthal was absolutely international, and for somebody of his stature the contrast of self esteem and spiritual self-sufficiency of the professionals of the day were a constant annoyance, in particular if associated with presumptions insisting on scientific conventions and 'correctness'. Hence his acid response, which for somebody not concerned, I confess, was a source of greater pleasure.

Hans Freudenthal was very straightforward in his criticism, and lots of colleagues were seriously hit. But he himself very much liked to be critiqued, too, for his writings or ideas. When we met in 1975, we had already exchanged some letters, one about a book I had co-authored and which he sharply critiqued as hardly understandable because of its condensed style and abstract or theoretical focus. I also had sent him my review of the German edition of 'Mathematics as a pedagogical task' in a German journal, in which I had criticised him - but he liked it, because he was fond of being challenged! For him, cooperation, exchange and dispute of ideas, thoughts, findings, and views were central to his notion of mathematics education, and a prerequisite for its advancement - sharp confrontation just being part of it. His emphasis on cooperation and groupwork in the classroom actually mirrors this attitude.

1 Conferences

When during the last years of WWII the Nazis finally put Hans Freudenthal in a labour camp, he met there a few kindred souls, colleagues like Willy Servais, with whom he started doing maths, while teaching others, in order to forget the circumstances they had to live through. Already there the idea was born that doing maths can develop the mind of people into a rational and critical one that in the future could hinder political developments like the one they just passed through. The idea was to create organisations for regular meetings and societies supporting mathematics and mathematics education research by fostering exchange and research for the improvement of mathematics teaching and learning, thus contributing to the development of critical thinking and of self-determined rational minds by using mathematics. For Hans Freudenthal, then, it was only natural to participate in the re-founding of the International Conference on Mathematics education (ICME) and its regular congresses starting in 1969, and to become one of the driving forces to create the Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM) in 1950. He not only was its most active member, but also its president for many years. He also was most influential in the foundation of the Psycholgy of Mathematics Education (PME) in 1976, later he was assigned honorary membership. But his maybe most important and successful creation was the international journal 'Educational studies in Mathematics' for which he was founding editor and long term chief editor and ambitious and regular author of papers. This journal has definitely set standards in the domain, and, in my view, thanks to all editors later on succeeding Hans Freudenthal - has held its particular shape and strength.

I imagine that his experiences of the years of isolation during WWII had made community and communication a fundamental need in Freudenthal's life. I always knew him as a very gregarious man. If not always visible, he was the focus wherever he appeared on a convention - and yet it could happen to see him in a hall busy with people, standing alone and somewhat lost, with a shadow of melancholy about him. If then a familiar face turned up, he immediately seemed back in reality and at his ease. In 1985 CIEAEM and PME took place in the Netherlands, at Leiden and Noordwijkerhout respectively, and I took my five years old son Moritz with me. Hans Freudenthal knew Moritz nearly since he was born: at the age of three months Moritz had accompanied me to a meeting in Oberwolfach in Germany, and at the end he carried off a certificate about his - successful! - attendance, signed Hans Freudenthal. In Noordwijkerhout, Moritz adapted quite well to the conference situation, and when strolling through the halls in search of somebody speaking German, he came across Hans Freudenthal, and they became friends immediately. On our return we took Hans Freudenthal with us back to Utrecht. On the way, Moritz asked Hans Freudenthal, to my perplexity, whether he could not be his grandfather - Moritz had never known his grandfathers -, and Hans Freudenthal accepted. Since then, letters were exchanged against little drawings or cartoons which Moritz enthusiastically made for his grandfather. The last letter I received from Hans Freudenthal in September 1990 was addressed to Moritz and me. Hans Freudenthal looked forward to visiting Berlin and Luckenwalde, his birthplace nearby. And he announced that he would talk French with Moritz who meanwhile attended the Lycee Français of Berlin. A few weeks before his visit Hans Freudenthal died.

Hans Freudenthal's endeavour was to improve mathematics education in reality and practice, not as an ultimate theoretical edifice of impressive width and depth. He rather disliked 'grand theories'. It is obvious that for achieving his aim his writings and other theoretical work absolutely needed the complement of transformation into concrete classroom ideas and material, of verification in practice and feedback by those who worked with it. So, in accordance with what I said about Hans Freudenthal's trust in the benefits of cooperation, he early gathered research students, teachers, and collaborators around him. From this informal group evolved the Dutch research and development institute for mathematics education (IOWO) in 1971. This institute passed through phases of both great success and threat to its existence. In the 1980s the funding was cut down and the institute only survived because its network of cooperation had ever expanded, and so many school teachers applied its material most successfully. After that the name of the institute changed into OW&OC, and successively it came to provide the mathematics curriculum for all over the Netherlands and beyond. After Hans Freudenthal's death, the institute's name justly became the 'Freudenthal Instituut'.

2 A landscape of mathematics education

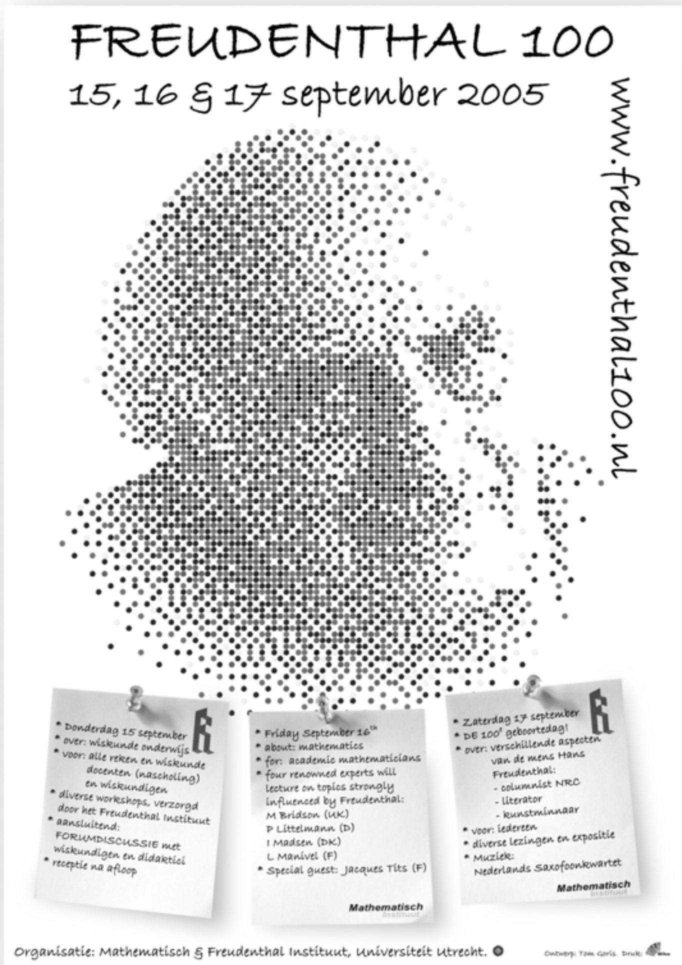
Instead of a closed system of theory and its application, which would suffocate classroom work in its always individual conditions, Hans Freudenthal's visions was a 'landscape of mathematics education', determined by a sort of landmarks, lighthouses, representing essential features of mathematics education research and practice, interwoven in a dense fabric of relationships among one another. These relationships however were not conceived of as fixed systematically, but open to adaptation to specific individual cases. Some of the most important of these focal points were the following:

- Mathematics as a human activity at different levels within the lived reality. This activity he described by general terms like mathematising, with the aspects of schematising, formalising, algorithmising, structuring, axiomatising;
- Didactical phenomenology as a way to describe mathematical ideas as being related to the phenomena to be mathematised;
- Learning mathematics as guided reinvention focusing on the constructive aspect of developing and learning mathematics,
- Learning activities articulated by levels: the activity at one level becomes, by reflection, subject matter at the next higher level;
- Representing reality didactically by rich contexts as starting point of mathematisation and development of mathematical concepts;
- Mediating mental objects towards concept attainment instead of abstract terminology;
- Mediating mathematical structures instead of transmitting the 'structure of mathematics';
- Retrospective and prospective learning;
- Meaningful sense making learning to serve sources of insight from being clogged by training as drill and repetitive practice;
- Developing positive attitudes towards mathematics with pupils and encouraging self-initiated mathematical activities;
- Didactising understood as a parallel to mathematising;
- Curriculum development perceived as a learning process of the researcher and developer;
- Mathematics for all and everybody taught and learned in heterogeneous groups using the variety of learning experiences and abilities to teach mixed ability groups.

Hans Freudenthal conceived of mathematics education as a living organism, integrating the demands of the focal points he had identified in a carefully balanced way according to the case and the learning situation. It was his genius to unite all this in appropriate, individual learning, to accommodate theory to practice and to keep his approach open to revision and evolution. This genius, of course, could not be preserved for long after his death. And the tremendous success - the Freudenthal Institute today is among the worldwide leading institutions of its kind - did not facilitate that task. That curriculum materials from the institute could be used as a starting point for PISA test items - nobody would have damned it more than Hans Freudenthal who was one of the first and very rare critical voices against the FIMS, the first international comparative study on mathematics achievement, uttered in his typical refreshing and explicitly harsh manner. Neither, the term 'realistic maths' which can be a trap for everybody and thus blurs Hans Freudenthal's own achievement certainly would not receive clemency in his eyes. But on the other hand, the improvement in mathematics education brought about by the Freudenthal Institute, and for a big part after Hans Freudenthal's death, is extremely valuable. It must not be underestimated - which might occur, since we tend to take this advancement for granted, and do not remember what the situation was before.

And, of course, the treasure of Hans Freudenthal's writings persists. Nothing in them is outdated, nothing has lost its fascination, nothing is better able to convey his original thoughts, and challenge our commitment.

Christine Keitel had een heel persoonlijke band met Hans Freudenthal. We hebben haar gevraagd een aantal memoires te schrijven met de nadruk op de betekenis die het gedachtengoed van Freudenthal heeft op het huidige wiskundeonderwijs. Christine Keitel is een van de opvolgers van Freudenthal als voorzitter van CIEAEM, een internationale conferentie mede opgericht door Freudenthal.



De ‘Kolommen’ van Freudenthal

- ordening als opgave -

Rob de Jong & Edu Wijdeveld

Zoals de ‘Zuilen van Hercules’ de ingang van de Middellandse Zee vormen, zo markeerden de ‘Kolommen’ van Freudenthal in de jaren zeventig de ontwikkeling van het rekendidactisch denken van de Wiskobasgroep. Het was niet zo dat Freudenthal de piketpaaltjes uitzette voor het inhoudelijk werk. Integendeel, hij haakte met zijn kolommen vaak in op actuele (interne) discussies en voegde er een wiskundige verdieping aan toe.

1 Inleiding

Van meet af aan schreef Freudenthal met toewijding zijn columns voor het ‘Vast Blok’ van het ‘Wiskobasbulletin’. Dit bulletin verscheen voor het eerst in november 1971 (jaargang 1, nummer 1) en voor het laatst in oktober 1980 (jaargang 9, nummer 6). In de tussentijd kende de formule weinig veranderingen. Het tijdschrift was opgebouwd uit drie blokken: het ‘Vast Blok’, het ‘Variabel Blok’ en het ‘Respons Blok’. Het Vast Blok kende een aantal vaste rubrieken, het Variabel Blok bevatte een weerslag van leerplanontwikkelingswerk en in het Respons Blok stonden de reacties van de lezers (vaak tips, aanvullingen en uitwerkingen). Destijds werd gekozen voor de titel ‘Kolommen’ omdat de pagina’s in twee kolommen waren opgemaakt. In deze eerste rubriek kreeg Freudenthal als columnist een grote vrijheid in de keuze en behandeling van zijn onderwerpen.
We noemen een viertal gezichtsbepalende rubrieken van het Vast Blok die het jarenlang hebben volgehouden, met hun auteur:

Kolommen	H. Freudenthal
Wiskunst	F. van der Blij
Problematika	H. Janssen
Basje, een jonge onderzoeker	D. Oort

Freudenthal en Van der Blij waren direct bereid om een column te schrijven. In zeker opzicht was het riskant. Immers, beide auteurs waren wiskundigen met een wereldnaam, terwijl het tijdschrift toegankelijk beoogde te zijn voor leraren (in opleiding). De wiskundige achtergrond van deze lezers was in het algemeen bescheiden. De garantie dat de tekst niet te ingewikkeld zou worden lag bij Freudenthal in zijn schrijftalent, in zijn originaliteit en in zijn vermogen om dichtbij het alledaagse te beginnen en al schrijvend een verdieping of verbreding te geven naar prachtige thema’s uit de wiskunde. De Kolommen handelden over uiteenlopende onderwerpen, met als doel - zoals Freudenthal in een van de columns schrijft: de lezer ‘door een kier te laten kijken in een chapiter van de wiskunde’ …. ‘in de hoop dat het naar meer smaakt’. Bij Van der Blij lag het anders. Hij kon de (beeldende) kunst met fraaie afbeeldingen als aanknopingspunt gebruiken.
Op de vraag van de redactie om weer een nieuwe Kolommen te schrijven, reageerde Freudenthal binnen een week met een kant en klare tekst, geschreven in een schoolschriftje en uitgetypt door een van de weinigen die zijn handschrift kon lezen: Do Breughel. Soms vroeg hij waar hij het over moest hebben, maar meestal niet. Hij heeft het ook tot de opheffing van het ‘Wiskobasbulletin’ volgehouden. In totaal: 33 Kolommen.[1] Nadien ging hij met een vergelijkbare rubriek door in het tijdschrift ‘Willem Bartjens’.[2]

2 Plaatsbepaling

Natuurlijk ging de eerste Kolommen over de ‘Band van Möbius’ (zie hierna). Dan, in zijn tweede Kolommen, een inhoudelijk uiterst belangrijk stuk, getiteld: ‘Plaatjes en Praatjes’. Dat is ook het geval met zijn derde bijdrage, getiteld: ‘Ontsporingen’. Genadeloos wordt hierin de verzamelingentaal uit de zogenaamde Moderne Wiskunde, zoals die zich manifesteert in een aankomende generatie reken-wiskundemethoden voor de basisschool aan de kaak gesteld. De verzamelingentaal met Venndiagrammen wordt daarbij afgedaan als dikdoenerij, die niks met wiskunde te maken heeft. Deze teksten hebben ongetwijfeld bijgedragen aan het feit dat de invoering van de ‘New Math’ in het Nederlandse basisonderwijs stagneerde.

Een voorbeeld uit jaargang 3 nummer 3. Op pagina 242 staat een pagina uit een basisschoolmethode met afbeel-

'Is dat moderne wiskunde?'

Het zijn mooie plaatjes. In het ouderwetse rekenonderwijs werd de juffrouw geacht de vraag te stellen 'hoeveel mieren zijn dit?', 'hoeveel vlinders zijn dit?' enzovoort, of algemener: 'hoeveel beestjes zijn dit?'

In het 'moderne' wiskunde-onderwijs op de basisschool luidt de vraag: 'Hoeveel elementen heeft de verzameling?' Wat is nu goed?

Doe dit boekje dicht en denk er zelf over na. Kijk, ontdek, maar denk ook na.

U weet zeker wat dikdoenerij is?

'Hoe gaat het met Pietje?' 'Hij bezoekt een instelling voor voorbereidend lager onderwijs.'

Ik heb niets tegen instellingen voor voorbereidend lager onderwijs, alleen noem ik ze, wanneer een van mijn kleinkinderen erop zit, kleuterscholen, anders zou het dikdoenerij zijn.

Als ik de hik heb, noem ik het niet 'singultus' hoewel het medisch zo heet, en als ik het licht uitdoe, zeg ik niet dat ik de stroomkring onderbreek. Mocht ik 'per benenwagen' reizen, dan weet u dat het dit keer grappig bedoelde dikdoenerij is.

Hoe is het nu met 'hoeveel beestjes zijn dit?' of 'hoeveel elementen heeft die verzameling?'

Hoe moet het? Mag de groenteboer nog vragen 'Hoeveel sinaasappelen had u gehad willen hebben?' of moet het zijn: 'Hoeveel elementen zijn er in de verzameling sinaasappelen die u gehad had willen hebben?'
Of misschien zelfs: 'Hoe groot is het kardinaalgetal van de verzameling der door u gewenste sinaasappelen?'

'Hoeveel elementen zijn er in de verzameling'

Wees gerust - ook bij Wiskobas blijft het: 'Hoeveel beestjes zijn het?' Al het andere is dikdoenerij en een groot deel van de zogenaamde moderne wiskunde die handige auteurs aan u trachten te slijten, is dikdoenerij, en met wiskunde - modern of niet modern - heeft het niets te maken. Laat u zich niet de stuipen op 't lijf jagen door auteurs die u willen vertellen, hoe het echt wiskundig moet en die het zelf niet weten.

Het is niet alleen dikdoenerij - het is gewoon fout.

U kunt van het aantal elementen van een verzameling spreken als er van een verzameling sprake is. Dit is in 't afgedrukte voorbeeld niet het geval. Als u het plaatje rechtsboven bekijkt dan ziet u daar 5 onzelieveheersbeestjes. U mag het wel als een verzameling van onzelieveheersbeestjes opvatten, die dan 5 elementen heeft, maar u mag er ook een verzameling ronde zwarte stippen in zien, die 10 elementen heeft, of een verzameling pootjes, met 30 elementen.

Een stapeltje van dit of dat is niet een verzameling, maar het wordt er een wanneer ik het als zodanig opvat en daarvoor moet ik duidelijk aangeven, wat de elementen ervan zijn. Is een suikerbus een verzameling? Neen, maar ik kan hem opvatten als een verzameling - van suikerklontjes, suikerkorreltjes, suikermolekulen.

Ik kan zoiets als verzameling opvatten - dit betekent niet dat ik het moet doen. Wanneer ik het zonder noodzaak doe, dan hoort dit weer in het chapiter 'dikdoenerij' thuis. Met verzamelingen kun je heel wat doen, bijvoorbeeld kunnen verzamelingtheoretische bewerkingen en afbeeldingen veel verhelderen. Ontbreekt die kontekst er, dan is het dikdoenerij, die spoedig zelfs tot fouten leidt.

figuur 1: Wiskobasbulletin, jrg 3 nr 3

dingen van miertjes, bijtjes, vlindertjes, lieveheersbeestjes, met de opdracht: Teken een kring om het getal, dat aangeeft hoeveel elementen elke verzameling telt (fig.1).

3 Inhoudelijke thema's

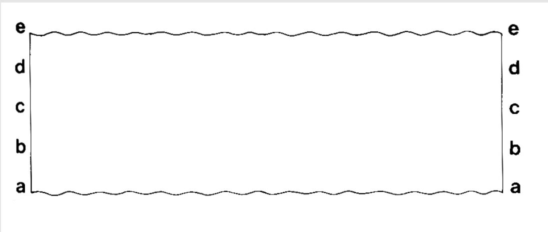
Zowel het rekenen als de meetkunde kwamen herhaaldelijk aan bod. Maar ook heel andere zaken als kansberekening, spelletjes, topologie, logica, over bewijzen, over correct gebruik van getallen en taal. In zijn wiskundig gerichte kolommen laat Freudenthal het meestal geheel aan de lezer over om daarvan in het onderwijs gebruik te maken. Anders is dat in die Kolommen, waarin hij zich rechtstreeks met onderwijszaken bemoeit. Een enkele maal om slechte onderwijsresearch of een slechte rekenmethode aan de kaak te stellen, andere keren om tekortkomingen in de rekendidactiek te signaleren, in de hoop dat daarin verbetering zal worden aangebracht.
Uit de verscheidenheid aan Kolommen, hebben we een drietal gekozen, die een indruk geven van de aard en intentie waarmee Freudenthal zijn bijdragen schreef.

4 De Möbius band

Deze Kolom - nog zonder titel - uit het eerste nummer van het Wiskobasbulletin van november 1971 (fig.2), handelt over de bekende band van Möbius, die het net opgerichte Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO) zich tot logo had gekozen (fig.3).
Die eerste bijdrage is meteen al karakteristiek voor de wijze waarop Freudenthal zijn (in meerderheid) wiskundig gerichte Kolommen aanpakt.

Het teken dat IOWO tot symbool heeft gekozen, is geen ornament, maar een meetkundige figuur. Wie moeilijkheden heeft om die figuur in 't juiste perspektief te zien, kan met een model ervan worden geholpen. Bij wiskundig ‘model’ stelt men zich gauw iets voor van papier, ijzerdraad of gips, maar als de wiskundige die term gebruikt, denkt hij veeleer aan abstraktere maaksels. Neem bijvoorbeeld de rechthoek hieronder (Fig. 1).

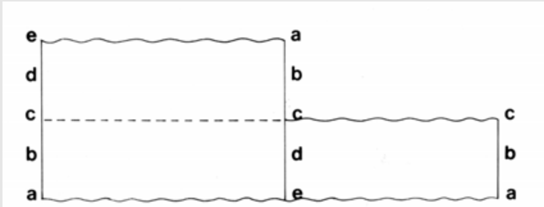
De twee opstaande zijden denk ik me aan elkaar geplakt, en de letters ernaast duiden aan hoe het moet geschieden: niet recht maar averechts. Ik zei ‘ik denk het aan elkaar geplakt’, maar men mag het ook echt doen (natuurlijk nadat men de rechthoek heeft uitgeknipt), en dan wordt het denkbeeldige model een echt konkreet model van wat ik abstrakt bedoelde en de letters ernaast duiden aan hoe het moet geschieden: niet recht maar averechts.



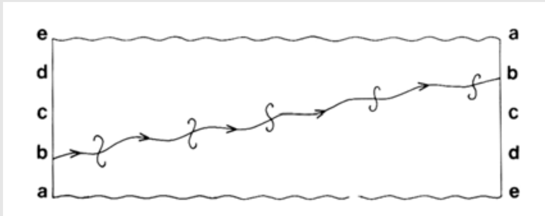
Plakten we de twee opstaande zijden gewoon, recht aan elkaar, dan (Fig. 2) ontstaat er een ring, ook cilinder genaamd, waaraan niet zoveel te beleven is. Doet men het, zoals we net deden, averechts, dan wordt het wat men een lint van Moebius noemt (naar een 19-eeuwse meetkundige). Een cilinder heeft twee randkrommen, boven en beneden. Een Moebius-lint heeft er, vreemd genoeg, maar één. De twee horizontale zijden van de rechthoek, die samen de rand voorstellen, vormen één stuk; immers als men onderaan van a links naar e rechts is gelopen, is men door de wijze van samen plakken bij de e boven links aangekomen om zijn weg naar boven rechts te vervolgen, waar men bij a aangekomen meteen weer tevens bij a links onderaan is.

Nog een verschil tussen de cilinder en een Moebius-lint: Geef er een knip in en wel langs de horizontale lijn die van c links naar c rechts loopt. De knip is een gesloten kromme, omdat door de wijze van plakken beide c hetzelfde zijn. Het lijkt nu of de figuur in twee stukken uiteenvalt: de smalle rechthoek boven en de smalle rechthoek onderaan. Voor de cilinder klopt dit ook, alleen moet je elk van die twee rechthoeken weer als een cilinder zien, wel te verstaan half zo hoog als de oorspronkelijke.
Met een Moebius-lint is het heel anders gesteld. Wat eruit ziet als twee rechthoeken zit aan elkaar: neem maar de bewuste rechthoek en leg hem rechts naast de onderste neer zodat aan de voorschriften van het knippatroon is voldaan (Fig. 3), d.w.z. wentel hem eerst om de stippellijn alvorens hem naar rechts op te schuiven.

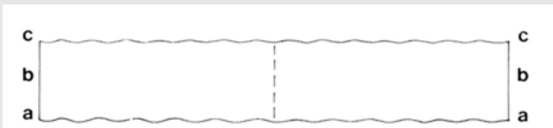
Wat is de uitkomst? Niet twee cilinders van halve hoogte, maar één cilinder van halve hoogte en dubbele omtrek. Een vreemd geval! Een Moebius-lint valt door een gesloten knip niet in twee stukken uiteen.



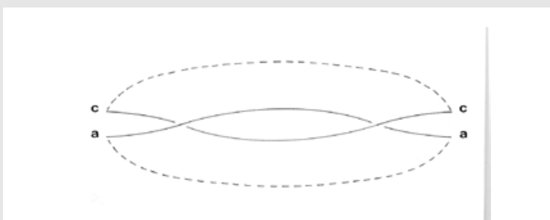
Neem een letter S, leg hem op het Moebius- lint en ga er op het Moebius-lint mee op reis (Fig. 4). Na een rondreis is de S in zijn spiegelbeeld veranderd.

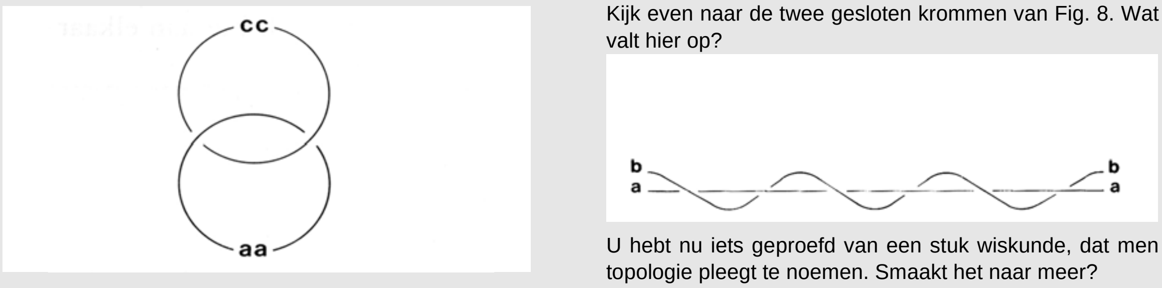


Tot dusverre konden we het met het vlakke model van het Moebius-lint doen: voor wat nu volgt, moeten we het denkbeeldige plakken in de ruimte uitvoeren. Men vervolge op dit ruimtelijk model - de horizontale lijn van c links naar c rechts. Ook op het ruimtelijk model is die lijn gesloten, maar als men hem doorlopen heeft, bevindt men zich ineens op de andere zijde van ons Moebius-lint, of beter gezegd: zo'n Moebius-lint heeft maar één zijde, niet twee zoals een cilinder. Het Moebius-lint behoort tot de eenzijdige oppervlakken (er zijn er meer van dan alleen het Moebius- lint).
Nog iets: geef er nu weer de knip in, van c naar c, zoals daarstraks. We weten al wat er ontstaat: één cilinder uit één stuk - abstrakt gezien tenminste. Konkreet is het een beetje meer genuanceerd. Om een Moebius-lint te plakken moeten we de uitgeknipte strook een halve slag wringen en dientengevolge zit er in de ring, die na het knippen is ontstaan, een hele slag. Het is een rechthoek waarvan ik de opstaande zijden met een hele slag recht aan elkaar heb geplakt (Fig. 5). Let nu op de twee randkrommen, d.w.z. de horizontale zijden van a naar a en van c haar c.



Beiden zijn gesloten krommen, maar hoe liggen ze in de ruimte tot elkaar? Kijk naar Fig. 6 en denk erom dat a aan a en c aan c is geplakt. Dit leidt tot Fig. 7. (Probeer het bijvoorbeeld met twee veters.) Het is een paar met elkaar 'geschakelde' krommen, twee gesloten krommen die men niet uit elkaar kan halen, zonder één hunner te verbreken. Ze zijn enkelvoudig geschakeld.



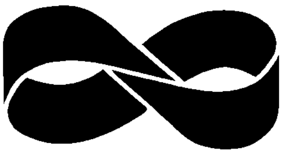


Kijk even naar de twee gesloten krommen van Fig. 8. Wat valt hier op?

U hebt nu iets geproefd van een stuk wiskunde, dat men topologie pleegt te noemen. Smaakt het naar meer?

figuur 2: Wiskobasbulletin, jrg 1 nr 1

Aan de hand van een grote variatie aan voorbeelden uit rekenen, meetkunde, getaltheorie, enzovoort, wordt de lezer op elementair niveau een (vaak verheven) blik gegund in de keuken van fundamenteel wiskundig denken. Daarbij laat Freudenthal met zijn 'verhalende' verteltrant duidelijk blijken dat hij zich goed bewust is van zijn (in principe) non-mathematische doelgroep. Hij neemt de lezer als het ware bij de hand, om hem al mathematisch-filosoferend met een 'kijk eens zo' en 'kijk eens zus', ogenschijnlijk simpel en logisch door het mathematische landschap van zijn keuze te leiden. Maar schijn bedriegt, want tegelijkertijd wordt van diezelfde lezer vaak heel wat denkkracht, inbeeldings- en doorzettingsvermogen, vereist. En Freudenthals verhandeling over de Möbiusband is daarvan een duidelijke illustratie.



figuur 3

Immers, niet een concrete Möbiusband met zijn verrassende topologische structuur vormt uitgangspunt van zijn beschouwing, maar een abstract model aan de hand van een 'constituerende' rechthoek. Niet de band op zich is doel, maar juist het mathematiseringsproces waartoe hij aanleiding geeft. Het gevolg is wel, dat de lezer die onbekend is met die eigenschappen van de Möbiusband, behoorlijke moeite zal hebben met het proces van mentaal plakken en knippen.
De tekst volgend ziet men als het ware Freudenthal voor zich, die voor de gelegenheid zijn abstracte denkproces over de Möbiusband met een paar krabbels 'achteloos' op papier zet, om die vervolgens ten behoeve van het Wiskobasbulletin in 'logisch volgorde' uit te werken. Elementaire wiskunde, op hoog niveau!

5 Hoe weet je dat?

Met het voortschrijden van de jaargangen van het Bulletin, maakte Freudenthal in zijn Kolommen meer en meer gebruik van de (onderwijskundige) ervaringen, die hij binnen en buiten het IOWO opdeed. Daarbij kon hij putten uit jarenlange mathematisch-didactische discussies in de wekelijkse kadervormingsbijeenkomsten van het IOWO, waaraan hij overigens zelf in belangrijke mate bijdroeg. Ook zijn regelmatige bezoeken aan respectievelijk de ontwerp-(lagere)school in Arnhem en de ontwerp-Pabo in Gorcum bleken voor hem een rijke bron van inspiratie, evenzeer als zijn gesprekken met de kleinkinderen, neergelegd in zijn 'Wandelingen met Bastiaan'. Vaak betroffen dat kleine, subtiele waarnemingen, waaraan fundamentele mathematisch-didactische beschouwingen gekoppeld konden worden.
Zoals bijvoorbeeld die keer dat Bastiaan op een (meetkundig getinte) vraag van opa antwoordde 'Ik zie het zo'. Voor Freudenthal - maar zeker niet voor hem alleen - aanleiding om voortdurend aandacht te vragen voor 'intuïtief' en inleidend meetkundeonderwijs in die gevoelige lagereschoolperiode. Zelf-reflecties - alweer een gevleugeld begrip binnen het IOWO - lagen aan die observaties ten grondslag. En graag laten we Freudenthal nu in zijn Kolommen aan het woord over zijn reflecties ten aanzien van een van die observaties.
Op de Juliana van Stolberg PA te Gorcum vraagt hij een student hoe je een vierkant zou kunnen verdubbelen, met als effect dat hij daar zelf het meest van leert … (fig.4).

6 Negenproef

In een aantal gevallen kiest Freudenthal 'rekensnufjes' tot uitgangspunt van wiskundige beschouwing. Dat de negenproef daarvan 'de meest bekende' zou zijn kan men betwijfelen, maar dat is niet van belang (fig.5).
Ook in deze kolom immers, biedt die negenproef weer aanleiding tot specifiek wiskundige beschouwingswijzen als verbreding, veralgemenisering en abstrahering. 'Van een hogere wacht is het laag-bij-de-grondse beter te overzien', stelt Freudenthal elders, al zullen sommige van zijn lezers ook nu weer moeite hebben die Olympus te beklimmen. Overigens sluit Freudenthal met het gebruik van de abacus op verrassende wijze aan bij de actualiteit van het moment en eindigt hij vergelijkbaar met een mooie testvraag uit het toen vigerende 'Land van acht'.

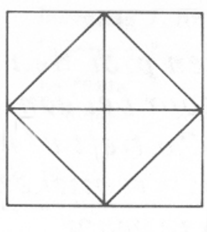
HOE WEET JE DAT?

'Hoe weet je dat?' Een vraag waarop het antwoord zou kunnen luiden: 'uit de krant'. Of: 'de meester heeft het gezegd'. Of: 'ik zie het zo'. Of: 'zomaar'. En al die antwoorden kunnen goed zijn ~ het hangt van de situatie af -. Ook op de vraag '8 + 5 is ...?', kan het antwoord - goed of slecht - aanleiding geven tot doorvragen: 'hoe weet je dat?'. Natuurlijk is het antwoord dan niet 'uit de krant' en vermoedelijk ook niet 'van de meester'. Maar 'ik zie het zo' kan best deugen - je hebt van die kinderen, en het zijn er niet weinig, die het optellen voor hun geestelijk oog zien gebeuren -. Ook 'zomaar' kan - ze weten het al van buiten -. Maar dan kun je verder vragen: 'hoe ben je het ooit te weten gekomen?'. En misschien herinneren ze zich hoe ze het deden toen ze het nog niet van buiten wisten, bijvoorbeeld met doortellen of bij wijze van (8 + 2) + 3.

'Hoe weet je dat?', kun je jezelf soms ook vragen, en in alle gevallen vereist het antwoord een wroeten, een zelfonderzoek. Ineens weet je iets, het lijkt een ingeving, maar dan ben er nog niet, want wat je zelf weet, moet je kunnen uitdragen, je moet er anderen van kunnen overtuigen, en die kunnen aan jou weer de vraag stellen: 'hoe weet je dat?'

verdubbelen of halveren

De oudst bekende wiskundeles, en trouwens de oudste les waarover we iets weten, is bij Plato, waar Socrates zijn leerling, de slaaf van Menon, een vierkant laat verdubbelen - een echt socratische les -. Na die vaak nagebootst te hebben, ben ik uiteindelijk bij de manier terecht gekomen om dit didaktisch aan te pakken. Niet verdubbelen, maar halveren!
Ik heb het inmiddels vele malen geprobeerd. Een zakdoek of een papieren servet laten plooien dat er een vierkant met de helf van die oppervlakte ontstaat. Natuurlijk is het eerste dat geprobeerd wordt, het vierkant evenwijdig met een van de zijden te vouwen maar meteen is overduidelijk dat de uitkomst geen vierkant is. Na dit eerste onvermijdelijk wansukses hebben ze het spontaan of vrij spontaan, gauw te pakken - zes- tot achtjarigen -: de slippen van zakdoek of servet naar het midden vouwen en het is voor elkaar: een half zo groot vierkant. Een vierkant halveren is gemakkelijker dan het verdubbelen, omdat je dan de oorspronkelijke figuur niet te buiten hoeft te gaan, maar heb je een keer het halveren door, dan is het verdubbelen ook geen moeite.



Maar hoe weet je dat? Ik bedoel, dat de gevouwen figuur weer een vierkant is en dat het de helft van het oorspronkelijke is. Zou iemand die vraag stellen? Je ziet het immers zo. Wat zie je dan? Je hebt de zakdoek maar slordig gevouwen, geen uitgestreken plooien, en als je het gevouwen papieren servet nader bekijkt blijken de randen niet zo netjes aan elkaar te sluiten als eigenlijk zou moeten. Je weet het omdat je het ziet, maar wat je feitelijk ziet wordt door je verstand gekorrigeerd. Je ziet het als het ware met je geestelijk oog.

weerspiegelen

'Ik zie het zo', is een goed antwoord, waar je toch op door mag vragen: 'hoe weet je dat dit allemaal zo mooi op elkaar aansluit?' En met het beantwoorden van deze vraag begint het probleem. Want om te weten te komen, hoe je iets weet, moet je bij jezelf te rade gaan, je moet reflekteren over wat je zelf doet en denkt. Ik zeg 'reflekteren', hetgeen woordelijk 'weerspiegelen' betekent: je moet jezelf in de spiegel zien, om je je gedachten bewust te maken.

Iets dergelijks geldt ook voor wie een ander wil helpen bij het beantwoorden van de vraag: hoe weet je dat?' Hij moet de gedachte van de ander trachten te weerspiegelen, zich in de ander verplaatsen, zeg je ook. Voor wie met sukses meetkunde op school heeft geleerd, is het een koud kunstje om te bewijzen dat de opgevouwen zakdoek weer een vierkant en de helft van het oorspronkelijke is. Hij heeft termen als kongruentie en stellingen over evenwijdige lijnen paraat, om er een sluitende redenering van te maken. Hij kan het de ander voorredeneren en het hem laten naredeneren. Een koud kunstje. Maar als je niets van meetkunde afweet, hoe weet je het dan? Je zíet immers, dat de opgevouwen zakdoek weer een vierkant is en de helft van het oorspronkelijke. Je bent er ook zonder redeneren van overtuigd. Hoe? Dit is zo moeilijk te achterhalen, omdat je op school geleerd hebt, het ook nog te beredeneren.

gewoon doen

Laten we proberen gewoon te doen. Het gaat over vierkanten. Wat is dat, een vierkant? Een vierhoek, en wel een heel bizondere, een regelmatige. Regelmatig - wat is dat? Hij ziet er aan alle kanten eender uit, hij past op zichzelf, als je hem draait, vier keer, bij elk van de vier hoekpunten. Je haalt bij elk hoekpunt een slip over, bij elk hoekpunt dezelfde slip, dus wat er ontstaat, is een figuur die dezelfde regelmatigheden vertoont als de oorspronkelijke kant - een vierhoek - die je weer vier keer op zichzelf kunt leggen, dus weer een vierkant. De helft van het oorspronkelijke, want met dat overslaan van de slip heb je wat eronder ligt, verdubbeld.
Zou je zo redeneren? Symmetrieën spelen een grote rol in al hetgeen je 'zo ziet' en waarvan je je afvraagt: 'hoe weet je dat?'

andere voorbeelden

Een ander voorbeeld. Probeer het zelf!
Een gesloten touw loopt glijdend over de hoekpunten *a, b, c* van een gelijkzijdige driehoek en vormt er dus de omtrek van. Deze omtrek is in drie gelijke stukken verdeeld door middel van de punten *p, q, r*, waar lusjes aan het touw vastzitten, en door de lusjes bij *p, q, r* loopt een gesloten elastiek. Hoe je het touw ook over de omtrek van de driehoek abc beweegt, de lussen bewegen mee en de elastieken driehoek *pqr*, variërend van afmeting, is en blijft eveneens een gelijkzijdige driehoek.
Waarom? Je ziet het zo. Maar hoe weet je dat?

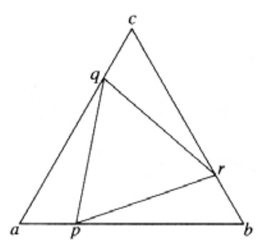
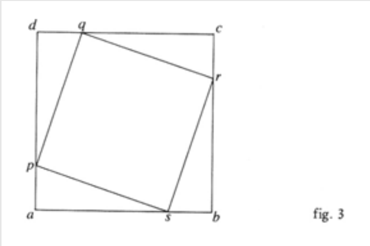


fig. 2

Je mag hetzelfde ook met een vierkant doen. De vaste punten *a, b, c, d* vormen een vierkant; het touw, dat om *abcd* als omtrek loopt, is in vier gelijke delen verdeeld, met lusjes bij *p, q, r, s* en door de lusjes loopt weer een gesloten elastiek. De variabele figuur *pqrs* is weer een vierkant.



Misschien doet de laatste figuur u ergens aan denken. Kijk naar de oppervlakten:

$$\begin{aligned}\overline{pq}^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{2}\overline{ap} \cdot \overline{as} &= (\overline{ap} + \overline{pd})^2 \\ &= \overline{ap}^2 + 2\,\overline{ap} \cdot \overline{pd} + \overline{pd}^2.\end{aligned}$$

Schrap de tweede summand rechts en links tegen elkaar weg en je krijgt:

$$\overline{pq}^2 = \overline{ap}^2 + \overline{pd}^2$$

Een welbekend bewijs van de stelling van Pythagoras.

figuur 4: Wiskobasbulletin, jrg 8 nr 1

NEGENPROEF

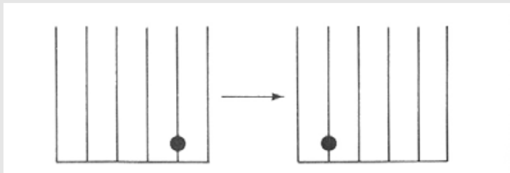
Van alle rekensnufjes is de negenproef wel het meest bekende. Het treft me steeds weer dat maar heel weinigen weten wat erachter zit en dat van de rest weer slechts enkelen de behoefte gevoelen erachter te komen. De negenproef wordt klaarblijkelijk door de meesten gezien als een soort natuurverschijnsel, zoals de dagelijkse opgang van de zon of als een technisch wonder, zoals het geluid uit de ether als je de radioknop omdraait.

getal en cijfersom

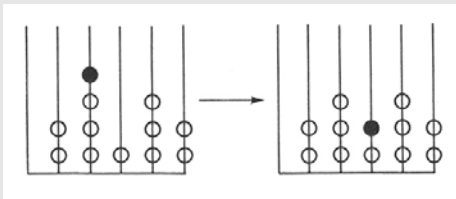
Voor wie is dit stuk geschreven? Voor hen die een aanmoediging nodig hebben om de negenproef als een serieus stuk wiskunde te beschouwen, én voor hen die een steun behoeven om anderen daartoe aan te moedigen.
U weet natuurlijk waar het om gaat: om te weten of een getal door 9 deelbaar is, tel je zijn cijfers op; is de cijfersom door 9 deelbaar dan is het getal zelf ook door 9 deelbaar - en omgekeerd. Praktisch iedereen in onze streken weet het en praktisch niemand kan het 'waarom' iets schelen.
Als je het waarom van iets wilt inzien, verdient het - althans in de wiskunde - vaak aanbeveling het probleem uit te breiden, een meer algemene vraag aan de orde te stellen.
Neem het getal 27316478. De cijfersom is 38, dus niet door 9 deelbaar. Bij deling door 9 vertoont 38 de rest 2. Deel nu het gegeven getal door 9; ook dan blijkt de rest 2 te zijn. De uitbreiding waar ik op doelde, lukt.
Bij deling door 9 laten een getal en zijn cijfersom dezelfde rest. Het deelbaarheidskenmerk dat ik zo-even formuleerde, is hiervan een speciaal geval, te weten dat waarbij de rest 0 is. Ook het kenmerk van deelbaarheid door 3 is er een speciaal geval van. In plaats van: ... is deelbaar door 3, kun je immers ook zeggen: ...laat bij deling door 9 de rest 0,3 of 6 zijn en dat moet dan gelijkelijk opgaan voor een getal én zijn cijfersom.

abakus

Hoe nu het hierboven kursief gedrukte te laten inzien? Of laat ik wagen: hoe het handtastelijk te maken? Pak, wiskobasgewoonten getrouw, een abakus. Zet er ergens een kraaltje op. Het kan me niet schelen op welke beugel: 1, 10, 100, 1000, ... of wat dan ook. Wat valt u op?



Paarsgewijs scheelt dit soort getallen zoiets als 9990, dat wil zeggen: iets dat door 9 deelbaar is. Anders gezegd: al deze getallen laten bij deling door 9 dezelfde rest, te weten 1. Dus: *Als ik een kraal van de ene beugel naar de andere verplaats, blijft de rest na deling door 9 onveranderd.*
We veronderstellen tot hier toe dat er maar één kraal op de hele abakus zit. Maar stel nu dat er al heel wat kralen op de abakus zitten en ik verplaats er een:



Het getal dat door de witte kralen wordt aangeduid laat een zekere rest na deling door 9 (in het onderhavige geval 2). De zwarte kraal die ik verplaats, levert een bijdrage tot de rest (te weten 1) die door de verplaatsing niet verandert. Dus verandert de rest bij deling door 9 in het geheel niet. Wat ik zonet kursief heb laten drukken, blijft gelden als er meer dan één kraal op de abakus zit. En met dit inzicht gewapend, maken we schoon schip. Gegeven een getal op de abakus: we verplaatsen de ene kraal na de andere naar de beugel van de eenheden. Het oorspronkelijke getal en hetgeen nu op de beugel van de eenheden zit, laten dan dezelfde rest bij deling door 9. Maar op de beugel der eenheden zit juist de cijfersom van het gegeven getal. En hiermee is het gestelde bewezen: *Bij deling door 9 laten een getal en zijn cijfersom dezelfde rest.*

meer wiskundig

Meer wiskundig ingekleed: *a* en *b* laten bij deling door 9 dezelfde rest, wordt in wiskundetaal ook geschreven:
$a \equiv b$ mod 9 (lees: a kongruent b modulo 9).
Deze kongruentierelatie is wat men wiskundig een ekwivalentie noemt:
$a \equiv a$ mod 9;
als $a \equiv b$ mod 9, dan ook: $b \equiv a$ mod 9;
als $a \equiv b$ mod 9 en $b \equiv c$ mod 9, dan ook: $a \equiv c$ mod 9;
zoals gemakkelijk is na te gaan.
Er geldt echter nog meer en daar hebben we boven in het bewijs - een beetje stiekum - gebruik van gemaakt. Wat betekent dit eigenlijk: *a* laat bij deling door 9 de rest *r*?
Ik kan het ook anders zeggen: *a* is een negenvoud plus r.
Of anders: $a \equiv 9q + r$; waarvan *q* het kwotiënt en *r* de rest is.
Neem nu nog een *b* met dezelfde rest *r*, dus:
$b \equiv 9m + r$.
Trek de twee vergelijkingen van elkaar af en je ziet de *r* wegvallen en houdt een negenvoud over. Dus:
$a \equiv b$ mod 9; is hetzelfde als:
$a - b$ is een negenvoud.
Je mag derhalve in:
$a \equiv b$ mod 9; links en rechts hetzelfde optellen:
$a + c \equiv b + c$ mod 9; is ook juist, want het verschil van $a + c$ en $b + c$ is hetzelfde als van *a* en *b*.
(Van dit feit hebben we gebruik gemaakt toen we op de abakus aan het 'witte' een 'zwart' getal toevoegden.)
Je kunt nog verder gaan. Als:
$a \equiv b$ mod 9;
$c \equiv d$ mod 9;
dan ook:
$a + c \equiv b + d$ mod 9;
en evenzo met zoveel summanden als je maar wenst. Dat is iets waarvan je gebruik maakt als je de negenproef van een proef op de som toepast, bijvoorbeeld voor een optelsom: de cijfersom van de summanden optellen en met die van de som vergelijken.

kenmerk van deelbaarheid

En nu nog eens terug naar het kenmerk van deelbaarheid door 9!

$10^i - 1$;

is een getal met alsmaar negens als cijfers, dus een negenvoud. Of anders:

10^i ½ 1 mod 9.

Gegeven een getal met achtereenvolgens van rechts naar links de cijfers:

$a_0, a_1, ..., a_n$

Dus feitelijk het getal:

$a_0.1 + a_1.10^1 + a_2.10^2 + ... + a_n.10^n$

En dat is dan:

$\equiv a_0 1 + a_1 1 + a_2 1 + ... a_n.1$

kortom met de cijfersom:

$a_0 + a_1 + a_2 + ... a_n$

land van acht

Hoe zit het in andere talstelsels? Bijvoorbeeld in 'Het land van acht'? Wie speelt dan de rol van de 9? Iets om over na te denken.

figuur 5: Wiskobasbulletin, jaargang 9 nummer 6

7 Slotbeschouwing

U heeft uit de drie voorbeelden een indruk kunnen krijgen van de veelzijdigheid van Freudenthals talent. In vrijwel alle kolommen laat Freudenthal de lezer kennismaken met interessante thema's uit wiskunde en didactiek. Achteraf gezien lijkt het er haast op, of hij uit zijn kennisbestand en ervaring onderwerpen bij de kop neemt, als ware het een grabbelton.
Ogenschijnlijk had hij daarmee nog wel jaren door kunnen gaan. Maar juist om die veelzijdigheid en originaliteit én omdat vele van zijn columns nog niets aan actualiteit hebben ingeboet, zou het jammer zijn als zijn Kolommen in de vergetelheid zouden geraken.
Zou het niet een aardig idee zijn om ter gelegenheid van Freudenthals honderdste geboortedag zijn columns in het 'Wiskobasbulletin' en in 'Willem Bartjens' tot een boekje te bundelen?[3] Welke uitgever en/of vereniging durft die handschoen op te rapen ….?

Noten

1 Freudenthal, H. (1971). Möbiuslint, Kolommen, *Wiskobasbulletin, 1*(1), 3 e.v.
Freudenthal, H. (1972). Plaatjes en Praatjes, *Kolommen, Wiskobasbulletin, 1*(2/3), 99 e.v.
Freudenthal, H. (1972). Ontsporingen. *Wiskobasbulletin, 1*(4), 243 e.v.
Freudenthal, H. (1972). Exponentiële Groei. *Wiskobasbulletin, 1*(5), 355 e.v.
Freudenthal, H. (1972). Gelijke monniken, gelijke kappen. *Wiskobasbulletin, 2*(1), 491 e.v.
Freudenthal, H. (1973). Windstoten van 162 km per uur. *Wiskobasbulletin, 2*(2), 615 e.v.
Freudenthal, H. (1973). 'Hij is míjn broer'. *Wiskobasbulletin, 2*(3), 175 e.v.
Freudenthal, H. (1973), Eerlijk spel, *Wiskobasbulletin, 2(*4/5), 827 e.v.
Freudenthal, H. (1973). Rekenen, dat moeilijke vak. *Wiskobasbulletin, 2*(6), 971 e.v.
Freudenthal, H. (1973). Spelletjes. *Wiskobasbulletin, 3*(1), 4 e.v.
Freudenthal, H. (1974). Wiskobas. *Wiskobasbulletin, 3*(2), 104 e.v.
Freudenthal, H. (1974). Een kaartkunstje met een wiskundig staartje. *Wiskobasbulletin, 3*(3), 208 e.v.
Freudenthal, H. (1974), Tafels van vermenigvuldiging. *Wiskobasbulletin, 3(*4/5), 312 e.v.
Freudenthal, H. (1974). De grootst mogelijke - de kleinst mogelijke. *Wiskobasbulletin, 3*(6), 456 e.v.
Freudenthal, (1974). H. Er zit muziek in. *Wiskobasbulletin, 4(*1), 4 e.v.

Freudenthal, H. (1974). Allerhande rond Fibonacci. *Wiskobasbulletin*, *4*(2), 100 e.v.
Freudenthal, H. (1975). Breuken en driehoeken. *Wiskobasbulletin*, *4*(3/4), 231 e.v.
Freudenthal, H. (1975). Waar gaat meer in? *Wiskobasbulletin*, *4*(5), 364 e.v.
Freudenthal, H. (1975). Listen en lagen van het kansbegrip. *Wiskobasbulletin*, *4*(6), 488 e.v.
Freudenthal, H. (1975). De snelste langzaam rijdende file. *Wiskobasbulletin*, *5*(1), 2 e.v.
Freudenthal, H.(1975). G.G.D. *Kolommen*, *5*(2/3), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1976). Een kleurloos kleurenprobleem. *Wiskobasbulletin*, *5*(4), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1976). De toren van Babel. *Wiskobasbulletin*, *5*(5/6), 4 e.v.
Freudenthal, H. (1976). Van ’t zelfde. *Wiskobasbulletin*, *6*(1), 3 e.v.
Freudenthal, H. (1977). Twee werklieden. *Wiskobasbulletin*, *6*(3), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1977). Pythagoras. *Wiskobasbulletin*, *6*(5/6), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1978). Het midden van ... *Wiskobasbulletin*, *7*(4), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1978). Hoe weet je dat? *Wiskobasbulletin*, *8*(1), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1979). Tovenarij? Neen, wiskunde. *Wiskobasbulletin*, *8*(2), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1979). Hetzelfde is niet hetzelfde. *Wiskobasbulletin*, *8*(3), 2 e.v.
Freudenthal, H. (1979). Stuivertje wisselen. *Wiskobasbulletin*, *8*(4), 4 e.v.
Freudenthal, H. (1980). Zon en maan. *Wiskobasbulletin*, *9*(4/5), 20 e.v.
Freudenthal, H. (1980). Negenproef. *Wiskobasbulletin*, *9*(6), 2 e.v.

2 Freudenthal, H. (1981). Roltrappen. *Willem Bartjens*, *1*(1), 3-4.
Freudenthal, H.(1981). Wat is er met het aftrekken aan de hand, *Willem Bartjens*, *1*(2), 74 e.v.
Freudenthal, H. (1982). Ik was moeder en ik doe boodschappen. *Willem Bartjens*, *1*(3), 131-133.
Freudenthal, H. (1982). Studentenhaver Willem Bartjens, 1(4), 214-215.
Freudenthal, H. (1982). Ganzenborden - andersom. *Willem Bartjens*, *2*(1)1, 18-19.
Freudenthal, H. (1983). Dat zie je toch zó! *Willem Bartjens*, *2*(2/3), 93-96.
Freudenthal, H. (1983). Ga eens even schatten. *Willem Bartjens 2*(4), 186-190.
Freudenthal, H. (1984). Appels en peren - wiskunde en psychologie. *Willem Bartjens*, *3*(1), 60-65.
Freudenthal, H. (1984). Memoriseren. *Willem Bartjens*, *3*(2), 124-125.
Freudenthal, H. (1984). Het is niet alles botertje tot ‘de rekenboom’. *Willem Bartjens*, *4*(2), 88-91.
Freudenthal, H. (1985). In het perspectief van het Vbao, *Willem Bartjens*, *4*(3), 188-190.
Freudenthal, H. (1986). Waarom is 4 < 9? *Willem Bartjens*, *5*(4), 216-217.

3 Overigens: ook de rubrieken ‘Wiskunst’ van F. van der Blij verdienen bundeling.

In the same way that the 'Pillars of Hercules' are the entrance to the Mediterranean, in the 1970s Freudenthal's 'Kolommen' marked the development of the mathematical-didactical thinking of the Wiskobas group. It wasn't the case that Freudenthal put down the markers for the content; on the contrary, he often focused on current (internal) discussions and added a deeper mathematical level to them.

Wat te bewijzen is (30)
Vaste rubriek in de ‘Nieuwe Wiskrant’

Martin Kindt
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

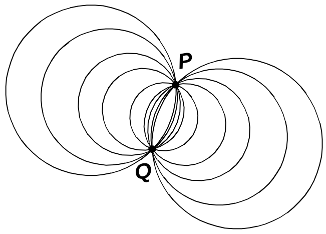
1 Inleiding

> ‘Vanuit didactisch standpunt is er een groot verschil tussen axiomatiek en de traditionele wijze van deductie. Ik heb dat onderscheid aangeduid met de termen ‘globale’ en ‘lokale’ ordening. Iedereen weet dat het lang duurt voordat de doorsnee student een bewijs als geheel overziet. Het neemt nog meer tijd om een bepaalde stelling in relatie tot andere stellingen te overzien, zelfs als een student met pijn en moeite dit niveau heeft bereikt en hem het volgende niveau, dat van de globale ordening krijgt opgedrongen.’

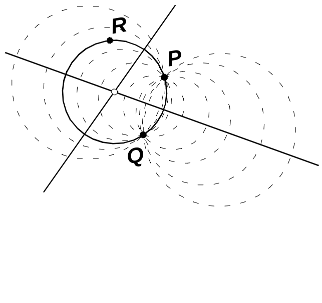
Aldus Freudenthal in ‘Mathematics as an Educational Task’, zijn eerste boek over wiskundeonderwijs, dat in de jaren zeventig verscheen en dat ik met rode oortjes heb gelezen. Met name het hoofdstuk over meetkunde (‘The case of geometry’), waarin bovenstaand fragment te lezen valt, vond en vind ik buitengewoon mooi. Wat Freudenthal bedoelde met ‘lokale ordening’ kan het best worden geduid met voorbeelden. Zijn eerste voorbeeld betreft het door één punt gaan van de drie middelloodlijnen van een driehoek. Mede in verband met het vervolg kies ik hier voor een wat andere, maar nauw verwante, insteek.

2 Drie punten bepalen een cirkel

De basisinstrumenten voor meetkunde zijn vanouds de passer en de liniaal. Dat er in het platte vlak door één punt oneindig veel lijnen en door twee punten precies één lijn kan worden getekend, is iets dat met het hanteren van een liniaal op papier direct wordt ervaren. Als twaalfjarige had ik die voor mij triviale waarheid maar uit het hoofd te leren: *twee punten in het vlak bepalen één rechte lijn.* Aan een discussie hierover ga ik voorbij om te kijken naar een meer prikkelend probleem: *door hoeveel punten is een cirkel bepaald?* Een antwoord waarvan ik niet raar zou opkijken is *twee,* want door het middelpunt en een punt van de omtrek ligt de cirkel vast (dit is precies de manier waarop met Cabri cirkels worden gemaakt). Maar mijn bedoeling is natuurlijk: door hoeveel punten van zijn omtrek is een cirkel bepaald. Gewapend met een passer zal een leerling al experimenterend kunnen ontdekken dat twee punten (zeg P en Q) van de omtrek niet voldoende zijn om een cirkel vast te leggen.
In eerste instantie zal zo’n experiment misschien wat primitief verlopen: probeer de passerpunt zo op papier te zetten dat bij een gekozen passeropening de cirkel door P en Q gaat. Dat is een soort ‘trial and error’. Je hoopt dan dat er bij de leerling een blikwisseling plaatsvindt, zo van: ik zet de passerpunt in P, daarna in Q en teken twee boogjes met dezelfde straal. Die beide boogjes bepalen het middelpunt van een cirkel die door P en Q gaat. Verandering van passeropening geeft dan een nieuwe cirkel door P en Q, in principe zijn er dus oneindig veel en de collectie van al die cirkels wordt een bundel genoemd.



Kijkend naar die bundel lijkt het intuïtief wel duidelijk dat er naast P en Q nog maar één punt nodig is om een cirkel vast te leggen. Hoe evident is dat nu? Geldt het ook als de drie punten heel dichtbij of juist heel ver uit elkaar liggen? Die twijfel kan weliswaar wat worden weggenomen via schaalvergroting of -verkleining, maar de zekerheid lijkt toch een beetje aangetast.
Bovendien is er nog de vraag of het derde punt wel overal in het vlak kan liggen. Kortom, er zal geargumenteerd moeten worden. Een eerste stap daarbij is de ontdekking dat de middelpunten van alle cirkels in de bundel op een rechte lijn (zeg m_{PQ}) liggen. Als je even aanneemt dat dit zo is, kom je snel verder. Want wil de cirkel ook door een derde punt (zeg R) gaan, dan moet het middelpunt ook op m_{PR} liggen en de lijnen m_{PQ} en m_{PR} hebben slechts één gemeenschappelijk punt en dat moet dan het middelpunt van *de* cirkel door P, Q en R zijn.



Maar nu kunnen weer nieuwe vragen worden gesteld:

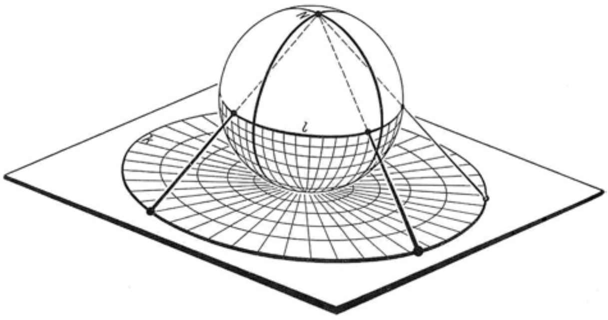
- Waarom liggen alle middelpunten van exemplaren van zo'n bundel op één rechte lijn?
- Is ieder punt van die lijn ook middelpunt?
- Hebben de lijnen m_{PQ} en m_{PR} zeker een snijpunt?

Zo'n waarom-keten moet een keer worden afgebroken tot een voor (bijna) iedereen aannemelijk punt is bereikt. Zo zijn ooit axioma's ontstaan. Freudenthal zegt:

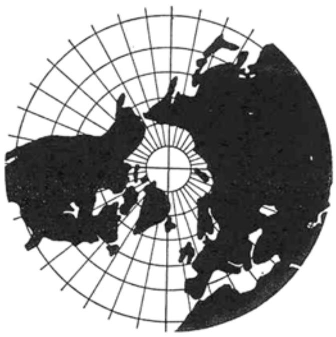
> 'Een wiskundetekst kan met axioma's beginnen omdat het kant-en-klare wiskunde is. Bij wiskunde als activiteit kan dat niet. Wat we doen als we wiskunde creëren, is lokale organisatie. Beginners in wiskunde kunnen alleen korte deductieketens produceren en begrijpen, iedere leraar weet dat ...'

3 Stereografische projectie

Een klassieke manier om een boloppervlak af te beelden op een plat vlak is de zogenaamde stereografische projectie. Daarbij worden de punten van de bol vanuit een uitverkoren punt van die bol geprojecteerd op het raakvlak in het tegenvoetpunt aan diezelfde bol.



De figuur met projectiecentrum *N* (de noordpool) suggereert dat breedtecirkels worden geprojecteerd als concentrische cirkels om het punt *Z* (de zuidpool) en dat meridianen worden afgebeeld op rechte lijnen door *Z*.
Deze projectiemethode, die wordt toegeschreven aan de astronoom Hipparchos (ca. 150 voor Christus) en die later ook bij Ptolemaios bekend was, is een van de manieren om hemelgewelf of aarde in kaart te brengen. Zo kan met projectiecentrum *N* goed het zuidelijk en met projectiecentrum *Z* het noordelijk halfrond worden afgebeeld.



stereografische projectie van het noordelijk halfrond

In het vervolg bedien ik me soms van geografische terminologie, waarbij het projectiecentrum steeds als noordpool wordt aangeduid. Verder gaat het om de 1-1-afbeelding van de gehele (aard)bol α (met als enige uitzondering het punt *N* zelf!) op het gehele raakvlak in *Z* (zeg τ).
Die stereografische projectie heeft twee aantrekkelijke eigenschappen:

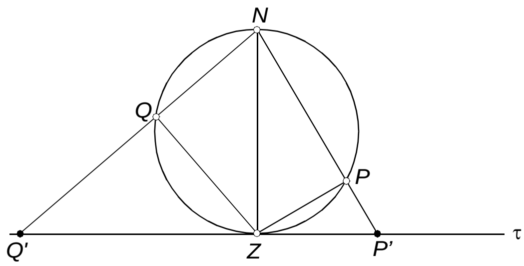
- zij is conform (dat wil zeggen hoektrouw);
- zij beeldt cirkels af op rechte lijnen of cirkels;

Van die laatste eigenschap laat de bovenste figuur in de linkerkolom al een voorproefje zien. Er is weinig kennis van de stereometrie voor nodig om te begrijpen dat niet alleen de meridianen, maar alle cirkels door *N* op een rechte lijn worden afgebeeld. Immers, alle projecterende stralen van zo'n cirkel liggen dan in hetzelfde vlak door *N* en dat vlak snijdt het projectievlak volgens een rechte lijn. Voor alle andere cirkels op de bol geldt dat hun projectie een cirkel in het vlak τ is.
Freudenthal gebruikt het bewijs van de eigenschappen van de stereografische projectie om het principe van lokale ordening verder toe te lichten.

4 Cirkels gaan over in cirkels

Een cirkel op de bol is de snijkromme van een vlak met die bol en is bepaald door drie van zijn punten *P*, *Q* en *R*. Neem nu aan dat *P*, *Q* en *R* niet met *N* in één vlak liggen.
Ik volg nu Freudenthals redenering min of meer op de voet. Veronderstel dat *P'*, *Q'* en *R'* de beeldpunten van dit drietal zijn. Eerste bewering:

P, *Q*, *P'* en *Q'* liggen op een cirkel.



In de rechthoekige driehoek *NZP'* is *ZP* de hoogtelijn uit *Z* op de schuine zijde en dus:

$$|NZ|^2 = |NP| \cdot |NP'|$$

Met *Q* in plaats van *P* wordt dat:

$$|NZ|^2 = |NQ| \cdot |NQ'|$$

zodat:

$$|NP| \cdot |NP'| = |NQ| \cdot |NQ'|$$

en daaruit volgt dat *P*, *Q*, *P'* en *Q'* op een cirkel *r* liggen.
Om dezelfde reden liggen *Q*, *R*, *Q'* en *R'* op een cirkel *p*.
De cirkels *p* en *r* snijden elkaar in twee punten en liggen niet in één vlak, dus door *p* en *r* gaat één bol β.
Dus drie punten van α liggen met hun drie beeldpunten op één bol. Stel *c* is de cirkel op de bol α bepaald door *P*, *Q* en *R* en *c'* is zijn beeldfiguur in τ.

De bol β die bepaald wordt door P, Q, R en P' bevat ook Q' en R'. Deze bol snijdt τ volgens een cirkel c^* die nu ook Q' bevat. Dit geldt voor ieder punt Q van c. Dus c' is vervat in c^*. Beschouwing van de stereografische projectie in omgekeerde richting geeft nu $c^* = c'$.
Dus c' is een cirkel. Dus gaan cirkels over in cirkels.
Freudenthal gaat dan verder met het bewijs van de invariantie van hoeken onder stereografische projectie, maar dat laat ik hier even weg. Vervolgens zegt hij:

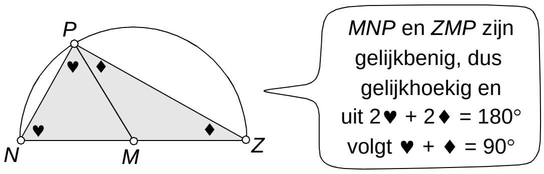
> ‘Is dit geen mooi bewijs? Natuurlijk kan men het ook ingewikkelder doen. Men kan bijvoorbeeld de stereografische projectie als inversie van een bol met middelpunt N en straal NZ opvatten. Men kan de stelling ook algebraïsch bewijzen en als men dat handig doet, hoeft het niet ingewikkeld te zijn en kan het nieuwe inzichten geven.’

5 Vragen staat vrij

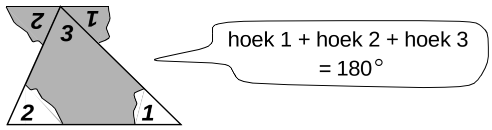
Freudenthals bewijs bevat grote stappen, althans voor de lezer die niet ingewijd is in de klassieke meetkunde. Dat is natuurlijk opzet, want dan kan hij tussenvragen stellen of laten stellen. Ik meng hier zijn reflecties met mijn eigen gedachten en loop het vorige bewijs langs.

Waarom staat ZP loodrecht op NP?

In de Engelse uitgave van Freudenthals boek staat: ‘this is the angle in the semicircle’. In de Duitse versie staat: ‘das ist doch der Thales’. Met de stelling van Thales wordt in veel landen bedoeld de stelling over de evenredigheid van lijnstukken waarin de opstaande zijden van een driehoek worden verdeeld door een lijn evenwijdig aan de basis. Bij ons (net als in Duitsland blijkbaar) is het de stelling over de rechte hoek die bij een halve cirkelboog past. Als je deze stelling niet eerder bent tegengekomen, wil je wel worden overtuigd door een bewijs:

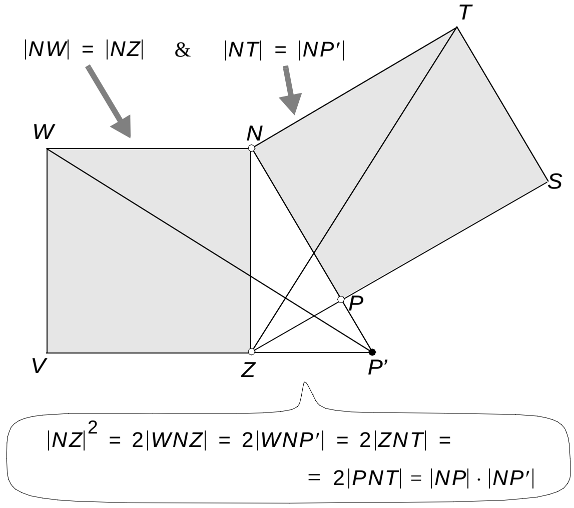


Deze stelling (met zijn omgekeerde), die een grote reikwijdte heeft en wat dat betreft van alle stellingen uit de klassieke elementaire meetkunde misschien alleen de stelling over de hoekensom in een driehoek en de stelling van Pythagoras boven zich moet dulden, zou wat mij betreft de prominente plaats in het meetkundeonderwijs van de onderbouw terug moeten krijgen. Het hier gegeven bewijs berust onder andere op de stelling dat in een gelijkbenige driehoek de basishoeken gelijk zijn. Dit laatste is typisch een voorbeeld van een intuïtief te vatten waarheid. Knip een gelijkbenige driehoek uit papier, leg de onderkant boven en niemand zal eraan twijfelen dat de omgeklapte driehoek weer precies in de opening past. Bij het ‘terugdeduceren’ ben je op een punt aangeland waar verdere vragen op muggenzifterij lijken. De stelling betreffende de hoekensom is van een ander kaliber en verdient wél een overtuigende redenering. Het afscheuren van de drie hoekjes van een papieren driehoek en het aan elkaar leggen met de constatering dat ze een gestrekte hoek vormen (zoals dat nu in sommige methoden gebeurt) is een experiment van een lagere orde dan de zojuist beschreven actie met de gelijkbenige driehoek die wel degelijk inzicht oplevert. In een oud Spaans meetkundeboek vond ik ooit het bovenstaande plaatje waarin gesuggereerd wordt om twee hoeken af te scheuren en die na draaiing over 180° vast te plakken aan de tophoek. Dat de twee van de basis afgescheurde benen in elkaars verlengde komen te liggen is intuïtief duidelijk als je gelooft dat er door de top van een driehoek slechts één lijn parallel met de basis kan worden getrokken.



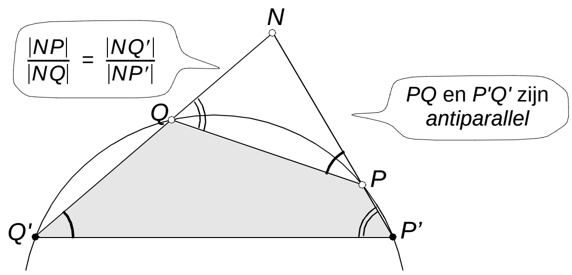
Waarom geldt: $|NZ|^2 = |NP| \cdot |NP'|$ *?*

Dit was vroeger een bekende eigenschap van de rechthoekige driehoek, die gebruikt werd bij het bewijs van de stelling van Pythagoras. Het is een gevolg van de gelijkvormigheid van de driehoeken NPZ en NZP'.
Euclides vermijdt bij zijn (eerste) bewijs van de stelling van Pythagoras de gelijkvormigheid en toont via de congruentie van de driehoeken ZNT en WNP' aan dat het vierkant $NZVW$ en de rechthoek $NPST$ (met NT even lang als NP') dezelfde oppervlakte hebben.



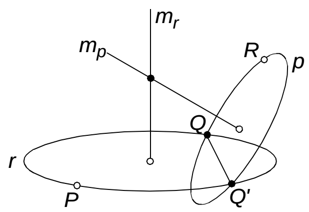
Waarom volgt uit $|NP| \cdot |NP'| = |NQ| \cdot |NQ'|$ *dat P, Q, P′ en Q′ op een cirkel liggen?*

De gelijkheid van de twee producten impliceert de gelijkheid van twee quotiënten. Daaruit volgt dat driehoek NPQ gelijkvormig is met $NQ'P'$, dus $\angle NPQ = \angle NQ'P'$ met als gevolg $\angle NPQ + \angle NPP' = 180°$. Vierhoek $P'PQQ'$ is dus een koordenvierhoek.



De laatste stap is voor een VWO-leerling van nu met N&T-profiel (en zijn wiskundeleraar) direct te volgen, maar voor veel anderen resten hier nog vragen. Het draait om de stelling dat de hoekpunten van een vierhoek dan en slechts dan op een cirkel liggen als de sommen van paren overstaande hoeken aan elkaar gelijk (dus 180°) zijn, ofwel als de overstaande zijden antiparallel zijn.

Waarom gaat er één bol door twee cirkels die elkaar in twee punten snijden (en niet in één vlak liggen)?



Zoals er een bundel van cirkels is die een gegeven lijnstuk als gemeenschappelijke koorde hebben, zo is er een bundel van bollen die een gegeven cirkel bevat. Je hoeft zo'n cirkelbundel maar om zijn as van middelpunten te wentelen om in te zien dat dit zo is; alle cirkels worden bollen en de gemeenschappelijke koorde wordt een gemeenschappelijke cirkel. De middelpunten van al die bollen liggen op wat de *as* van die cirkel wordt genoemd. Het eventuele middelpunt van de bol die twee gegeven cirkels p en r bevat, zal dus op de beide assen m_p en m_r moeten liggen. Blijft over te bewijzen dat die assen elkaar snijden in het geval dat de gegeven cirkels elkaar in twee punten (hier Q en Q') snijden. Als de cirkels niet in één vlak liggen zijn die assen duidelijk niet evenwijdig, maar ze zouden elkaar nog kunnen kruisen. Om aan te tonen dat dit niet het geval is, moet er een vlak worden gevonden waarin beide assen liggen. Dat vlak zal het symmetrievlak moeten zijn van de figuur gevormd door de twee snijdende cirkels ofwel het middelloodvlak van $Q\,Q'$.

Om hard te maken dat m_p en m_r inderdaad in dat middelloodvlak liggen, zijn beschouwingen over de onderlinge loodrechtheid van lijnen en vlakken nodig.

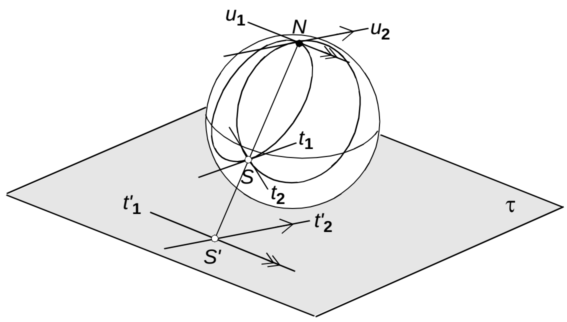
Dat twee (niet coplanaire) snijdende cirkels één bol bepalen is equivalent met het feit dat een bol wordt vastgelegd door vier punten die niet in één vlak liggen. Dat laatste feit kan dan verklaard worden met het door één punt gaan van de middelloodvlakken van vier (ja, zelfs zes) puntenparen die uit het viertal kunnen worden gevormd en dat kan weer bewezen worden met ... enzovoort. Zo roept de beantwoording van iedere vraag weer nieuwe en interessante vragen op. Freudenthal:

> 'Het is steeds hetzelfde: stel me een vraag! Er zijn mensen die alles wat men bij een bewijs aan vragen kan stellen in dat bewijs proppen of met hulpstellingen voorbereiden. Dat is een methode om meetkunde te vermoorden.'

Er blijft nog wel meer te vragen bij de stappen in Freudenthals bewijs. Bijvoorbeeld: waarom snijdt een bol een vlak volgens een cirkel. Naar mijn idee zijn echter de meest klemmende kwesties nu wel opgehelderd.

6 Hoektrouw

Dat de stereografische projectie hoeken tussen krommen op de bol invariant laat, wordt eenvoudig aangetoond via de hoek tussen twee cirkels op de bol.
Een hoek op de bol in een punt S wordt gemeten als hoek in het raakvlak aan de bol in S, dus als hoek tussen twee raaklijnen (zeg t_1 en t_2). Zo'n hoek is dan gelijk aan de hoek tussen de twee snijcirkels van de bol met de vlakken (N, t_1) en (N, t_2). De hoek tussen twee cirkels die elkaar in twee punten snijden, manifesteert zich in beide snijpunten, in dit geval dus ook in het punt N. Anders gezegd: de hoek tussen de bedoelde cirkels is ook gelijk aan de hoek tussen de raaklijnen - zeg u_1 en u_2 - aan die cirkels in N. Maar die raaklijnen in N aan beide cirkels zijn parallel aan het projectievlak, ze liggen immers in het raakvlak aan de bol in N. De projecterende vlakken van t_1 en t_2 snijden het projectievlak τ volgens lijnen die parallel zijn met u_1 en u_2.



Gevolg: $\angle(t_1, t_2) = \angle(u_1, u_2) = \angle(t'_1, t'_2)$
Freudenthal gebruikt niet de noordpool, maar juist de zuidpool in zijn bewijs en merkt op dat de projectie van een cirkel door Z (en niet door N) een cirkel is die in Z raakt aan zijn origineel op de bol. De rest laat zich raden.

7 Freudenthal, een anti-globalist?

Lokale ordening is een belangrijk principe in de (didactiek van de) meetkunde. Het zijn niet de minste wiskundigen die zich daaraan 'schuldig' hebben gemaakt. Freudenthal

noemt en roemt in dit verband Coxeter, auteur van het magistrale werk ‘Introduction to Geometry’, alsook Hilbert, tóch de vader van de moderne axiomatiek, die samen met Cohn Vossen het prachtige ‘Anschauliche Geometrie’ schreef (in Engelse vertaling ‘Geometry and the Imagination’).
Zelf wil ik hier nog een wat minder lijvig boekwerk aan toevoegen, namelijk Stanley Ogilvy’s ‘Excursions in Geometry’. In het Profi-project is in de teksten van vooral Aad Goddijn het principe van de lokale ordening in onderwijspraktijk gebracht (nu verkrijgbaar bij het Freudenthal Instituut als ‘Geometry with applications and proofs’). Tot slot geeft ik nogmaals het woord aan de ‘anti-globalist’ HF:

> ‘Lokale ordening is niet een ongeoorloofde of oneerlijke activiteit in de wiskunde. Het is een algemeen aanvaarde instelling van de volwassen beoefenaar van zuivere en toegepaste wiskunde, ook al zou hij zulke oefeningen nooit publiceren.’

H. Freudenthals wiskundige werk

Tonny A. Springer
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

In deze HF100 special wordt alleen ingegaan op de betekenis die Hans Freudenthal heeft voor het wiskundeonderwijs. Daarbij wordt voorbijgegaan aan het feit dat Freudenthal in eerste instantie een voortreffelijke wiskundige was. In dit artikel schetst Prof. T. A. Springer de betekenis van Freudenthals werk als wiskundige.

Hans Freudenthal is in Nederland vooral bekend als coryfee van de didactiek van het wiskundeonderwijs. Hij was een zeer veelzijdig intellectueel, die van vele markten thuis was. Zijn interesse voor didactiek was er al in de jaren dertig van de vorige eeuw. Maar in die tijd moet wiskundig onderzoek toch wel zijn eerste interesse zijn geweest, zoals een blik op zijn publicatielijst leert. Zijn voornaamste bijdragen aan wiskundig onderzoek liggen op het terrein van wat men in Nederland ‘zuivere wiskunde’ pleegt te noemen (een niet erg gelukkige naam). Freudenthals bijdragen hebben een goede reputatie en worden nog steeds gebruikt. Goede wiskunde verjaart niet.

Die bijdragen hebben Freudenthals reputatie in de wiskundewereld gevestigd. Naar mijn mening ontleende hij zijn gezag in de wereld van de wiskundedidactiek onder andere ook aan zijn reputatie als wiskundige. Ik wil proberen hier iets te zeggen over het werk waarop die reputatie berust en de achtergrond ervan.

Freudenthal zelf is niet erg mededeelzaam geweest over die achtergrond. Hij vertelde er wel eens iets over en er is het een en ander te vinden in autobiografisch-achtige geschriften. In de eerste plaats in het boek ‘Schrijf dat op, Hans; Knipsels uit een leven’ (Meulenhoff, 1987), geschreven toen hij ongeveer tachtig jaar was. Freudenthal zelf zegt dat het opzettelijk chaotisch is. Over zijn wiskundige ontwikkeling vindt men hier en daar iets. Maar ook leest men er dat de wiskunde van niet veel betekenis was in zijn leven. Er is ook wat achtergrondinformatie te vinden in de brochure ‘Berlin 1923-1930’ (W. de Gruyter, 1987) met anekdotische herinneringen uit Freudenthals Berlijnse studietijd. Uit dit alles krijgt men enigszins een indruk van de ontwikkeling van de jonge Freudenthal.

Om te beginnen bij het begin: Freudenthal is geboren op 17 september 1905 in Luckenwalde. Zijn vader was daar voorzanger en godsdienstleraar van de kleine Joodse gemeente. Hij groeide op in een liberaal-Joods milieu.

Vanaf zijn jonge jaren leed Freudenthal aan astma, waardoor hij veel thuis moest blijven van school. Intussen las hij. Hij moet een vraatzuchtig lezer geweest zijn van Duitse literatuur, maar ook van geschiedenis, filosofie, wiskunde ... Op zijn twaalfde begon hij al aan een boek over differentiaal- en integraalrekening (zoals dat toen heette).

Al heel vroeg was besloten dat Freudenthal wiskunde zou gaan studeren, maar het is niet duidelijk waarom. Uit zijn autobiografische boek krijgt men de indruk dat een carrière in de literatuur hem meer aantrok. Hoe het ook zij, het werd wiskunde.

Na zijn eindexamen in februari 1923 begon Freudenthal in het zomersemester van dat jaar met de wiskundestudie aan de Berlijnse Universiteit. Daar kreeg hij te maken met vermaarde wiskundigen als L. Bieberbach (toen nog niet aangetast door een nazistisch virus), E. Schmidt en I. Schur. In zijn latere studiejaren raakte hij onder de indruk van de jongere wiskundigen H. Hopf en J. von Neumann. Maar Freudenthal volgde ook colleges in andere vakken en hij las veel. In zijn Berlijnse tijd moet hij de basis gelegd hebben voor zijn grote eruditie.

In het Berlijnse wiskundeonderwijs kwamen voor die tijd moderne onderwerpen aan de orde als Hilbertruimten (Schmidt) en verzamelingstheorie (Von Neumann). Van veel belang voor Freudenthal was het college van Hopf in 1926-‘27, over de toen gloednieuwe algebraïsche topologie. Freudenthal verzorgde een uitwerking ervan.

Gestimuleerd door Hopf zocht Freudenthal naar een ‘wezenlijke’ continue afbeelding van de 3-sfeer S^3 op de 2-sfeer S^2. De n-dimensionale sfeer S^{n} is het n-dimensionale boloppervlak:

$$S^n = \left\{ (x_1, \ldots x_{n+1}) \in \mathrm{R}^{n+1} \middle| x_1^2 \quad + x_{n+1}^2 = 1 \right\}$$

De afbeelding (later de Hopf-vezeling genoemd) was bekend, maar het bewijs van de wezenlijkheid lukte Freudenthal niet. Hopf zelf vond in 1928 een bewijs.

Van groot belang voor Freudenthals latere loopbaan was het contact met L.E.J. Brouwer bij diens Berlijnse col-

leges over intuïtionisme in 1926-‘27. Het zomersemester van 1927 studeerde Freudenthal in Parijs. Maar de colleges die hij volgde van de Franse wiskundigen vond hij ouderwets.
In Berlijn was de algebra in handen van I. Schur. Freudenthal zegt dat diens stijl hem tegenstond. Schurs werk is gebaseerd op concrete algebraïsche manipulaties en misschien had Freudenthal daar niet zoveel mee op, hoewel hij als het nodig was technisch algebraïsch werk perfect kon verrichten. De algebra die hem wel lag, was de ‘abstracte’ algebra, in 1931 gecodificeerd in Van der Waerdens vermaarde leerboek ‘Moderne Algebra’, gebaseerd op colleges van E. Noether en E. Artin. Freudenthal hoorde voor het eerst over de abstracte algebra van Artin zelf tijdens een bezoek aan Hamburg in 1930 en hij werd erdoor gegrepen. Voor veel van zijn werk in de topologie uit de jaren dertig gebruikt hij de abstracte methoden. En ook in later jaren gaf hij hoog op van die methoden. Dat heeft misschien in Nederland weleens de indruk gewekt dat ‘abstracte’ wiskunde het neusje van de zalm is. Dat zal niet Freudenthals bedoeling geweest zijn, denk ik. Intussen is de abstracte algebra niet abstract meer en staat anderzijds de algebra à la Schur weer in hoog aanzien. De slinger gaat heen en weer ...

Freudenthal promoveerde in 1930 met Hopf als promotor. Het promotieonderwerp ligt niet zozeer op Hopfs terrein. Het proefschrift gaat over einden van een topologische ruimte en is een voorbeeld van het gebruik van de abstracte methoden in de meetkunde. Hopf vertelt dat Freudenthal het zijn promotor bijzonder gemakkelijk maakte: hij kwam op een goede dag met een kant en klaar proefschrift aanzetten.
In het proefschrift wordt een (behoorlijke) locaal compacte topologische ruimte X uitgebreid door er een aantal punten (‘einden’) aan toe te voegen die samen met X een compacte ruimte vormen, een ‘compactificatie’ van X. Freudenthal is later nog een paar keer op de einden teruggekomen. Men komt ze tegenwoordig nog steeds tegen, evenals allerlei vormen van compactificatie. Een elegant resultaat uit het proefschrift is dat een topologische groep 0, 1 of 2 einden heeft.
In 1930 nam Freudenthal een assistentenplaats aan aan de Universiteit van Amsterdam, die hem door Brouwer was aangeboden. Dat was een positie met een voor die tijd heel behoorlijk salaris: hfl. 3500,- per jaar. In november 1930 vertrok Freudenthal uit Berlijn naar Nederland. Dat zou zijn tweede vaderland worden. Hij trouwde in 1932 met Susanna J.C. Lutter. Zij zouden vier kinderen krijgen.

Zijn eerste publicaties verschijnen ook in 1930, het begin van een grote productie. Freudenthals publicatielijst bevat meer dan zevenhonderd titels: artikelen over zeer uiteenlopende onderwerpen, boeken, leerboeken en zelfs enkele romans. Onder de artikelen zijn er ongeveer honderd met een technisch-wiskundig karakter. De meeste daarvan dateren uit de jaren 1930-1940 en 1950-1970.
Freudenthal was iemand die snel en efficiënt werkte in alles wat hij ter hand nam, en dat was bijzonder veel. Hij wekte nooit de indruk het erg druk te hebben. Ik geloof dat het niet in zijn aard lag wetenschappelijk werk lang te laten liggen om het te laten rijpen en te polijsten.
Enkele hoogtepunten van zijn wiskundige werk passeren hieronder de revue (relevante artikelen worden aan het eind genoemd). De publicaties over andere onderwerpen, in het bijzonder die over didactiek van de wiskunde, laat ik helemaal buiten beschouwing bij gebrek aan competentie.

De eerste tijdschriftpublicatie (1931b) is een artikelversie van het proefschrift. In de jaren erna verschijnen verschillende andere publicaties, voornamelijk over topologie. Een bijzonder vruchtbaar jaar was 1936, waarin niet minder dan twaalf artikelen verschenen. Daaronder twee waardevolle artikelen over topologische groepen (1936a,b) en een fundamenteel artikel (1936d) over wat nu Riesz-ruimten heet, maar ook twee artikelen over intuïtionisme (1936i, j). Intussen had Freudenthal de algebraïsche topologie à la Hopf weer opgenomen. Het belangrijkste artikel uit die periode is zonder twijfel dat over homotopiegroepen (1937h). Dat verdient een uitweiding.
Voor een samenhangende (behoorlijke) topologische ruimte X wordt de n^e homotopiegroep $\pi_n(X)$ gemaakt, uitgaande van de continue afbeeldingen $S^n \to X$ van de n-sfeer naar X. Voor $n = 1$ krijgt men de fundamentaalgroep van Poincaré. Voor $n \geq 2$ zijn de homotopiegroepen commutatief. Freudenthals collega-assistent in Amsterdam, Witold Hurewicz, die overigens in 1936 naar de Verenigde Staten vertrok, had in Amsterdam fundamentele resultaten over de homotopiegroepen gevonden, waar Freudenthal natuurlijk van op de hoogte was. Een voor de hand liggende vraag is die van de concrete beschrijving van de homotopiegroepen $\pi_m S_n$ van de sferen (de interessante gevallen zijn die waar $m > n$). Freudenthal was de eerste die deze vraag aanpakte (in 1937h). Hij introduceerde er een elementaire constructie, tegenwoordig een standaardingrediënt van de algebraïsche topologie, de *suspensie* (‘Einhängung’ in loc. cit.).
Laat X een behoorlijke topologische ruimte zijn. De suspensie $S(X)$ wordt aldus verkregen: neem het product $X \times [0,1]$ - de cilinder met basis X - en knijp de bovenkant $(X,1)$ en onderkant $(X,0)$ ieder samen tot een punt. Als X de cirkel S^1 is, gelegen in het x-y-vlak van $\mathbf{R}^3$, dan wordt $S(X)$ de vereniging van twee kegels in $\mathbf{R}^3$ met basis S^1, een aan de bovenkant en een aan de onderkant. Die vereniging is topologisch hetzelfde als S^2, notatie $S(S^1) \simeq S^2$. Algemener: $S(S^n) \simeq S^{n+1}$
Dit gebruikend, construeert Freudenthal een homomorfisme van abelse groepen:

$$h_{m,n}: \pi_{m+1}(S^{n+1})$$

Hij bewijst dat $h_{m,n}$ een isomorfisme is als $2n > m + 1$ (het

bewijs is moeilijk). Daaruit volgt 'stabiliteit': $\pi_{n+p}(S^n)$ is constant voor grote n. De concrete beschrijving van deze groepen is nog steeds een onopgelost probleem. Freudenthal is na zijn pionierswerk uit 1937 niet meer serieus op deze zaken teruggekomen.
Van het werk uit de jaren voor de Tweede Wereldoorlog moet ook nog genoemd worden een fraai artikel over automorfismen van Liegroepen, gepubliceerd in 1941 in de Verenigde Staten.

In de vooroorlogse jaren moet hij zijn energie vooral gestoken hebben in wiskundeonderzoek. Maar hij had ook een onderwijstaak aan de Amsterdamse universiteit, waarbij hij probeerde de 'moderne' wiskunde te introduceren. (Ik weet niet of zijn pogingen een blijvend succes hadden.) Verder verrichtte hij veel werk voor het tijdschrift 'Compositio Mathematica'. Dat was door Brouwer opgericht, die er eindredacteur van was. Maar Freudenthal verzorgde het praktische redactionele werk (correspondentie met auteurs, enzovoort).

Freudenthals situatie veranderde drastisch na de Duitse inval in 1940. Het schijnt dat hij in 1939 wel over emigratie naar de Verenigde Staten gedacht heeft, maar het is er niet van gekomen. In het najaar van 1940 werd hij als overheidsfunctionaris van Joodse afkomst van zijn functie van conservator aan de Amsterdamse universiteit ontheven en op wachtgeld gesteld. Aan de deportaties, die in 1942 begonnen, is Freudenthal ontkomen. Hij viel in de categorie van 'gemengd-gehuwden' die voorlopig van deportatie vrijgesteld werden. Door het verloop van de oorlog in 1944-'45 is deportatie hen bespaard gebleven.
Freudenthal heeft de oorlogsjaren grotendeels thuis kunnen doorbrengen, maar in een onzekere situatie. Hij heeft in die tijd van alles ter hand genomen: wiskunde, onderwijsdidactiek, bellettrie.
De wiskundige contacten met het buitenland vielen weg, behalve die met Hopf in het neutrale Zwitserland. Over wat er in de Verenigde Staten in de topologie gebeurde kan Freudenthal niet veel te weten zijn gekomen. Hij moet achterop geraakt zijn.
Men zou verwachten dat Freudenthal direct na het einde van de oorlog zijn positie aan de Amsterdamse universiteit weer zou krijgen. Maar hij kwam in allerlei verwikkelingen terecht. Die eindigden pas toen hij in 1946 werd benoemd tot hoogleraar aan de Utrechtse universiteit met als leeropdracht 'de zuivere en toegepaste wiskunde en de grondslagen van de wiskunde'. De overgang naar de provinciestad Utrecht zinde Freudenthal niet erg, hij was liever in Amsterdam gebleven. Anderzijds moet hij voor sommigen aan de conservatieve Utrechtse universiteit een vreemde eend in de bijt geweest zijn. Maar het duurde niet lang voor Freudenthal er op waarde werd geschat. Hij werd een vooraanstaand lid van de Utrechtse universitaire gemeenschap. In 1963-'64 was hij rector van de universiteit.

In de eerste Utrechtse jaren nam Freudenthal met karakteristieke energie van alles ter hand. In de eerste plaats zijn universitaire onderwijs, dat hij opnieuw moest opzetten. Hij was de eerste die in Nederland een wiskundepracticum invoerde.
Een activiteit die hij vele jaren zou volhouden en die hem veel bevrediging gaf, was het schrijven van een wekelijkse bijdrage in het weekblad 'De Groene Amsterdammer'. De bijdragen gingen over van alles en nog wat en een aantal ervan is gebundeld met de naam 'Van sterren tot inlegzolen' (Van Loghem Slaterus, 1954). Het thema 'wiskundedidactiek' verschijnt ook in zijn activiteiten. Technisch-wiskundige publicaties treden weer meer op de voorgrond in 1951. Een voorbode van later werk is zijn publicatie over het octavenvlak (1951b). Hier is weer een uitweiding vereist.

Een projectief vlak is een verzameling waarvan de elementen *punten* heten en waarin tevens deelverzamelingen genaamd *lijnen* gegeven zijn zo dat (a) twee punten op precies één lijn liggen en (b) twee lijnen precies één punt gemeen hebben. Welbekend is het reële projectieve vlak $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, waarvan de 'punten' zijn de lijnen door de oorsprong O van de driedimensionale ruimte $\mathbf{R}^3$ en 'punten' op een 'lijn' de lijnen zijn door O gelegen in een vlak door O. Het complexe projectieve vlak $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ wordt ook zo ingevoerd, met complexe getallen in plaats van reële.
Men kan verdergaan en een projectief vlak $\mathbf{P}^2(\mathbf{H})$ invoeren over het lichaam van de quaternionen van Hamilton $\mathbf{H}$ (ontdekt in 1843). Ik herinner eraan dat $\mathbf{H}$ een vierdimensionale vectorruimte is over $\mathbf{R}$ met basis $\{1, i, j, k\}$ en rekenregels $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $ki = -ik = j$, $jk = -kj = i$. De vermenigvuldiging in $\mathbf{H}$ is niet commutatief, maar dat is voor de definitie van $\mathbf{P}^2(\mathbf{H})$ geen probleem.
De quaternionen ontstaan door een soort 'verdubbeling' van de complexe getallen. Analoog kunnen de quaternionen 'verdubbeld' worden tot het systeeem $\mathbf{O}$ van de octaven (ontdekt door Graves, ook in 1843), een achtdimensionale vectorruimte over $\mathbf{R}$, met basis $\{1, i_1, \ldots, i_7\}$ en analoge rekenregels. Verdere verdubbeling is niet meer mogelijk.

Er bestaat ook een projectief octavenvlak $\mathbf{P}^2(\mathbf{H})$. Omdat de vermenigvuldiging in $\mathbf{O}$ niet meer associatief is, lukt het niet een definitie te geven in de trant van die van $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. In 1951b definieert Freudenthal $\mathbf{P}^2(\mathbf{O})$ op een andere, meer algebraïsche manier. Dat artikel bevat ook een elegante behandeling van de octaven. Een (nieuw) hoofdresultaat van het artikel is de beschrijving van de projectieve group van $\mathbf{P}^2(\mathbf{O})$, dat wil zeggen de groep van omkeerbare afbeeldingen van $\mathbf{P}^2(\mathbf{O})$ op zichzelf die lijnen in lijnen overvoeren. Bij $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ leert de klassieke projectieve meetkunde dat de analoge groep isomorf is met de groep $PGL_3(\mathbf{R})$, de factorgroep van de groep van omkeerbare reële 3×3-matrices naar de ondergroep van veel-

vouden van de eenheidsmatrix. Freudenthal bewijst dat de projectieve groep van $\mathbf{P}^2(\mathbf{O})$ isomorf is met een exceptionele Liegroep van type E_6. Het thema 'exceptionele groepen' verschijnt hier voor het eerst. Het heeft in Freudenthals latere werk een grote rol gespeeld. De Liegroepen dragen de naam van de negentiende-eeuwse Noorse wiskundige Sophus Lie. Ze belichamen de continue symmetrieën die men in wiskunde en natuurkunde tegenkomt. Voorbeelden van Liegroepen zijn de draaiingen in de driedimensionale Euclidische ruimte en de groep $SL_n(\mathbf{R})$ van reële $n \times n$-matrices met determinant 1. De eerste groep is een compacte topologische ruimte, de tweede een niet-compacte.
Er bestaat een structuurtheorie voor Liegroepen, met als bouwstenen 'simpele' Liegroepen. De classificatie daarvan vindt men al in de negentiende eeuw in de 'thèse' van È. Cartan uit 1894. Het resultaat is een lijst van typen van simpele Liegroepen, die aangeduid worden met de symbolen A_l, B_l, C_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. De vraag naar concrete realisaties van deze typen ligt voor de hand. De typen *A*, *B*, *C*, *D* worden gerepresenteerd door 'klassieke' groepen. Zo is de groep $SL_n(\mathbf{N})$ van type A_{l-1}. De types *B* en *D* vindt men bij orthogonale groepen (in oneven, respectievelijk even dimensie) en type *C* vindt men bij de symplectische groepen. De vijf overblijvende types zijn die van de *exceptionele groepen*, op het eerste gezicht nogal vreemde objecten. In de loop der jaren is echter gebleken dat ze zo vreemd niet zijn en dat ze op allerlei plaatsen opduiken.
Ik vermeldde al dat Freudenthal (in 1951b) een meetkundige beschrijving gaf van een Liegroep van type E_6, als groep van projectieve transformaties van het octavenvlak $\mathbf{P}^2\mathbf{Q}$. Is er ook een meetkundige beschrijving van groepen met type E_7 en E_8 waarbij het octavenvlak een rol speelt?

Freudenthal publiceerde een lange serie artikelen (1954b,c, 1955a,b, 1959b,c, 1963b) over deze vraag. Zij geven een gedetailleerde studie van meetkundige systemen met exceptionele automorfismengroepen. Zo'n systeem is bijvoorbeeld de 'metasymplectische' meetkunde (behandeld in 1959c en 1963c), met automorfismengroep van type E_8. Freudenthal gebruikt in zijn studie een algebraïsche machinerie, maar ook synthetisch-meetkundige redeneringen. Zijn algebraïsche resultaten kunnen worden gezien als een gedetailleerde studie van zekere representaties van exceptionele groepen. De resultaten zijn mijns inziens nog steeds van waarde.

Freudenthal had in de jaren van deze publicaties veel contact met de jonge Brusselse wiskundige J. Tits, een van de weinigen die toen in exceptionele groepen geïnteresseerd waren. Het werk van Tits evolueerde later naar zijn theorie van gebouwen, waarin de meetkundige aspecten van de simpele Liegroepen (exceptioneel of niet) tot hun recht komen. De gebouwentheorie is intussen een indrukwekkend stuk wiskunde geworden, met vele toepassingen in meetkunde en groepentheorie.

Een intrigerend object dat men bij Freudenthal tegenkomt (in 1959c, 1962b, 1962c) is het 'magische vierkant'

$$\begin{array}{cccc} B_1 & A_2 & C_3 & F_4 \\ A_2 & A_2 \times A_2 & A_5 & E_6 \\ C_3 & A_5 & D_6 & E_7 \\ F_4 & E_6 & E_7 & E_8 \end{array}$$

De kolommen worden geïndexeerd door de vier lichamen **R**, **C**, **H**, **O** en de rijen door een meetkunde (of, in een andere versie, door dezelfde vier lichamen) en in het snijpunt van een rij en een kolom, staat een groep die iets te maken heeft met de index van de rij en de kolom. Voor de dimensies van die groep bestaat een uniforme regel. Het magische vierkant is een heuristisch object, een poging tot systematisering van aspecten van de exceptionele groepen. Zulke pogingen zijn interessant en ze zijn nog actueel.

Freudenthal heeft kortere artikelen gepubliceerd over verschillende aspecten van de theorie van de Liegroepen (bijvoorbeeld 1953b,c,d, 1954d,e, 1956e, 1958c). Ik wil daar niet verder op ingaan. Wel wil ik iets zeggen over het leerboek 'Linear Lie Groups' (1969b), met medeauteur H. de Vries. Het is een efficiënte inleiding in de Lietheorie, dat veel interessant materiaal brengt dat niet in leerboeken te vinden was. Toch heeft het boek niet veel succes gehad. Vermoedelijk is de reden daarvan de ongebruikelijke terminologie. In zijn artikelen over Liegroepen gebruikte Freudenthal dezelfde terminologie als Cartan in 1894. In de jaren na de Tweede Wereldoorlog werd de Lietheorie door verschillende wiskundigen opnieuw opgenomen en uitgebouwd, waarbij zich een nieuwe terminologie ontwikkelde. Die heeft Freudenthal nooit gebruikt. In 1969b introduceert hij een eigen terminologie, die wel consistenter is dan de andere, maar die nooit ingang gevonden heeft. Zo heet een 'Cartanalgebra' bij Freudenthal een 'stam' (Engels 'trunk') en 'Weylgroep' wordt 'kaleidoscoopgroep'.
Iemand die er wat vertaalwerk voor over heeft, zal zien dat het boek veel origineels bevat. Het is, in tegenstelling tot de meeste voorgaande publicaties, in het Engels geschreven. Freudenthals wiskundige artikelen zijn tot dan in het Duits (de meeste) of in het Frans of Nederlands. Hij raakte pas goed vertrouwd met het Engels tijdens zijn gasthoogleraarschap aan Yale University in 1960-1961.

Uit het meetkundig werk moeten ook genoemd worden artikelen over 'ruimteproblemen' (bijvoorbeeld 1956a en 1964b) en het overzicht 1964c. Van volkomen andere aard is Freudenthals ontwerp van de kosmische taal 'Lincos', voor communicatie met intelligente wezens in het heelal (1957d en 1960d). Dat lijkt misschien charlatanerie, maar is het niet. Zijn ontwerp is zoiets als een formeel systeem, gebouwd op het idee dat intelligente wezens basale wiskunde zullen begrijpen. Het is een van de vele originele ideeën die men in Freudenthals werk tegenkomt. Na 1965 was Freudenthals wetenschappelijk werk vooral op het terrein van het wiskundeonderwijs, dat hier niet aan de orde komt. Op dat terrein is hij tot zijn dood in 1990 actief geweest.

Op zijn honderdste geboortedag staat zijn wiskundig werk nog steeds in aanzien.

Literatuur

De aanduiding van de artikelen naar jaartal is gebaseerd op een volledige lijst van Freudenthals wiskundige publicaties, te vinden in 'Selecta' die zullen verschijnen bij het Publishing House van de European Mathematical Society, hopelijk in 2006.

1931b. Über die Enden topologischer Räume und Gruppen. *Math. Zeitschrift, 33*, 692-713.

1936a. Einige Sätze über topologische Gruppen. *Annals of Math., 37*, 46-56.

1936b. Topologische Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen. *Annals of Math., 37*, 57-77.

1936d. Teilweise geordnete Moduln. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 39*, 641-651.

1936i. Zum intuitionistischen Raumbegriff. *Comp. Math., 4*, 82-111.

1936j. Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln. *Comp. Math., 4*, 112-116, 118.

1937h. Über die Klassen der Sphärenabbildungen I. *Comp. Math., 5*, 299-314.

1941. Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen. *Annals of Math., 42*, 1051-1074.

1951b. Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, Mathematisch Instituut der R.U. Utrecht. (met correcties herdrukt in *Geom. Dedic., 19* (1985), 7-63).

1953b. Sur le groupe exceptionnel E_7. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 56*, 81-89.

1953c. Sur des invariants caractéristiques des groupes semisimples. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 56*, 90-94.

1953d. Sur le groupe exceptionnel E_8. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 56*, 95-98.

1953e. Zur ebenen Oktavengeometrie. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 56*, 195-200.

1954b. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene I. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 57*, 215-230.

1954c. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene II. *Proceedings Kon. Akad. v. Wet., 57*, 363-368.

1954d. Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen, I. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 57*, 369-376.

1954e. Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen, II. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 57*, 487-491.

1955a. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene III. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 58*, 151-157.

1955b. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene IV. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 58*, 277-285.

1956a. Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems. *Math. Zeitschrift, 63*, 374-405.

1956e. Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen, III. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 59*, 511-514.

1957d. Grundzüge eines Entwurfes einer kosmischen Verkehrssprache. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 69*, 353-363.

1958c. Zur Klassifikation der einfachen Lie-Gruppem. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 60*, 379-383.

1959b. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene V, VI,VII. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 62*, 165-201.

1959c. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene VIII, IX. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 62*, 447-474.

1960d. (boek) *Lincos, design of a language for cosmic intercourse*. Amsterdam, 220 p.

1962c. Symplektische und metasymplektische Geometrien. *Proceedings 1959 Colloq. Algebraical and Topological Foundations*, 29-33.

1962d. Bericht über die Theorie der Rosenfeldschen elliptischen Ebenen. *Proceedings 1959 Colloq. Algebraical and Topological Foundations*, 35-37.

1963b. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene X, XI. *Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 66*, 457-487.

1964b. Das Helmholtz-Liesche Raumproblem bei indefiniter Metrik. *Math. Annalen, 156*, 263-312.

1964c. Lie groups in the foundation of geometry. *Advances in Mathematics 1*, 145-190.

1969b. (boek, met H. de Vries) *Linear Lie Groups*. Academic Press, New York-London.

In this special HF100 edition the emphasis is placed only on the significance of Freudenthal for mathematics education, thus almost ignoring the fact that originally Freudenthal was a great mathematician. In this article, prof. T. A. Springer outlines the significance of Freudenthal's work as a mathematician.

Afstandsonderwijs

Frederik van der Blij,
Gorssel

Hoe ga je communiceren met een buitenaardse beschaving waarvan je alleen voldoende intelligentie en een staat van technologie veronderstelt zodat radiosignalen ontvangen kunnen worden? Je moet dan eerst een taal construeren; een taal als Lincos, bedacht door Hans Freudenthal in een tijd dat de eerste Spoetnik nog moest worden gelanceerd. Frederik van der Blij dook in het boek 'Lincos' en beschrijft de structuur van de 'bliep'taal

1 Inleiding

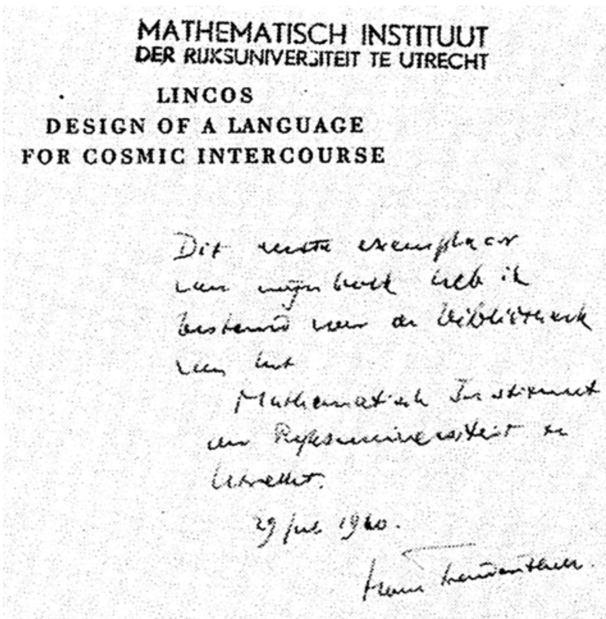
De wetenschappelijke publicaties van Freudenthal zijn talrijk en zeer gevarieerd. Ik kies voor dit artikel uit het werk van Freudenthal niet een onderwerp uit de zuivere wiskunde, zoals de analyse, de meetkunde, de topologie of de Liegroepen, ook niet uit de statistiek en waarschijnlijkheidsrekening, niet uit de geschiedenis van de wiskunde, of de didactiek en het wiskundeonderwijs, maar uit de logica, in het bijzonder de relatie tot de taal.

Op 27 april 1957 werd door Hans Freudenthal een publicatie voor de Proceedings van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen aangeboden met als titel: 'Grundzüge eines Entwurfes einer kosmischen Verkehrssprache'. In dit artikel van twaalf pagina's bespreekt hij het taalkundige probleem om door middel van een radioverbinding met 'intelligente' buitenaardse wezens in contact te treden. Hij kondigt een ontwerp aan van een taal, door hem met dit doel ontworpen, die hij 'Lincos' (Lingua Cosmica) noemt.

In 1960 verschijnt van zijn hand in de serie 'Studies in Logic and the Foundations of Mathematics' de studie 'Lincos, Design of a language for cosmic intercourse. Part I'. De inleiding omvat 44 pagina's en is gedagtekend 'Utrecht, December 23rd, 1957'. Dit eerste deel omvat 224 pagina's; een tweede deel is nooit verschenen.

In het 'Utrechts Nieuwsblad' van 30 september 1957 verschijnt een bericht over de kosmische taal, in de 'Groene Amsterdammer' van 26 oktober 1957 schrijft Freudenthal een artikel met als titel 'Een poging om een taal voor kosmisch verkeer te ontwerpen'. En een week later verschijnt in het zelfde weekblad een gedicht en cartoon van Joost '*Aan den Hooggeleerden Heere Prof. Dr. Hans Freudenthal, opsteller van d'eerste Beginselen van de kosmostael*'.

Op het Mathematisch Instituut wordt met spanning meegeleefd met de verdere stroom van publicaties in binnen- en buitenland over Lincos, het manuscript wordt 's avonds in de kluis opgeborgen.


MATHEMATISCH INSTITUUT
DER RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT

LINCOS
DESIGN OF A LANGUAGE
FOR COSMIC INTERCOURSE

Dit eerste exemplaar van mijn boek heb ik bestemd voor de bibliotheek van het Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht.
29 Juli 1960.
Hans Freudenthal.

figuur 1: titelpagina van het eerste exemplaar van 'Lincos'

In het voorjaarsnummer van 'Delta', een Engelstalig tijdschrift over Nederlandse cultuur en wetenschap, waarin Freudenthal dan regelmatig publiceert, verschijnt in het voorjaar van 1958 een artikel van zijn hand met als titel 'Towards a cosmic language'. En daarna verschijnen regelmatig in heel verschillende tijdschriften verdere artikelen van zijn hand over dit onderwerp. Als voorbeeld noem ik 'Towards a Cosmic Language' in 'Cosmic Search' (winter 1980).

Voor we op de inhoud van 'Lincos' ingaan, willen we eerst nog wat terugblikken. Altijd al was taal een onderwerp van onderzoek voor Freudenthal. In 1951 verscheen in de ‘Handelingen’ van het XIX^{e} Vlaamse Filologencongres een artikel met als titel ‘Omgangstaal en Logistische taal’. In 1954 verscheen in ‘Wetenschap en Samenleving’ een artikel met als titel ‘Pleidooi voor de toren van Babel’ en het volksuniversiteitsboekje ‘Exacte Logica’ werd vertaald als ‘Einführung in die Sprache der Logik’ en ‘The Language of Logic’.

Van drie verschillende kanten is er belangstelling voor Lincos: vanuit de wiskunde, speciaal mathematische logica, vanuit de groep zoekers naar buitenaards leven en vanuit de zuiver taalkundigen. Van het laatste is het artikel van Freudenthal in ‘Current trends in Linguistics’ in 1974 met als titel ‘Cosmic Language’ een bewijs. Maar nu is het hoog tijd om over te gaan op de inhoud van Lincos.

2 Lincos

Het gaat om het ontwerpen van een nieuwe taal, maar met een heel ander uitgangspunt als dat voor het ontwerp van bijvoorbeeld Esperanto. Daarbij werd immers uitgegaan van bestaande en aan de leerling bekende talen. Ook is de opdracht niet te vergelijken met het ontwerpen van een geheimtaal voor gecodeerde berichten. Dan moet de ontcijfering voor niet-bevoegden zo moeilijk mogelijk zijn, hier moet de ontcijfering voor iedereen zo eenvoudig en duidelijk mogelijk zijn.

Het feit dat Lincos uitgaat van alleen radio- en geen televisiecontact geeft weer eigen beperkingen. Dat totaal geen beeld van de bedoelde ontvanger bekend is, komt er nog bij als extra probleem. Freudenthal schrijft heel nauwkeurig dat hij uitgaat van ontvangers, die een intellect bezitten dat niet te veel van het menselijke afwijkt. Als ik me goed herinner besprak Hugo Brandt Corstius het boek ‘Lincos’ onder de titel ‘Freudenthal definieert een mens’.
In een bijdrage in 1970 aan ‘Sind wir allein im Kosmos’ schrijft Freudenthal:

> ‘Wie musz das Wesen beschaffen sein, das diese Paragraphen versteht?’ Alle diese Beschaffenheiten zusammen charakterisieren, den, der das ganze Programm versteht, d.h. den Menschen. Vielleicht hilft eine Arbeit wie Lincos uns, das besser zu verstehen, was den Menschen zum Menschen macht.’

Freudenthal zelf speculeert over de grootheid van het heelal, in zo’n grote verzameling zal toch wel ergens zo’n op de mens gelijkend intellect zijn, hij citeert ‘In het huis mijns Vaders zijn vele woningen’. Dat gezegd zijnde, hoe nu te beginnen. Het is voor Freudenthal duidelijk: met de wiskunde! Dat is immers een algemeen menselijke taal, onafhankelijk van de omgangstaal van de gebruiker.
Bovendien gaat de wiskundige taal uit van eenduidige symbolen, 4 is ‘vier’, al zegt de een er ‘four’, de ander

De Groene, 2-11-1957

Aen den Hooggeleerden Heere
Prof. Dr. Hans Freudenthal

Opsteller van d’eerste Beginselen van de Kosmostael. —

Strackx kunnen wy dus met de Ruymte converseeren,
En A plus B-kwadraet wordt: Welkom, Kosmoliet!
Al ligt Uw Wysheidt ver van myn beperckt Gebiedt,
Ick ben bereyd Uw vreemde Freudentael te leeren.

Want dit is immers, wat wy, met U, zo begeeren:
Te weten hoe een ander ons Gestuntel ziet
En wat er verder in Godts Sterrenryck geschiedt;
En luckt het misschien niet, wy kunnen ’t toch proberen.

Doch, hooggeleerde Heer, alvorens wy gaen seynen
Met X en Y en Q, zyt ghy er op bedacht,
Dat wellicht niemand op Uw aardsche Vraeghen wacht?
Wy dencken wellswaar langs recht getrocken Lynen,
Maer slaen een vreemd Figuur, wanneer wy onverwacht
Met A plus H-kwadraet in het Heelal verdwynen.

figuur 2: cartoon en gedicht in ‘De Groene Amsterdammer’

‘quatre’ en weer een ander er ‘quattro’ tegen. En wat aangegeven wordt met het symbool ‘bank’ is zonder de context onduidelijk, het woord ‘blad’ heeft afhankelijk van de context twee verschillende meervoudsvormen. Peano heeft in het einde van de negentiende eeuw wiskundige artikelen geschreven met uitsluitend gebruik van wiskundige en logische symbolen. Maar daar heb je niet genoeg aan voor berichten naar onze buitenaardse luisteraars. Toch lijkt de wiskunde een goed begin. En ook Fred Hoyle stelt in zijn sciencefictionroman ‘The Black Cloud’ uit 1957 voor om bij een poging om met buitenaardse intelligentie in contact te komen met natuurwetenschap en wiskunde te beginnen. In de roman ‘Contact’ van Carl Sagan (1985) zoekt de buitenaardse intelligentie contact met ons door als begin de rij van de priemgetallen te zenden.

3 Wiskunde

Freudenthal begint met de begrippen groter en kleiner te introduceren. Natuurlijk kan dit niet axiomatisch, we beginnen met een groot aantal voorbeelden en hopen dat daaruit het begrip wordt herkend. Dus sturen we eenvoudige piepsignalen en een duidelijk ander signaal (door ons aangegeven met @) in de volgende opstelling:

ooo @ o
oooooo @ oo

en zo nog even doorgaand totdat we denken dat de ontvanger begrepen heeft dat @ betekent ‘is meer dan’. Het is duidelijk dat analoog ‘is minder dan’ en ‘is evenveel als’ aangebracht kunnen worden. Ook ‘som’ en ‘verschil’ zijn analoog te behandelen. De natuurlijke getallen worden in het tweetallig stelsel geschreven, het is niet zeker of onze hoorders vingers hebben, en zo ja, vermoedelijk geen tien. Maar voor het gemak van mijn aardse lezers gebruik ik in de voorbeelden onze tientallige notatie.

Met de invoering van getallen en de bewerkingen is een stukje rekenkunde ontwikkeld. Maar in de algebra spelen ‘letters’ een grote rol. Eerst worden letters als variabelen ingevoerd, door regels als:

$a + 2 = 2 + a$
$3 + a = a + 3$
$a + b = b + a$

Daarna worden letters als onbekenden uit vergelijkingen aan de orde gesteld via zinnen als:

$?\, x \,.\, x + 5 = 4$

Freudenthal merkt op dat in de veelal gebruikelijke opbouw van de wiskunde alleen proposities worden gebruikt en geen vragen. In een leerproces zijn deze onontbeerlijk. Daarom worden nu vele van deze zinnen, alle beginnend met een vraagteken en niet voorzien van een antwoord, aan de orde gesteld. Tegelijkertijd worden dus het vraagteken en de letter als onbekende geïntroduceerd. De implicatie is al eerder ingevoerd, en dus kan nu na de vraag duidelijk het antwoord gegeven worden in de vorm:

$?\, x \,.\, x + 4 = 7$
$x + 4 = 7 \;\leftrightarrow\; x = 3$

en zo weer vele voorbeelden.
Daarna komt de introductie van letters als constanten, zoals e, π en zelfs i.
De introductie van complexe getallen gaat als volgt. Eerder zijn het begrip ‘element van’ en de afkorting ‘Rea’ voor reële getallen ingevoerd. Dan wordt van een aantal bekende getallen vermeld dat ze tot ‘Rea’ behoren. Daarna wordt opgemerkt dat i niet tot de reële getallen behoort en $a + b$i met b ongelijk 0 evenmin.
De afkorting ‘Com’ voor complexe getallen wordt ingevoerd en zowel 1 als $a + b$i (nu zonder de beperking dat b ongelijk 0 is) worden gemeld als complexe getallen. Maar ook wordt nog expliciet gemeld dat de reële getallen een deelverzameling van de complexe getallen zijn. Na de opmerking ‘We do not dwell on complex numbers and their arithmetics as they do not cause any difficulty’, volgen nog enkele opmerkingen over de complexe getallen. Ik geef ze niet weer in de Lincossymbolen maar vertaal ze even:
Als a, b en c complexe getallen zijn en a ongelijk 0 is, is er een complex getal x zodat:
$ax^2 + bx + c = 0$.
En de volgende Lincoszin luidt vertaald:
Als a, b en c tot Rea behoren en a positief is, volgt uit het feit dat er een x in Rea is met:
$ax^2 + bx + c = 0$
dat $b^2 - 4ac \geq 0$ en omgekeerd. Als $b^2 - 4ac \geq 0$ dan is er zo’n x in Rea.

Maar hoe werden de reële getallen ingevoerd? We bladeren even terug. Na de natuurlijke getallen ingevoerd te hebben, volgen eenvoudig de gehele negatieve getallen (en de nul); en de operatietekens voor product en quotiënt ook. Het blijkt dat we behoefte hebben aan de logische symbolen voor ‘er is een’ en ‘voor alle’. Maar er is meer nodig, we willen een symbool voor een vraag hebben om situaties als: ‘Is er een t met $t \times t = 2$?’ weer te kunnen geven. Dit wordt bijvoorbeeld gebruikt om via een vraag: ‘Is er een t met $3 \times t = 4$?’ tweetallige oneindig voortlopende breuken in te kunnen voeren. Ook niet-periodieke oneindig voortlopende tweetallige breuken worden via de wortel van twee ingevoerd. Natuurlijk is er nog geen theorie van limieten, maar wijzelf hebben indertijd immers ook met tientallige oneindig voortlopende breuken gewerkt zonder dat we een goede definitie van limiet hadden. Dat moet onze gesprekspartner ook maar kunnen. Opmerkelijk is dat Freudenthal in zijn commentaar bij de invoering van de reële getallen verwijst naar het verschil van de definitie van de reële getallen in de klassieke wiskunde enerzijds en in de intuïtionistische wiskunde anderzijds. Hij is immers als assistent van Brouwer naar Nederland gekomen.

In het hoofdstuk over wiskunde komen nog moeilijke zaken aan de orde als de invoering van variabelen - de moeilijkheden zijn uit de didactiek bekend - en van het begrip verzameling, waarbij het gevaar van de invoering van paradoxen op de loer ligt. Na 34 bladzijden wiskunde is een volgend onderwerp aan de beurt.

4 Tijd en Gedrag

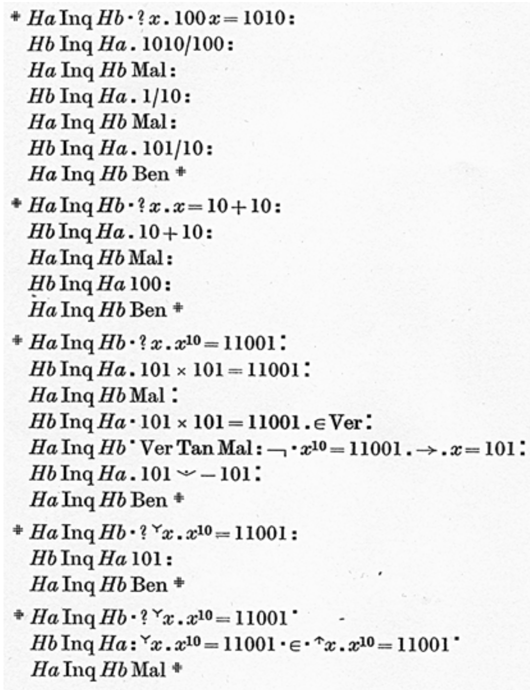
Bij het begrip ‘tijd’ hoort ook het begrip ‘gebeurtenis’. Nu wordt een klok ingevoerd en daarmee kunnen berichten die een verleden tijd of toekomst omvatten gedateerd worden. Ondertussen is het probleem van interpunctie aan de orde geweest. Wanneer we ‘kleinemeisjeskostschool’ gedrukt voor ons zien, kunnen we in de spreektaal door het al dan niet aanbrengen van pauzes tussen de geschreven woorddelen de verschillende betekenissen aangeven. In de wiskunde werken we in zo’n geval met haakjes, vierkante haakjes, accolades, enzovoort. In Lincos worden met dit doel een flink aantal soorten ‘haakjes’ ingevoerd.

Uit de inleiding van het hoofdstuk ‘gedrag’ willen we enkele punten samenvatten. Freudenthal merkt op dat het prematuur is om het menselijk gedrag te willen beschrijven met de eerderontwikkelde regels over wiskunde en tijd. Hij gaat gedrag laten ‘zien’ door gebeurtenissen te ‘vertonen’. Hij gebruikt expres deze termen, omdat hij duidelijk wil maken dat aardse gebeurtenissen niet identiek zijn aan de verzonden radioberichten. Als voorbeeld gebruikt Freudenthal hier het gebeuren in de schouwburg en de relatie tussen toneel en werkelijkheid. Op het toneel fluistert een speler iets tegen een medespeler, maar zo dat de zaal het horen kan. Maar het spel gaat verder met het feit dat de andere toneelspeler in een andere hoek van het toneel het niet gehoord heeft. En dat begrijpen we best. Freudenthal merkt nog op:

> ‘Even in daily life the literal happening of an event is a fiction. All we know about an event is that we remember its happening, and though we do not remember it twice in precisely the same way, we state that it is the same event whenever we remember it.’

In dit derde hoofdstuk ‘Behavior’ gaat het dus over heel andere dan wiskundige en logische zaken. Als voorbeeld noem ik, in een vrije bewerking, de vraag naar het verschil tussen juist en goed. Logische begrippen spreken over ‘waar’ of ‘niet waar’ dus fout. Zo is 2 + 3 = 5 waar en 3 + 5 = 7 fout. Maar ‘goed’ is iets anders dan ‘waar’. Dit wordt duidelijk gemaakt in een klassieke situatie van leermeester en leerling. De leraar vraagt: ‘Hoeveel is 2 × 2?’ De leerling antwoordt: ‘2 × 2 = 2 × 2’. De leraar zegt: ‘Dat is waar, maar niet goed’. De leerling zegt: ‘2 × 2 = 2 + 2’. De leraar zegt: ‘Dat is waar, maar niet goed’. De leerling zegt: ‘2 × 2 = 4’, de leraar zegt: ‘Dat is waar en dat is goed’. En het gesprek tussen leerling en leraar wordt door een derde persoon waargenomen die zijn waarnemingen verwoordt en met een vierde persoon bespreekt.

Maar er zijn nog vele problemen op te lossen: hoe maken we het verschil tussen vermoeden en zekerheid duidelijk, hoe voeren we kans in, hoe maken we duidelijk wat we bedoelen met de zin ‘hij weet hoeveel 2 × 2 is’? Problemen van deze soort worden aangepakt in gesprekken tussen twee of drie personen.

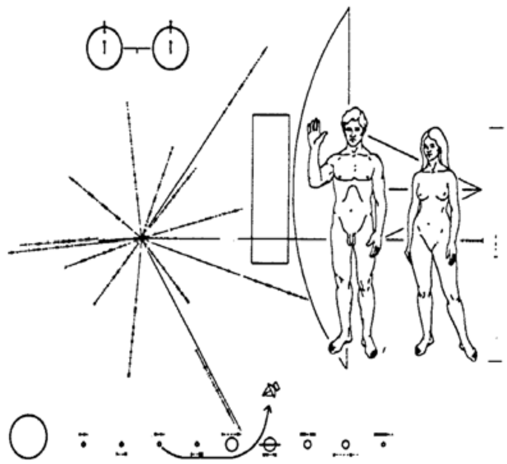

$\# \ Ha \ \mathrm{Inq} \ Hb \cdot ?x . 100x = 1010 :$
$Hb \ \mathrm{Inq} \ Ha . 1010/100 :$
$Ha \ \mathrm{Inq} \ Hb \ \mathrm{Mal} :$
$Hb \ \mathrm{Inq} \ Ha . 1/10 :$
$Ha \ \mathrm{Inq} \ Hb \ \mathrm{Mal} :$
$Hb \ \mathrm{Inq} \ Ha . 101/10 :$
$Ha \ \mathrm{Inq} \ Hb \ \mathrm{Ben} \ \#$
$\# \ Ha \ \mathrm{Inq} \ Hb \cdot ?x . x = 10 + 10 :$
$Hb \ \mathrm{Inq} \ Ha . 10 + 10 :$
$Ha \ \mathrm{Inq} \ Hb \ \mathrm{Mal} :$
$Hb \ \mathrm{Inq} \ Ha \ 100 :$
$Ha \ \mathrm{Inq} \ Hb \ \mathrm{Ben} \ \#$
$\# \ Ha \ \mathrm{Inq} \ Hb \cdot ?x . x^{10} = 11001 :$
$Hb \ \mathrm{Inq} \ Ha . 101 \times 101 = 11001 :$
$Ha \ \mathrm{Inq} \ Hb \ \mathrm{Mal} :$
$Hb \ \mathrm{Inq} \ Ha \cdot 101 \times 101 = 11001 . \in \mathrm{Ver} :$
$Ha \ \mathrm{Inq} \ Hb \cdot \mathrm{Ver \ Tan \ Mal} : \neg \cdot x^{10} = 11001 . \rightarrow . x = 101 :$
$Hb \ \mathrm{Inq} \ Ha . 101 \smile - 101 :$
$Ha \ \mathrm{Inq} \ Hb \ \mathrm{Ben} \ \#$
$\# \ Ha \ \mathrm{Inq} \ Hb \cdot ? {}^{\curlyvee}x . x^{10} = 11001 :$
$Hb \ \mathrm{Inq} \ Ha \ 101 :$
$Ha \ \mathrm{Inq} \ Hb \ \mathrm{Ben} \ \#$
$\# \ Ha \ \mathrm{Inq} \ Hb \cdot ? {}^{\curlyvee}x . x^{10} = 11001 \cdot$
$Hb \ \mathrm{Inq} \ Ha : {}^{\curlyvee}x . x^{10} = 11001 \cdot \in \cdot {}^{\uparrow}x . x^{10} = 11001 \cdot$
$Ha \ \mathrm{Inq} \ Hb \ \mathrm{Mal} \ \#$

figuur 3: fragment uit ‘Lincos’

5 Natuurkunde

In het vierde hoofdstuk gaat het over ruimte, beweging en massa. Na de wiskunde komt nu de natuurkunde aan bod. Coördinaten zijn een essentieel hulpmiddel. Hoe definieer je een eenheid van lengte? In Lincos wordt daarvoor gebruikgemaakt van de Rydbergconstante, een getal dat kan worden afgeleid uit het spectrum van een waterstofatoom. Omdat het in de communicatie een rol kan spelen worden al in een vroeg stadium zaken als het Dopplereffect en zelfs de (speciale) relativiteitstheorie aan de orde gesteld.

Aan het einde van dit eerste deel wordt het al duidelijk dat er nog veel werk te doen is. Freudenthal kondigt een tweede deel aan met hoofdstukken over materie (scheikunde), aarde, leven en een tweede hoofdstuk over gedrag. Dit tweede deel is nooit verschenen en ik weet niet of hij er toch nog hoofdstukken van geschreven heeft. Hoe kwam Freudenthal ertoe zich deze enorme opgave te stellen? Hij noemt een vermakelijk, maar serieus artikel, in 1896 gepubliceerd door Francis Galton, en stelt dat we nu mogelijkheden hebben om berichten te verzenden. En ik voeg eraan toe 'met meer inhoud dan een enkel plaatje van de mens en ons zonnestelsel'.



figuur 4: de eerste materiële boodschap van de mens aan ET: de plaquette op de Pioneer 10 die in 1983 ons zonnestelsel verliet

Maar als ik zelf wat mag interpreteren, want ik heb het hem helaas nooit gevraagd, speelt zijn belangstelling voor verschillen en relaties tussen omgangs- en formele taal een rol; de formele taal dan zoals gebruikt in logica en wiskunde. We kunnen Lincos zien als een proeve van didactiek. In het wiskundeonderwijs hebben we te maken met het aanleren van formele taal met behulp van omgangstaal; Lincos gaat over het aanleren van omgangstaal met behulp van formele taal. Van de lange weg die daarvoor nodig is, kunnen we met Lincos in de hand de eerste stappen zetten.

6 Vervolg

Wanneer we op het internet het woord Lincos intikken vinden we verwijzingen naar het boek van Freudenthal, maar ook naar recente activiteiten aan de Leidse universiteit door professor A. Ollengren. Hij werkt sinds 1997 aan een vervolg en/of een ander begin van het project, onder andere door de rol van de wiskunde voor een deel te vervangen door logica. Maar daarnaast wil hij ook door het zenden van muziek, en wel speciaal in het vijftonig systeem van de gamelanmuziek, proberen contact te krijgen. In de NRC-wetenschapsbijlage van 13 mei 2000 is onder de titel 'Hallo, hier aarde' een uitvoerige bijdrage te vinden. Opmerkelijk is dat in Hoyle's roman 'The Black Cloud' na het overseinen van de 'Encyclopedia Britannica' een uitvoering van de sonate opus 106 van Ludwig von Beethoven wordt verzonden. Het antwoord is verrassend: 'heel interessant, maar het eerste deel zou dertig procent sneller moeten'. De uitvoerende pianiste merkt op dat inderdaad in de partituur een zeer hoge snelheid voor het eerste deel staat aangegeven, maar dat geen normale pianist die grotere snelheid kan halen.

Natuurlijk is het mogelijk dat onze luisteraar naar Lincos de lange opvolging van geluiden die op de radiotelescoop opgevangen zijn, interpreteert als iets wat wij een muzikaal kunstwerk noemen. Vaag staat me bij dat Freudenthal daar ergens ook op zinspeelt. Maar hopelijk zijn er in de cultuur van de ontvanger ook musicologen die net als sommige aardse Bachbewonderaars de compositie gaan analyseren en er veel meer dan alleen maar muziek in vinden.

Toen ik eens in een voordracht opmerkte dat Freudenthal bijna alle kunsten en wetenschappen wel eens beoefend had; geschiedenis en wijsbegeerte, dichtkunst en romankunst, natuurwetenschap en taalkunde, didactiek en politiek, wiskunde en logica, enzovoort, maar nooit een muziekstuk gecomponeerd had, tikte hij mij na afloop op de vingers. In zijn jeugd had hij wel degelijk gecomponeerd. Maar tot zijn grootste composities behoort toch wel de constructie, liever gezegd de compositie van Lincos. Met plezier ben ik er voor dit stukje weer ingedoken en realiseer me nu, meer dan ik in 1960 vermoedde, dat het een opmaat is voor zijn uitvoerige latere publicaties over het wiskundeonderwijs in omgangstaal. Ik herinner alleen maar aan de begrippen 'lokaal bewijs' en 'quasibewijs': je bewijst een stelling in een speciaal geval, maar zo dat de lezer onmiddellijk inziet dat het bewijs in ieder ander geval geheel analoog geleverd kan worden.

Het boek 'Lincos' is een typisch Freudenthalboek, zijn belangstelling en liefde voor wetenschap in het algemeen, en wiskunde, taalkunde en didactiek in het bijzonder komen erin samen. Zal ooit een voltooide editie verzonden en ontvangen worden? Of zou toch de mogelijkheid om beelden te zenden meer moeten worden ingebouwd? Freudenthal merkt op dat voor begrip van ons televisiesysteem toch eerst analytische meetkunde moet worden geleerd en dat vraagt de wiskundige voorbereiding die in Lincos te vinden is. Maar als we denken aan contacten met intelligentie buiten ons zonnestelsel is de geringe snelheid van de elektromagnetische golven in relatie met onze levensduur wel een probleem in de communicatie. Zou snellere communicatie toch mogelijk blijken? Er is nog werk aan de winkel voor de theoretische fysici!

How are you going to communicate with an extraterrastial civilization for which you only presume a sufficient level of intelligence and a state of technology that allows the reception of radio signals? You first have to design a language in order to do so. A language like Lincos, created by Hans Freudenthal at a time way before the first Sputnik was launched. Frederik van der Blij browsed through the book 'Lincos' and describes the structure of the bleep language.

Het Kanaal nummer 100

Wiskunde-onderwijs anno 2000[1]

Hans Freudenthal

In ons land pleegt een nieuw benoemde hoogleraar zich aan zijn collegae voor te stellen met een oratie - ik deed dat in november 1946. De titel was '5000 jaren internationale wetenschap', waarmee ik natuurlijk de wiskunde bedoelde. Zowat tien jaar geleden begon ik over mijn afscheidscollege na te denken en ik koos het onderwerp '50 jaren wiskunde'. Het ziet er bescheidener uit, maar dit was maar schijn, want die vijftig jaren zouden doelen op de halve eeuw, die ik bewust als wiskundige heb beleefd. Hoewel ik, als het te pas kwam, rede en titel al heb aangekondigd, hoewel ik in mijn geest het geheel heb ontworpen, in alle details, gekruid met schittering, geestigheid en wijsheid, zal ik deze rede nooit houden en nog minder publiceren. Ondertussen ben ik er door uiterlijke omstandigheden achter gekomen wat scheef zat in de hele opzet.
Immers als je al tien jaar, voor de tijd afgelopen is, over '50 jaren wiskunde' gaat denken, zul je nooit recht laten wedervaren aan de laatste tien jaar. Feitelijk zal ook aan een deel van het verleden niet meer de verdiende aandacht te beurt vallen. '50 jaren wiskunde' zou echt een arrogante titel zijn geweest. Hoe had ik me kunnen aanmatigen ook maar in de verte de periode 1925-'75 in de wiskunde met mijn eigen mathematisch leven te identificeren? Er zijn, dunkt me, weinig wiskundigen geweest die zich echt tijdgenoten van een halve eeuw mathematisch leven hebben kunnen noemen, en ik ben zeker niet een hunner.

Niet mijn eigen wijsheid behoedde me ervoor, mijn loopbaan met een bedrieglijk overzicht over een halve eeuw mathematisch leven te sluiten. Vijf jaar geleden begon ik een nieuw leven - u ziet, het is nooit te laat - het leven mét het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO). Een nieuw leven, het kan een bekering betekenen, maar dit zou overdreven zijn. Maar het was meer dan een verhuizing van de Uithof naar Overvecht. Het betekende een nieuw milieu, niet aardrijkskundig, maar menselijk, met mensen waarvan ik de meesten nog nooit eerder had gezien, en medewerkers op een gebied waar ik tot dan toe als enkeling had gewerkt.

Onderwijs, in het bijzonder in de wiskunde, was een van mijn eerste interesses. Van Hiele heeft vorig jaar in een artikel bij mijn zeventigste verjaardag opgediept, hoe ik als jong assistent en privaatdocent aan de Universiteit van Amsterdam de moed had een seminarium over wiskundeonderwijs aan te kondigen en te leiden. Had Van Hiele me niet aan deze haast vergeten trek in mijn verleden herinnerd, dan zou ik vast geloofd hebben dat mijn belangstelling voor onderwijs opkwam toen ik begon mijn eigen kinderen te onderwijzen. Het is een feit dat ik gedurende de oorlog ruim de tijd en gelegenheid had de hele literatuur over rekenonderwijs te bestuderen en al het materiaal te verzamelen om er een boek over te schrijven. Waar het uiteindelijk bij bleef was een voorrede van ruim honderd schrijfmachinepagina's.
Een tijd geleden herlas ik het manuscript. Ik was verbaasd daar de hoofdlijnen van mijn denken over wiskundeonderwijs in terug te vinden, hoewel één fundamenteel idee nog ontbrak - de niveaus in het leerproces - iets dat ik later van de Van Hieles zou overnemen.

Mijn eerste uitstapje na 'Victory Europe Day' was liftende van Amsterdam naar Rhederoord, naar de eerste naoorlogse conferentie van de WVO, de Nederlandse sectie van 'New Education Fellowship', bijeengeroepen en georganiseerd door Kees Boeke - van alle 'Zauberberg'-conferenties, die ik ooit meemaakte, de meest enthousiaste, de diepst betoverende.
De wiskundewerkgroep van dezelfde WVO was de hoge school waar mijn ideeën over wiskundeonderwijs in de dan volgende twintig jaren werden gevormd. Mijn levendigste herinneringen gaan terug naar twee leden van die groep die niet meer in leven zijn, Tatjana Ehrenfest-Afanasjewa en Dieke van Hiele-Geldof. Laat ik allen uit deze groep, die mij heden door hun aanwezigheid eren, van deze plaats groeten.

In de jaren vijftig verwijdde mijn horizon zich. Van 1954 tot 1974 werkte ik in ICMI; met vrienden uit de hele wereld raakte ik betrokken bij internationale activiteiten voor het wiskundeonderwijs, bijvoorbeeld de uitgave van 'Educational Studies in Mathematics'. Het was dezelfde periode, die de historie zou kunnen ingaan als 'Opkomst en Ondergang van New Math'. Altijd wilden de mensen maar niet geloven dat ik het meende, wanneer ik ijverde tegen de vernieuwing van wiskunde door nieuwe leerin-

houd, zoals 'New Math'. Een van mijn vrienden noemde mij de advocaat van de duivel. Een ander, die mij beter kende, antwoordde wijselijk en terecht: 'Hij is de duivel zelf'.
Van de oprichting van ICMI af aan is aan de schoolwiskunde verweten dat zij een eeuw of eeuwen bij echte wiskunde ten achter was. Felix Klein dacht het ravijn te kunnen overbruggen met 'schoolwiskunde van hoger standpunt'. In principe had hij gelijk, dunkt me. Hoewel, degene die de schoolwiskunde van een hoger standpunt hoort te zien, is dan de leraar en niet de universiteitsprofessor, en de bekwaamheid tot deze visie is een der dingen, die hij in zijn opleiding zou moeten verwerven.

Zoals u weet, heeft 'New Math' zijn oorsprong te danken aan de lancering van de eerste Sputnik in 1957, en aan de pogingen van OECD om onderwijs technocratisch te beïnvloeden. Het is jammer dat OECD na vijftig jaar ICMI, haar vertrouwen stelde in hen, die geloofden dat een eeuw achterstand door een eeuw leerinhoud kon worden overbrugd. Wiskunde is meer dan inhoud, wiskunde is een wijze van denken, en zich op de inhoud concentreren is de veiligste weg om te bereiken dat *plus cela change, plus cela reste la même chose*.

Van begin af aan heb ik in de 'Commissie Modernisering Wiskunde' (CMLW) meegewerkt, en sinds 1969 ben ik er voorzitter van. In deze periode heeft de visie op wiskundeonderwijs van zowel die commissie als van mezelf zich verbreed, om ten slotte kleuter- en basisschool te omvatten. De CMLW bestaat nu vijftien jaar, tweederde van die tijd als werkgroep van enthousiaste amateurs en in het laatste derde ondersteund door het IOWO.

Vergelijkt men internationaal de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs sinds het begin van de jaren zestig, dan vallen bij het onze drie dingen op.
Ten eerste, hoge prioriteit voor heroriëntering van onderwijsgevenden.
Ten tweede, naar verhouding weinig invloed van de zogenaamde 'New Math' in het voortgezet onderwijs, en geen invloed in het basisonderwijs.
Ten derde, een snel groeiend aantal leerlingen dat in het voortgezet onderwijs wiskunde kiest.
Zonder twijfel is het wiskundeonderwijs bij ons door het werk van de CMLW beïnvloed, hoewel veel minder dan we ons hadden voorgesteld en gewenst, en vaak averechts. Laten we eerlijk zijn, zo vergaat het nu eenmaal vernieuwingspogingen in het onderwijs overal ter wereld en in elk tijdperk.

Onderwijs moet veranderen omdat de maatschappij verandert. Vanaf onmiddellijk na de oorlog heb ik in talrijke commissies, subcommissies, comités en werkgroepen gezeten om regering, universiteit, faculteit en andere lichamen te helpen adviseren. Ik zag tal van nieuwe wetsontwerpen, wetten, Koninklijke besluiten, reglementen de revue passeren - enkele die effect sorteerden, de meeste ineffectief of van averechtse uitwerking. Onderwijs is een geweldig systeem met zijn eigen wetten van reactie op, en immuniteit tegen maatregelen van buiten, een systeem dat zijn eigen leven leidt. Het is allesbehalve ongevoelig, het is geweldig vatbaar voor invloeden, als je maar weet waar en hoe, maar niemand weet het. Of veeleer: zij die het weten, weten niet dat ze het weten, en zij die denken dat ze het weten, kunnen zich schromelijk vergissen.

De geschiedenis van het onderwijs is er een van vernieuwing. We weten heel wat van hoe vernieuwingen zich voltrekken en waarom; we weten weinig over hoe je vernieuwing stuurt. De lacunes in onze ervaring kunnen niet door theoretici achter het bureau gevuld worden. Vernieuwing van opvoeding en onderwijs is een leerproces van de maatschappij zonder leermeester, of veeleer waar iedereen leermeester is van zichzelf en van alle anderen.

De enige manier, om opvoeding en onderwijs te vernieuwen is het eerlijk te proberen, en het middel om het te volbrengen, is weer opvoeding en onderwijs. De opvallendste trek van de benadering van het IOWO is integratie, leerplanontwikkeling als interactie van allen die bij het leerproces betrokken zijn, leerlingen, onderwijzenden, ouders, opleiders, her- en bijscholers, studenten en hun leraren, begeleiders, innovatoren, en lest best, leerplanontwikkelaars.
Zulk een benaderingswijze is een doorn in het oog van allen die van zuivere structuren houden, met indelingen en onderverdelingen, schotjes en laatjes. Ik geef toe, structuur is nodig, dringend nodig, vooral na de jaren van wilde groei, die onze verzorgingsstructuur heeft gekend. Wilde groei kan door bulldozers ingetoomd worden, of door antibiotica. Een andere manier is er een Frans park van te maken, met fraaie structuren van geknipte en gekapte bomen en bosjes, en ten slotte is er nog die van de liefdevolle hovenier, die onkruid weet te onderscheiden van bloemen, groente en vruchtdragende gewassen. Maar ik geef toe, opvoeding van mensen is geen tuinieren, en het onderscheid tussen goed en kwaad is moeilijker in opvoeding dan in land- en tuinbouw.

Structuur is een dringend vereiste, vooral als een vehikel van machtige denkbeelden in opvoeding en onderwijs. Een vehikel, maar dan ook niet meer dan dat. Of iets in een voorbedachte structuur past kan nimmer een criterium voor deugdelijkheid zijn. In een van zijn befaamde nota's maakt minister Van Kemenade onderscheid tussen ontwikkeling als een proces binnen een heersende structuur en innovatie als de heersende structuren doorbrekend. Leerplanontwikkeling, zoals door het IOWO begrepen, is van het tweede soort, een groeiende boom, die met zijn wortels en takken, onder en boven het oppervlak alle grenzen schendt die op het oppervlak netjes zijn uitgetekend.

Dit is niet zomaar beeldspraak. Integratie was en is IOWO's beginsel en recht van bestaan. Laat ik van deze plaats allen uit het veld groeten, die enthousiast met het IOWO samen hebben gewerkt en die het willen (blijven) doen onder alle omstandigheden. We hebben samengewerkt en iets totstandgebracht - laten we dit in alle nederigheid uitspreken zolang het nog kweken en wieden is. Maar iets mogen we stellen: we hebben één goed ding geleerd om het aan anderen over te brengen - integratie van het onderwijsveld.
Ik hoop en vertrouw dat de nieuwe Stichting voor de Leerplanontwikkeling (SLO) deze op integratie gerichte traditie van het IOWO zal voortzetten. In de naaste toekomst zie ik de SLO niet als nieuw bureaucratisch lichaam, maar als een inspirerende kracht in het onderwijsveld.

De benadering van het IOWO is nog in een andere dimensie integraal: wiskunde is zo breed mogelijk geïnterpreteerd, met wortels en takken in elk ander vakgebied én in het leven van het kind, en dat brengt me tot het eigenlijke onderwerp van deze lezing.

Enkele maanden geleden toen de medewerkers van het IOWO de discussie over het programma van deze dag inzetten, vroeg men mij er met een lezing toe bij te dragen met de titel 'Wiskundeonderwijs in het jaar 2000'. Natuurlijk, wie een oratie over '5000 jaar internationale wetenschap' hield en een afscheidscollege '50 jaren wiskunde' heeft beraamd, zou niet vervaard mogen zijn voor zo'n kleintje als 'Wiskundeonderwijs in het jaar 2000'. Desalniettemin weigerde ik. Zou het niet het toppunt van arrogantie zijn? Toen begon ik na te denken, en het viel me op, dat je, wanneer je over opvoeding en onderwijs denkt, altijd over de toekomst denkt. Het jaar 2000, is het te ver weg, te ambitieus ver weg? Neen, het is te dichtbij.

Enkele maanden geleden bladerde mijn vrouw in een oud tijdschrift en vond daar een rapport over een lezing die ik in 1946 had gehouden. Het was een vreemde gewaarwording. Geen voorspelling die uitgekomen was, neen. Ik zou zeggen: iets wat toen een diepe gedachte leek en inmiddels een trivialiteit is gebleken. Zulks is ook de gang van zaken in de wiskunde geweest van de eerste beginselen af aan, de gang van zaken ook in opvoeding en onderwijs, en het is een van de redenen waarom wiskunde en onderwijs zo nauw verbonden zijn.

Talloze malen is mij gevraagd, waarom er een instituut als het onze voor de wiskunde bestaat en voor geen ander vak. 'We zijn eerder begonnen', zei ik. Hoeveel eerder? In 1971, toen het IOWO werd opgericht? Neen. In 1961, toen de CMLW werd ingesteld? Neen. In 1908 toen door Felix Kleins activiteit ICMI tot stand kwam?
Neen. In de negentiende eeuw, toen de drie prominente Duitssprekende pedagogen, Herbart, Pestalozzi, Froebel wiskundigen waren? Neen. Wij zijn tweeënhalfduizend jaren eerder begonnen. Preciezer ongeveer 400 v.Chr. Denk erover, de eerste les die we uit geschiedenis en literatuur kennen is de wiskundeles die Socrates aan Menons slaaf doceerde - de socratische les.

Maar hé, zult u zeggen, wat deed u dan ondertussen, al die tweeënhalfduizend jaar? Wel, gedurende 2500 jaren kreeg de maatschappij al het wiskundeonderwijs dat die maatschappij verdiende. Maar niet precies. De mensen krijgen altijd onderwijs dat een generatie ten achter is, te weten het generatieverschil van onderwijzenden en onderwezenen, en als men over onderwijs nadenkt, denkt men over wat er over een generatie na heden zal geschieden.

Daarom is 'Wiskundeonderwijs in het jaar 2000' een te kort bestek. Het moet een generatie zijn, een derde van een eeuw, 2010 in plaats van 2000. Maar 2010 is geen rond getal. Laat ik 2000 zeggen, als ik 2010 bedoel.
Wat nu te voorspellen? Hoe zal het wiskundeonderwijs er in 2000 uitzien? Er is een simpel antwoord. Er is geen wiskundeonderwijs meer in 2000, het is verdwenen. Er is geen vak meer, wiskunde geheten, geen wiskundeles op het rooster, geen wiskundeboekje om te onderwijzen. Zeg niet: 'de advocaat van de duivel'. Ik ben de duivel zelf.

Als ik terugkijk op mijn activiteit bij het IOWO en u me vraagt wat ik denk dat mijn belangrijkste bijdrage was, dan zeg ik: hen met mijn gezag als wiskundige garanderen dat hetgeen zij aan het ontwikkelen waren, echte wiskunde is, dat om jezelf als wiskundige waar te maken, je geen minderwaardigheidscomplexen bij anderen hoeft te kweken door middel van verzamelingenleer propositie-calculus, groepentheorie, vectorruimten en andere hoogdravende onverteerde theorie, dat je wiskunde overal kunt ontdekken, met je blote oog en je gezond verstand, dat het het kenmerk van wiskunde is, zo voor zich zelf te spreken, dat je je niet hoeft uit te sloven, om anderen ervan te overtuigen dat het waard is, om te kennen, te leren, te onderwijzen. Dit nu is het soort wiskunde dat we in Wiskobas zijn begonnen te ontwikkelen en dat Wiskivon gaat voortzetten. Mijn bescheiden verdienste is het geweest het af te stempelen als echte wiskunde.

Als wiskunde is het zo echt en zo overtuigend dat ik er zeker van ben dat het in de toekomst wordt onderwezen. Maar tegelijkertijd en om dezelfde redenen is het het soort dat je niet als losstaand vak kunt onderwijzen. Het is er om beleefd en uitgeleefd te worden, net als lezen, schrijven, knutselen, tekenen, zingen, ademhalen, in een geïntegreerd onderwijs. In het algemeen vormend onderwijs zal er in 2000 meer wiskunde worden opgedaan dan ooit tevoren, al zal het niet als afzonderlijk vak onderwezen worden, tenzij op hogere leeftijden, in gespecialiseerd onderwijs, waarvan dan misschien meer kinderen dan nu zullen profiteren. Vraag dan niet hoeveel wiskunde een kind kan slikken. Vraag wel op welke wijze wiskunde in het onderwijs kan bijdragen tot de menselijke waardigheid van het kind.

Het is voor mij een geweldige, tot diepe dankbaarheid verplichtende ervaring geweest, dat gedurende de laatste vijf jaren, de IOWO-jaren, een groep van jongeren, gemiddeld half zo oud als ik, mij als leidsman en raadgever hebben aanvaard. Het was een wonderbaarlijk leerproces van vijf jaar - het komt mij voor, nog meer voor mij, de oude man, dan voor u. In allerlei verhaaltjes heet ik de vader van het IOWO. Daar klopt niets van. Als ik iets was, dan was ik de grootvader. Denk erover na, er schuilt méér wijsheid in wat een grapje lijkt.

Als een kind plotseling ziek wordt en er is geen dokter te bereiken, als het zoek is en het wordt steeds maar later, en het is jouw kind, en als u ooit vader of moeder was, dan weet u wat dit betekent. Als u grootouder bent hoort u wel de volgende dag per telefoon of volgende week als u ze bezoekt, wat er aan de hand is geweest en hoe alles zich oploste, en dat is dan het verschil tussen ouders en grootouders.
IOWO is niet ziek, het voelt zich zo lekker als altijd of nog lekkerder. Het is niet zoekgeraakt, u ziet het in functie. Er dreigde gevaar, althans het leek boven ons hoofd te zweven. Een onweerswolk dreef over en ik hoop voorgoed.

Terecht? U weet het verschil tussen ouders en grootouders - ik had het er net over. Binnen enkele weken zal ik wel horen hoe alles op zijn pootjes terechtkwam. Moet ik hier de aarzelingen, de bezorgdheid van IOWO's ouders vertolken? Ik heb er een etmaal mee geworsteld. Deze lezing was een boodschap vol vertrouwen. Ik koester een diep geloof in mensen, in de jeugd, in het jaar 2000, dat de meesten uwer nog zullen beleven. Mijn laatste woorden moeten geen spoor van twijfelingen doen weerklinken. Waar het op aankomt is of de kinderen en het onderwijs mogen oogsten wat het IOWO in vijf jaren tijds heeft gezaaid en geplant. Ik hoop en vertrouw dat dit zal geschieden.

Wat er dan ook moge gebeuren, in het jaar 2000 is er toch al geen wiskundeonderwijs meer, dankzij het IOWO of welk instituut dan ook het baanbrekende werk voortzet. Maar denk erom, wij zijn 2500 jaar eerder begonnen en dat betekent een uitdaging: Beter werk, meer kritiek en meer verantwoordelijkheidsbesef.

Noot

1 Oorspronkelijk gepubliceerd in 'Euclides' in 1975.

‘Common sense’ rekenen-wiskunde

Marjolein Peltenburg
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Aansluiting zoeken bij de common sense reality *van kinderen is het idee van Freudenthal dat in dit artikel wordt toegelicht. Aan de hand van een lessenserie uit het project ‘Speciaal Rekenen’ van het Freudenthal Instituut wordt beschreven hoe leerlingen uit het speciaal (basis)onderwijs tot een efficiënte aanpak kwamen voor het tellen van ongestructureerde hoeveelheden. De ontdekking van het voordeel van structuur speelt hierbij een cruciale rol.*
Juist die eigen ontdekking maakt dat aansluiting wordt gevonden bij de common sense reality *van kinderen. Zo ervaren zij rekenen-wiskunde als een betekenisvolle activiteit.*

1 Inleiding

> I prefer to apply the term ‘reality’ to that which at a certain stage common sense experiences as real.
> ‘Real’ is not intended here to be understood ontologically (whatever ontology may mean), therefore neither metaphysically (Plato) nor physically (Aristotle); not even, I would even say, psychologically, but instead commonsensically as when one uses is meant by the one who uses the term unreflectingly. It is not bound to the space-time world. It includes mental objects and mental activities. (pag.17)

Freudenthal (1991) legt uit dat wiskunde zich spontaan ontwikkelt bij het jonge kind. Wiskunde maakt al vroeg deel uit van de *common sense reality* en de wiskundige taal van de *common language of everyday life*. In het reken-wiskundeonderwijs zou daarom moeten worden aangesloten bij de *common sense reality* van kinderen. Freudenthal spreekt in dit verband over ‘Mathematics starting and staying in reality’.
Het idee van aansluiting zoeken bij de *common sense reality* van kinderen is voor mij gaan leven door ervaringen die zijn opgedaan in het project ‘Speciaal Rekenen’ van het Freudenthal Instituut (in samenwerking met de KPC- en CED-groep). In dit project staat de invoering van het realistisch reken-wiskundeonderwijs in het speciaal (basis)onderwijs, afgekort S(B)O, centraal.

Sinds 1998 wordt een onderscheid gemaakt in speciaal onderwijs en speciaal basisonderwijs. Het speciaal onderwijs wordt bezocht door lichamelijk, zintuigelijk of verstandelijk gehandicapte leerlingen en leerlingen met gedragsstoornissen. Het voormalige LOM- en MLK-onderwijs is gefuseerd tot speciaal basisonderwijs.[1]
De leerling uit het LOM-onderwijs (Leer- en Opvoedingsmoeilijkheden) heeft in principe een normale intelligentie, maar de prestaties blijven achter bij het potentieel. De oorzaken hiervan liggen met name in de pedagogische en sociaal-emotionele sfeer. Het gaat bijvoorbeeld om leerlingen met licht hersenletsel (ADHD), of problematische thuisomstandigheden. De MLK-leerling (Moeilijk Lerend Kind) heeft een lage intelligentie, wat leidt tot achterblijvende resultaten. Het werktempo van deze leerlingen ligt doorgaans aanzienlijk lager dan dat van de gemiddelde leerling (Boswinkel & Moerlands, 2001).[2]
De opvatting dat leerlingen baat hebben bij een eenduidige aanpak, waarbij de leerstof wordt opgedeeld in kleine stapjes, is in het S(B)O nog steeds actueel. Bovendien wordt in het reken-wiskundeonderwijs relatief veel tijd en energie gestoken in het maken van opgaven en relatief weinig in het opdoen van kennis en ervaringen die nodig zijn om deze formele bewerkingen met begrip te kunnen oplossen (Boswinkel & Moerlands, 2001). De invoering van een realistische reken-wiskunde*methode* betekent dus niet per direct een garantie voor de invoering van realistisch reken-wiskunde*onderwijs*.

Het project Speciaal Rekenen stelt zich tot doel een bijdrage te leveren aan de implementatie van het realistisch reken-wiskundeonderwijs in het S(B)O. Hiertoe worden door medewerkers van het project lesexperimenten uitgevoerd. Deze lesexperimenten dienen als kapstok voor wat er met deze leerlingen bereikt kan worden. Uit de experimenten blijkt dat ook - of misschien wel juist - leerlingen in dit type onderwijs gebaat zijn bij realistisch reken-wiskundeonderwijs. Het onderwijs komt immers dichterbij de dagelijkse realiteit te staan, in plaats van dat er een discrepantie blijft bestaan tussen de schoolse en de thuissituatie. Over de scheiding tussen rekenen-wiskunde op school en daarbuiten zegt Freudenthal (1991) het volgende:

> The specific relation between content and form - the emphasis on form, reinforced by the existence of a particu-

larly efficient language - favours the growth of watertight membranes between mathematical and 'outside' contents, between mathematical language and everyday life of more technical languages. And this takes place in spite of the fact that mathematics could be an outstanding example of broad-minded integration into reality. (pag.18)

Het behoud van rekenen-wiskunde als onderdeel van de *common sense reality*, zoals die zich zo spontaan bij jonge kinderen ontwikkelt, heeft als voordeel dat het geleerde op school ook praktische gebruikswaarde krijgt. Juist zwakke leerlingen kunnen hiervan profiteren, want dit zijn vaak de leerlingen die moeite hebben met het leggen van verbanden. Bovendien wordt door de aansluiting bij de *common sense reality* bevestigd dat leerlingen rekenen-wiskunde op school als betekenisvolle activiteit ervaren.

2 Realistisch reken-wiskundeonderwijs in het S(B)O

Nadat de meeste basisscholen zijn overgegaan op het gebruik van een realistische reken-wiskundemethode volgen nu ook de S(B)O-scholen. Het gaat daarbij om de invoering van een realistische basisschoolmethode, aangezien er geen realistische methode voor het S(B)O is ontwikkeld.
Uit een vooronderzoek van het project Speciaal Rekenen is gebleken dat de realistische reken-wiskundemethoden, die zijn ontwikkeld voor het regulier basisonderwijs, redelijk goed bruikbaar zijn binnen het S(B)O. Het gebruik van contexten, de betere aansluiting op de belevingswereld van kinderen en de grotere praktijkgerichtheid worden door leerkrachten erg gewaardeerd. De geconstateerde knelpunten betreffen met name het gebrek aan overzicht op leerlijnen in de methode, een te hoog tempo of een te groot abstractieniveau van de methode (Boswinkel & Moerlands, 2003).

Het project Speciaal Rekenen biedt ondersteuning bij de invoering van het realistisch reken-wiskundeonderwijs door in te spelen op de resultaten uit het vooronderzoek.
Dit krijgt gestalte door het in kaart brengen van de leerlijnen uit de drie meest gebruikte realistische reken-wiskundemethoden in het S(B)O. Hiertoe worden zogenoemde leerlijnoverzichten ontwikkeld.

Naast deze leerlijnoverzichten worden extra lessenseries ontwikkeld. Enerzijds gaat het om lessenseries als aanvulling op de methoden, anderzijds betreft het lessenseries als alternatief voor onderdelen uit de reken-wiskundemethoden die problemen opleveren voor S(B)O-leerlingen. De lessenseries worden ontwikkeld op basis van lesexperimenten. Hierbij vindt een nauwe samenwerking plaats met leerkrachten uit het S(B)O.

3 Ontdek het voordeel van structuur

Een van de onderwerpen waarop het project Speciaal Rekenen zich richt, is het structureren en in het bijzonder het ontdekken van de voordelen van structuur. Een lessenserie die is ontwikkeld rond dit onderwerp is getiteld 'Ontdek het voordeel van structuur in de kralenlessen' (Moerlands & Peltenburg, 2004).[3] Deze lessenserie is gemaakt om leerlingen zelf het voordeel van structuur te laten ontdekken. Met deze eigen ontdekking van de voordelen van structuur wordt gewerkt aan: (1) de ontwikkeling van het getalbegrip, (2) het met inzicht leren rekenen tot honderd, en (3) het loskomen van het één voor één tellen. Hoewel de eerstgenoemde doelstellingen kunnen worden beschouwd als doelstellingen die over een langere termijn worden gerealiseerd, kan de laatstgenoemde worden opgevat als concreet en direct na te streven doel van de lessenserie. Loskomen van het één voor één tellen is voor veel leerlingen niet eenvoudig. Er zijn verschillende redenen om één voor één te blijven tellen:

– Eén voor één tellen biedt garantie op een antwoord en in veel gevallen zal dat antwoord correct zijn. De leerlingen houden vast aan een (schijn)zekerheid.
– Sommige leerlingen tellen zo snel, dat er geen noodzaak is om over te gaan op een andere strategie.
– Om verkort te kunnen tellen is het nodig om structuren te herkennen. Sommige leerlingen hebben hier geen oog voor.
– Er zijn leerlingen die wel structuur herkennen, bijvoorbeeld in de vorm van vingerbeelden, maar zij zien niet in hoe deze kan worden gebruikt bij het oplossen van een rekenprobleem (Boswinkel & Moerlands, 2003).

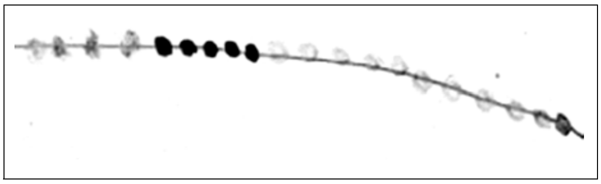
In de lessenserie 'Ontdek het voordeel van structuur in de kralenlessen' wordt een situatie gecreëerd waarin leerlingen worden gestimuleerd om na te denken over een efficiënte aanpak voor het tellen van ongestructureerde hoeveelheden.

figuur 1: de kralenketting als meetinstrument

Eerst krijgen de leerlingen de opdracht om in tweetallen een kralenketting te rijgen die zij gaan gebruiken als meetinstrument (fig.1). De leerlingen zijn vrij in het ontwerp dat zij kiezen. Wanneer de kralenketting af is, gaan zij er voorwerpen mee opmeten. Dat wil zeggen dat de leerlingen van enkele voorwerpen bepalen hoeveel kralen lang deze zijn en de aantallen kralen noteren. Door het meten van diverse voorwerpen worden de leerlingen geconfronteerd met de *sterkte* van hun ontwerp, ofwel met de mate waarin zij structuur in hun kralenketting hebben aangebracht (fig.2).

figuur 2: structuur in de kralenketting

De ervaring met het steeds weer tellen van alle kralen draagt bij aan de ontdekking dat structuur voordeel met zich meebrengt. Immers, het keer op keer tellen van de kralen is een tijdrovende zaak, zeker wanneer je wordt afgeleid en je opnieuw moet beginnen. Hierdoor kunnen leerlingen zich gaan afvragen of het tellen van de kralen op een efficiëntere manier mogelijk is.
Om deze reflectieve houding te stimuleren worden de leerlingen uitgedaagd om opnieuw een kralenketting te rijgen, die zij nog beter geschikt vinden om te bepalen hoeveel kralen lang iets is. Om het maken van bewuste overwegingen te prikkelen, werken de leerlingen eerst aan een ontwerptekening van hun nieuwe kralenketting (fig.3).



figuur 3: ontwerptekening van een kralenketting

Alvorens het ontwerp uit te voeren krijgen klasgenoten de gelegenheid om (kritische) vragen te stellen, zodat het ontwerp eventueel nog bijgesteld kan worden. Wanneer de nieuwe kralenketting is geregen kan de proef op de som worden genomen: Hoe goed werkt de nieuwe kralenketting als meetinstrument? Kan er handig mee worden bepaald hoeveel kralen lang een voorwerp is?
De lessenserie wordt afgerond met een klassikale bespreking waarin de kralenkettingen van de leerlingen en de manier waarop ermee is gemeten, centraal staan. Leerlingen kunnen laten zien hoe zij gebruikmaken van structuur tijdens het meten. Zij tellen bijvoorbeeld met sprongen van vijf of tien (fig.4). Ook lichten de leerlingen hun keuzen toe.
Zo was er in een van de lesexperimenten een tweetal dat hun keuze voor een kralenketting met vijfstructuur als volgt beargumenteerde: ‘Omdat dat makkelijk tellen is’.

figuur 4: tellen met sprongen

Na afronding van de lessenserie is het uiteraard van belang om als leerkracht regelmatig terug te verwijzen naar de lessen. De ontdekking van het voordeel van structuur kan later nog goed van pas komen.

4 Structureren

In het onderwijs wordt veel gebruikgemaakt van didactische modellen die een zekere structuur bevatten, zoals het rekenrek met zijn vijf- en tienstructuur. De structuur in de gebruikte modellen is echter niet door de leerling zelf ontworpen. Leerlingen worden geconfronteerd met de modellen vanuit de veronderstelling (van volwassenen) dat de aangebrachte structuur handig is bij het tellen en het latere rekenen ermee.
Voor leerlingen hoeft het niet vanzelfsprekend te zijn dat de voorgeschreven structuur voordeel[4] heeft. Zo blijven zij soms één voor één tellen, ook al is er een zekere structuur in de te tellen objecten aanwezig. Deze aanpak is *top-down* te noemen, aangezien het uitgangspunt voor het onderwijs wordt gevormd door de formele wiskundige kennis van de expert die in een model is gevat.

Gravemeijer (1994) zegt over het inzetten van dergelijke modellen dat er geen expliciet verband wordt gelegd met de *informal situated knowledge* van de leerling. Ook wanneer dit verband wel wordt aangebracht, bevatten de betreffende modellen een *top-down* element: de formele kennis wordt als gegeven beschouwd en het intermediaire model is een afgeleide van die formele wiskundige kennis. In het realistisch reken-wiskundeonderwijs wordt juist meer een *bottom-up* aanpak nagestreefd. Dit houdt in dat leerlingen hun eigen modellen construeren die de basis vormen voor niveauverhoging. Het gaat daarbij om meer formele niveaus van wiskunde bedrijven. De vraag is nu of leerlingen in het speciaal basisonderwijs in staat zijn om zelf modellen te ontwikkelen, om deze in te zetten en daarvan te profiteren.

Met de lesexperimenten die zijn uitgevoerd rond de lessenserie ‘Ontdek het voordeel van structuur in de kralenlessen’ is aangetoond dat leerlingen in het speciaal basisonderwijs in staat zijn om zelf structuur aan te brengen in een ongeordende hoeveelheid, niet omdat dat moet, maar omdat zij zelf het voordeel ervan al ontdekkend ervaren. Door het tellen van ongestructureerde hoeveelheden kralen worden de leerlingen bewust van de gemakken van structuur, en met name van de vijf- en tienstructuur. Leerlingen ontwikkelen zodoende een eigen model, een model met een zekere structuur voor het snel en efficiënt bepalen van een hoeveelheid. In eerste instantie heeft het gebruik van dit model alleen betrekking op de contextspecifieke situatie van het meten met de kralenketting. Later kan dat model uitgroeien tot een model voor wiskundig redeneren op een meer formeel niveau (Gravemeijer, 1994).

5 Structureren, organiseren en ordenen

Het aanbrengen van structuur is een methode om te organiseren, wat kenmerkend is voor rekenen-wiskunde. Freudenthal (1991) legt het als volgt uit:

> … in no other field does organising display itself in such purity, impose with such force and infiltrate so profoundly as it does in mathematics. Mathematics grows, by its self-organising momentum. (pag.15)

In de visie van Freudenthal (1983) zouden leerlingen met die verschijnselen in aanraking moeten worden gebracht die om een zeker ordeningsmiddel vragen, zodat zij van daaruit het ordeningsmiddel leren hanteren. Om dit mogelijk te maken, kan een beroep worden gedaan op de ‘didactische fenomenologie’.
In de didactische fenomenologie van ‘lengte’ en ‘getal’ bevinden zich de verschijnselen die door ‘lengte’ en ‘getal’ geordend worden.
Stel dat de leerkracht ‘structuur’ wil onderwijzen, dan gaat het er niet om dat het begrip structuur wordt geconcretiseerd, maar dat er wordt gezocht naar verschijnselen die leerlingen ertoe aanzetten het mentale begrip structuur te vormen. Freudenthal spreekt hier niet over begripsverwerving, maar over de constitutie van mentale objecten. Hij benadrukt dat het werken met mentale objecten aan het expliceren in begrippen voorafgaat.

In een didactische fenomenologie worden leerlingen geconfronteerd met bepaalde verschijnselen die om een zekere ordening vragen. Realistisch reken-wiskundeonderwijs heeft op die manier een probleemoplossend karakter. Door het aanbieden van mooi gekozen contextproblemen krijgen leerlingen de gelegenheid om de wiskunde als het ware opnieuw uit te vinden. In dit proces van ‘geleid heruitvinden’ (ook wel *guided reinvention* genoemd) hebben leerlingen een actieve rol. Gravemeijer (1997) merkt hierover op dat het niet zozeer gaat om het aanbieden van authentieke, uit het alledaagse leven afgeleide problemen. Waar het om gaat, is dat de context waarin het probleem is gegoten door leerlingen als ‘echt’ wordt ervaren, zodat ‘they can immediately act intelligently within this context’. Daarmee is gezegd dat ‘realistisch’ in realistisch reken-wiskundeonderwijs niet noodzakelijkerwijs gelijk staat aan *real-life* (pag.31).

Het geleid heruitvinden heeft een bottom-up karakter. De besproken lessenserie waarin leerlingen zelf het structureren leren herontdekken als middel om grip te krijgen op een onoverzichtelijke hoeveelheid kralen is hier een voorbeeld van. In het proces van heruitvinden gaan leerlingen uit zichzelf ordenen (structureren) en leren op deze manier het ordeningsmiddel (vijf- en tienstructuur) te hanteren.

6 Terugblik

Uit de lesexperimenten rond de genoemde lessenserie wordt duidelijk dat de leerlingen de gelegenheid kregen voor eigen constructies, of beter gezegd: ‘co-constructies’ op basis van een probleem dat zij ondervinden. Het voorvoegsel ‘co’ duidt op het gezamenlijk uitvoeren van mathematische activiteiten. Er werd gediscussieerd en de kinderen werden aangespoord hun ideeën te verdedigen. Leerlingen kozen hun eigen bewoordingen in een betoog of uitleg. Vragen van de leerkracht over handige en efficiënte manieren van tellen en meten, lokten bij de leerlingen een kritische houding uit. Naar aanleiding van discussies in de klas en met de kritiek en ervaringen van andere leerlingen werden hun gedachten en ideeën door ‘reflectie’ op een hoger niveau gebracht. Immers, in de dialoog worden leerlingen gestimuleerd om elkaars ideeën en aanpakken van commentaar te voorzien. Daardoor leren zij te anticiperen op de kritiek van anderen (Nelissen & Tomic, 1996).
De overgang naar een hoger wiskundig niveau wordt, behalve door reflectie, ook bevorderd door uit te gaan van betekenisgeving door leerlingen.

Reflectie en betekenisgeving kunnen beide worden bestempeld als activiteiten van de leerlingen zelf. Het geven van betekenis aan iets om daarmee op een hoger niveau te komen, vereist echter wel dat in het onderwijs van meet af aan wordt begonnen met rekenen-wiskunde dat betekenisvol is voor het kind.

In dit artikel werd uitgelegd dat het door leerlingen zelf laten ontwikkelen van modellen en het kiezen van problemen die vragen om een zekere ordening ertoe bijdragen dat rekenen-wiskunde op school als betekenisvol worden ervaren. In navolging van Freudenthal wordt zo begonnen met rekenen-wiskunde als onderdeel van de *common sense reality* (*starting at reality*) waarmee dit artikel werd ingeleid. Vanuit dat startpunt kan naar meer formele niveaus van rekenen-wiskunde worden toegewerkt, maar blijft de wiskunde onderdeel uitmaken van de *common sense reality* (*staying within reality*).

7 Tot slot

Zoals uit het voorgaande blijkt, is het idee van *common sense* rekenen-wiskunde anno 2005 nog steeds actueel. Misschien moet daarom in plaats van over dé idee worden gesproken over dé idee, dat volgens Van Dale ‘het veronderstelde eeuwige en volmaakte grond- of voorbeeld van iets’ betekent.

Noten

1 www.minocw.nl/rugzakje/speciaal.html
2 De ervaringen die in dit artikel worden beschreven hebben betrekking op het speciaal basisonderwijs.
3 De kralenlessen zijn een ontwerp van F. Moerlands.
4 De in deze alinea uitgelegde subjectieve lading van het begrip ‘didactische modellen’ geldt eveneens voor het woord ‘voordeel’.

Literatuur

Boswinkel, N. & F.J. Moerlands (2001). Speciaal Rekenen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 19*(3), 3-14.

Boswinkel, N. & F. J. Moerlands (2003). Het topje van de ijsberg. In: K. Groenewegen (red.). *Nationale Rekendagen 2002 - een praktische terugblik.* Utrecht: Freudenthal Instituut, 103-114.

Boswinkel, N. & F.J. Moerlands (2003). Rekenen tot 20, getalverkenning tot 100. Realistisch rekenen in het speciaal (basis)onderwijs. *Speciaal Rekenen groep 3, najaar 2003.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht: CD-ß Press (proefschrift).

Gravemeijer, K.P.E. (1997). Instructional design for reform in mathematics education. In: M. Beishuizen, K.P.E. Gravemeijer & E.C.D.M. van Lieshout (eds.) *The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures*. Utrecht: CD-ß Press, 13-34.

Moerlands, F. & M.C. Peltenburg (2004). Ontdek het voordeel van structuur in de kralenlessen. Speciaal Rekenen. Groep 4-5. *Optellen en aftrekken tot 100 en tot 1000*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Nelissen, J.M.C. & W. Tomic (1996). Reflection in Russian Educational Psychology. *Educational Foundations, 25*, 35-56.

Connecting to children's common sense reality is the idea of Freudenthal that will be looked at in this article. A description of a lesson series from the project 'Speciaal Rekenen' of the Freudenthal Institute clarifies how students in special education schools come to an efficient approach for counting unstructured amounts. They discover by themselves how structure can be very convenient to determine a certain amount.
By that very personal discovery a connection is made to the common sense reality of children. In this way, they experience mathematics as a meaningful activity.

Wiskunde en psychologie

- de brug en de kloof tussen Freudenthal en Van Parreren -

Dolly van Eerde
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

De wiskundige Freudenthal besteedt in veel van zijn publicaties expliciet aandacht aan een psychologisch perspectief op het leren en onderwijzen van wiskunde. Hij stond kritisch ten opzichte van het werk van psychologen en onderwijskundigen waar dit het wiskundeonderwijs betrof en stak dit hij niet onder stoelen of banken. In deze bijdrage wordt Freudenthals kritiek op enkele thema's uit de psychologie en de onderwijskunde beschreven. Denkbeelden van Freudenthal over de psychologie worden verhelderd door deze te confronteren met die van de psycholoog Van Parreren met wie hij jarenlang discussies voerde in de stuurgroep van het project 'Kwantiwijzer'. Zowel raakpunten als enkele geschilpunten tussen beiden passeren de revue. Ook de rolverdeling tussen wiskunde en psychologie in het project komt aan bod. Freudenthal en Van Parreren waren het op een aantal punten volstrekt oneens maar konden toch tot een zekere consensus komen omdat zij een aantal gemeenschappelijke uitgangspunten hadden. De geschiedenis laat zien dat deze hun oorsprong vinden in de jaren dertig; sinds die tijd zijn er al min of meer intensieve contacten tussen bepaalde wiskundigen en psychologen in Nederland. Er wordt bepleit om enkele interessante raakpunten uit de realistische visie op wiskundeonderwijs en uit de cultuur historische school binnen de psychologie verder uit te werken.

1 Inleiding

Freudenthal heeft in veel van zijn publicaties over rekenwiskundeonderwijs aandacht besteed aan psychologische en onderwijskundige aspecten. Dit deed hij op een eigenzinnige wijze en in originele bewoordingen. Psychologen en onderwijskundigen die het terrein van het rekenwiskundeonderwijs betraden zonder vakdidactische kennis van zaken, konden op scherpe aanvallen van Freudenthal rekenen. Zo merkt hij in een kritische beschouwing over het is-teken op dat men liefst al aan kleuters zou willen leren dat hierbij aan beide zijden hetzelfde staat.

> Het leek zinsontleding oefenen met een kind dat net leert praten. In de onderwijs*kunst* is dit alweer van de baan, maar inmiddels zijn onderwijs*kunde en psychologie* erdoor gegrepen als door een openbaring.

Niet alleen in zijn wetenschappelijke en vakpublicaties trok Freudenthal ten strijde tegen misvattingen van psychologen en onderwijskundigen, ook in zijn columns zoals in de NRC kreeg menig sociaal wetenschappelijk onderzoeker een veeg uit de pan, een enkeling kreeg een complimentje. Vermoedelijk begon Freudenthal dan ook met de nodige scepsis aan een samenwerking met de psycholoog Van Parreren binnen het project 'Kwantiwijzer'. Maar na een aarzelende start werkten beiden jarenlang samen in dit project. Zij waren het op een aantal punten volstrekt oneens maar konden toch tot een zekere consensus komen omdat zij een aantal fundamentele uitgangspunten deelden.

In dit artikel probeer ik bepaalde denkbeelden van Freudenthal over de psychologie te verhelderen door deze te confronteren met die van Van Parreren.

Ik bespreek eerst kort een aantal thema's die terugkeren in Freudenthals kritische beschouwingen over psychologen en onderwijskundigen. De kern van het betoog gaat over de raakpunten in de denkbeelden van Freudenthal en Van Parreren in het project en de punten waarop ze van mening verschilden. Aan de hand van illustraties laat ik zien hoe dit gestalte kreeg. Ook de rolverdeling tussen wiskunde en psychologie in het project 'Kwantiwijzer' komt aan bod. Aan het slot geef ik voorbeelden van onderwerpen die vanuit een gemeenschappelijk perspectief van de wiskunde en de psychologie om uitwerking vragen. Tevens probeer ik een mogelijke verklaring te geven voor het feit dat de wiskundige Freudenthal en de psycholoog Van Parreren het tot op zekere hoogte eens konden worden.

Ik baseer me hierbij op de volgende bronnen: diverse publicaties van Freudenthal en Van Parreren (zie literatuurlijst), een reconstructie onderzoek naar het Kwantiwijzerproject (Hetebrij en Van Eerde, 1988), uitvoerige interviews die in het kader van dit onderzoek met beiden gehouden werden (De Vries, 1985), en op eerder analyses uit mijn proefschrift (Van Eerde, 1996).
Ten slotte is er een bescheiden rol voor mijn eigen observaties tijdens de stuurgroep vergaderingen in het Kwantiwijzerproject, waarvan ik projectleider was.[1]

In de hierna volgende tekst gebruik ik de term ‘we’ als het om het projectteam gaat en de term ‘ik’ als het over een persoonlijke ervaring binnen het project gaat.

2 Kritiek op psychologen en onderwijskundig onderzoek

In deze paragraaf besteed ik kort aandacht aan enkele kernpunten uit Freudenthals kritiek op psychologen en onderwijsonderzoek.Voor een uitvoerig overzicht over Freudenthals werk en opvattingen die verband houden met didactiek en curriculumonderzoek, verwijs ik naar Gravemeijer en Terwel (2003).
Freudenthal vond dat er te weinig kritiek was op onderwijsonderzoek dat volgens hem werd geregeerd door allerlei rituelen en de waan van de dag (Freudenthal 1978, pag.77). De kern van Freudenthals kritiek op onderwijsonderzoek en de psychologie heeft te maken met de scheiding die daarin vaak wordt aangebracht tussen vorm en inhoud. Hij was van mening dat je niet goed kunt observeren, geen fatsoenlijke toetsen of relevante theorieën kunt ontwikkelen los van de vakinhoud. Kortom, wie geen kaas gegeten heeft van rekenwiskunde-didactiek dient daarnaar geen onderzoek te doen noch theorie daarover te ontwikkelen.

De grondgedachte dat vorm en inhoud onlosmakelijk met elkaar verbonden dienen te worden, komt treffend tot uitdrukking in zijn beeld van de ‘lege dozen’ van psychologen en onderwijskundigen die vakexperts moeten vullen (Freudenthal 1978, 1991). Hij was ook tegenstander van ‘hard onderzoek’, waarin complexe statistieken worden toegepast. Veel statistiek in dit soort onderzoek noemde hij irrelevant en hij liet een aantal malen zien dat statistische analyses fout werden toegepast. Hij was van mening dat men met statistische analyses wetenschappelijk respect probeert af te dwingen maar dat type onderzoek geen antwoord kan geven op de vragen uit het onderwijs (Freudenthal, 1973). Ook verzette hij zich tegen de zogenaamde ‘objectieve’ toetsen die in onderwijsonderzoek gebruikt worden, omdat ze betrouwbaarheid laten prevaleren boven validiteit. Kortom, bij herhaald meten vind je hetzelfde maar wat je meet blijft duister.
Dit standpunt moet gezien worden in samenhang met zijn opvatting over het belang van discontinuïteiten in het leren. Om deze op het spoor te komen moet de individuele ontwikkeling van leerlingen gevolgd worden. Kortom, onderzoek zou gericht moeten zijn op het observeren van leerprocessen en niet op het testen van objectieve leerresultaten.

In zijn kritiek op de rol van de psychologie keren een aantal namen van bekende psychologen terug. In ‘Mathematics as an Educational Task’ (1973) uit hij zijn teleurstelling over wat de leerpsychologie het wiskundeonderwijs te bieden heeft. In een destijds bekend leerpsychologisch boek (Gagné, 1966) herkende hij niets over wat leren is en voelde hij zich ver verwijderd van wat hij zelf en met anderen had ervaren als *wiskundig leren* (curs. H.F.).

> A feeling of loneliness seized me, is mathematics really so different? I wish that someone who profoundly understands both mathematics and psychology would show us the bridge.
> (Freudenthal 1973, vi)

De leerhiërarchieën die Gagné schetst zijn gebaseerd op een zogeheten taakanalyse, een analyse vanachter het bureau. De eindhandeling wordt middels een logische analyse uiteengelegd in voorwaardelijke deelhandelingen die één voor één kunnen worden aangeleerd. Het leerproces verloopt van simpele naar complexe structuren. (Gravemeijer & Van Eerde, 2004). Dit staat lijnrecht tegenover Freudenthals idee van het mathematiseren van rijke, complexe structuren uit de realiteit naar de abstracte structuren van de wiskunde (Gravemeijer & Terwel, 2003). Gagné’s aanpak via een taakanalyse staat haaks op Freudenthals kerngedachte van wiskunde als menselijke activiteit.

Ook het werk van de psycholoog Bloom werd door Freudenthal op de snijtafel gelegd. Hij maakte diepgaande analyses van Blooms taxonomie voor onderwijsdoelen (zie bijvoorbeeld Freudenthal, 1978, pag.81-92) en oordeelde dat deze volstrekt ongeschikt was voor het wiskundeonderwijs door de kunstmatigheid van de onderscheiden categorieën.
De taxonomie was bedoeld als instrument om de evaluatie van examenresultaten te coördineren. Freudenthal vindt de onderscheiden niveaus echter vaag, iedereen kan er iets anders onder verstaan, en ze vormen een pure simplificatie van het leren van wiskunde. De taxonomie belooft een classificatie van onderwijsdoelen maar is volgens hem een classificatie van vakinhouden naar vermeende niveaus. Over de wiskundige voorbeelden uit de taxonomie zegt hij:

> Their smell remind me of dead stock of the arithmetic department in the college department store of 1900.
> (Freudenthal 1978, pag.86)

Het werk van Gagné en Bloom illustreert Freudenthals overtuiging dat onderwijstheorie niet vanachter het bureau ontwikkeld kan worden. Dit sluit aan bij zijn idee dat het draait om onderzoek *in* het onderwijs en niet *van* het onderwijs.

Ten slotte besteedt Freudenthal in diverse publicaties uitvoerig aandacht aan het werk van een van de grootste psychologen van de twintigste eeuw: Piaget. Ook de studies van Piaget analyseerde Freudenthal uitvoerig (1973 pag.616-676). Ondanks kritiek op zijn werk, had Freudenthal grote waardering voor Piaget. Zijn onderzoek, gebaseerd op nauwgezette observaties van (vaak zijn

eigen) kinderen, was gericht op een beschrijving van de cognitieve ontwikkeling van kinderen. Piagets object van onderzoek was de genetisch epistemologie. Deze gaat over de vraag hoe kennis ontstaat. Freudenthal betreurde het dat Piagets fasentheorie, die descriptief van aard is, zo vaak verkeerd werd geïnterpreteerd en ten onrechte werd toegepast voor instructiedoeleinden.
Freudenthal had vooral kritiek op wat hij de pseudo-wiskundige aspecten van Piagets werk noemde en de verbale instructie bij de taken die vaak misleidend waren voor de kinderen.

3 Freudenthal en Van Parreren in het Kwantiwijzerproject

De wiskundige Freudenthal en de psycholoog Van Parreren hadden jarenlange discussies binnen het 'Kwantiwijzer'project. K. Koster, initiatiefnemer van het project, bracht hen beiden samen in de stuurgroep[2] van dit project, die zeer regelmatig bij elkaar kwam. Ongeveer veertien jaar bleven Freudenthal en Van Parreren het project koers. Freudenthals interesse voor het observeren van het rekenen van kinderen komt in het centrum van de aandacht en Van Parreren kan zijn handelingsmodel verder ontwikkelen en handen en voeten geven. Het ontwikkelwerk verbreedde zich gaandeweg tot een ontwikkelingsonderzoek met een theoretische en praktische opbrengst (zie bijvoorbeeld Van Eerde, 1996; Van den Berg, Van Eerde & Lit, 1992 a en b).
Wat vormde de binding tussen de wiskundige Freudenthal als vertegenwoordiger van Wiskobas en de psycholoog van Parreren als vertegenwoordiger van de cultuur historische school? Op welke punten konden ze het eens worden en waar liepen de meningen uiteen? Alvorens op deze vragen in te gaan, geef ik een korte situatieschets van het 'Kwantiwijzer'project.

4 Kwantiwijzerproject: tegen de stroom op

Kenmerkend voor het Kwantiwijzerproject is dat het op veel punten tegen de stroom van de tijd oproeide, zowel wat betreft de onderzoeksmethodologie als wat betreft het object van onderzoek. De uitgangspunten die rond 1980 binnen het project gekozen werden, weken in alle opzichten af van wat toen gangbaar was, ze spoorden niet met de gangbare opvattingen over diagnostiek, niet met die over testconstructie noch met die over onderwijsonderzoek. In figuur 1 wordt deze tegenstelling schematisch weergegeven (Van Eerde, 1996).

	Opvattingen eind jaren 70	**Uitgangspunten Kwantiwijzer**
Oorzaak probleem	In het kind	In het onderwijsleerproces
Visie op rekenen	Traditioneel mechanistisch	Wiskobas
Object van onderzoek	Basisfuncties	Rekenen van kinderen
Relatie met rekenonderwijs	Indirect	Direct
Object van diagnostiek	Productgericht	Procesgericht (handelingen)
Onderzoeksmethode	Gestandaardiseerd	Interactief
Resultaat	Constaterend: testscore	Prospectief: instructie, hulp

figuur 1

trouw. Hun denkbeelden vormen de grondslag voor de ontwikkeling van het diagnostisch instrumentarium met de naam 'Kwantiwijzer'.
Het project 'Kwantiwijzer' had tot doel een diagnostische rekentoets te ontwikkelen. Omdat er in die tijd geen opgaven bestonden om het rekenen van jonge kinderen te onderzoeken, gingen we in het project aanvankelijk eclectisch te werk: er werden allerlei opdrachten ontwikkeld op het gebied van tellen en getallen, ruimtelijke oriëntatie en meten, maar ook rond Piagetiaanse taken, zoals classificeren, seriëren en conserveren, die indertijd als ontwikkelingspsychologische voorwaarden voor rekenen werden gezien. Na een startfase van het project wordt de koers nauwkeuriger uitgezet, we richten ons volledig op het rekenen zelf, de *rekenhandelingen* van kinderen en mogelijke stagnaties daarin. Als de Piagetiaanse taken van het toneel verdwijnen, vinden Freudenthal en Van Parreren elkaar steeds meer in deze gemeenschappelijke

Binnen het project was bovendien geen vastomlijnd onderzoeksprogramma maar eerder *een koers* die uitgezet werd en die gaandeweg specifieker bepaald werd binnen diverse deelonderzoeken. Zonder de jarenlange trouwe deelname aan de stuurgroepvergaderingen van Freudenthal en Van Parreren en hun betrokkenheid bij het project, ook in stormachtige tijden, had dit eigenzinnige ontwikkelingsonderzoek nooit uitgevoerd kunnen worden.

5 Naar een dialoog tussen Freudenthal en Van Parreren

In de beginfase van het project nam Freudenthal een afwachtende houding aan. De discussie tijdens de stuurgroepbijeenkomsten werd meestal in gang gezet door Van Parreren, die als eerste het woord nam en zijn commentaar gaf op de door het projectteam ontwikkelde materialen. Freudenthal reageerde vaak helemaal niet op zo'n betoog van Van Parreren en er volgde dan een stilte. Was dit een teken dat Freudenthal het er niet mee eens was of wilde hij een en ander eerst overdenken voordat hij tot een oordeel kwam?
Als ik per se een reactie van Freudenthal wilde op wat Van Parreren had gezegd, stelde ik steevast de vraag: 'Professor Freudenthal, wat is hierover uw mening?' Na enige aarzeling reageerde Freudenthal dan altijd. Soms begon hij dan eerst over een ogenschijnlijk geheel ander onderwerp, bijvoorbeeld over zijn observaties van zijn Surinaamse buurmeisje dat hij hielp met rekenen. Mogelijk wilde hij Van Parreren niet voor het hoofd stoten en liet hij met zo'n reactie zien waarop naar zijn idee de nadruk moest liggen in het project: het observeren van het rekenen van jonge kinderen. Pas in de loop der jaren kwam een directere discussie tussen Freudenthal en Van Parreren op gang.

6 Raakpunten in de opvattingen van Freudenthal en Van Parreren

Afwijzing objectieve testen

Het gangbare psychologische onderzoek uit de zeventiger en tachtiger jaren van de vorige eeuw was gericht op het toetsen van objectieve leerresultaten. Zowel Freudenthal als Van Parreren waren sterk gekant tegen wat ze respectievelijk 'objectieve toetsen' en 'metende tests' noemden. Uit interviews met beiden blijkt dat zij het op dit punt volledig met elkaar eens waren. Freudenthal merkt hierover het volgende op:

> Wat je natuurlijk wel kan zeggen van Van Parreren is dat door zijn invloed de projectgroep geen toetsen ging gebruiken. Ik bedoel van die vierkeuze dingen. Zijn grote verdienste is dat hij zich verre heeft gehouden van de Amerikaanse school en wel vanaf het begin.
> (De Vries 1985, 90).

Van Parreren drukt het als volgt uit:

> Freudenthal nam in het begin een erg afwachtende houding aan. Je kon merken dat hij er sceptisch over was, maar dat was hij over alles dat psychologen deden. Hij vond namelijk dat psychologen altijd metende tests gebruikten, waardoor je wel een getal krijgt maar absoluut niet weet wat het kind wel of niet begrijpt. Freudenthal wist toen nog niet dat ik er net zo over dacht. (De Vries, 1985)

Met de ontwikkeling van Kwantiwijzer zagen beiden hun kans schoon om te laten zien dat er een alternatief mogelijk was voor de gestandaardiseerde testen en testscores: een vakdidactisch en vakpsychologisch georiënteerde werkwijze, interactief van aard, met als resultaat een beeld van wat een leerling kan en wat niet, en aanwijzingen voor verder onderwijs.

Activiteit

Een sterke binding tussen Freudenthal en Van Parreren kan worden gevonden in het begrip 'activiteit'. In Freudenthals opvatting van wiskunde als menselijke activiteit, construeren mensen hun eigen wiskunde door het mathematiseren van verschijnselen uit de realiteit. Hierdoor krijgt hun wiskundige activiteit betekenis. Wiskundeonderwijs dient daarom niet gericht te zijn op de overdracht van wiskunde als afgerond bouwwerk. Maar leerlingen zouden wiskunde moeten leren door wiskunde te bedrijven en daarop te reflecteren. Het gaat kortom niet om het onderwijzen van een resultaat van mathematische activiteit van anderen maar om het onderwijzen van de activiteit zelf. Freudenthal (1973) spreekt over een 'didactische inverse' als de mathematische activiteiten van anderen als startpunt voor onderwijs worden genomen.
De cultuur-historische school beschouwt activiteit als het object van de psychologie. Menselijk gedrag, met inbegrip van mentale processen, wordt geïnterpreteerd in termen van handelingen. In het handelingsmodel van Van Parreren staat, in navolging van de cultuurhistorische school, het handelingsconcept centraal. Handelingen zijn doelgerichte activiteiten van mensen aan objecten. Het gaat niet de resultaten van ontwikkeling maar om het proces zelf. Het doelgerichte handelen bij Van Parreren en de wiskundige activiteit bij Freudenthal benadrukken beide het belang van de eigen activiteit van mensen en het procesmatige karakter daarvan. Het door Van Parreren expliciet geformuleerde handelingsconcept werd impliciet geaccepteerd door Freudenthal, omdat dit uitstekend past binnen zijn activiteitsconcept (Hetebrij & Van Eerde, 1988).

Observeren van leerprocessen

Freudenthal en Van Parreren hechtten beiden grote waarde aan het observeren van leerprocessen van kinderen. Deze methodische voorkeur komt direct voort uit hun belangstelling voor menselijke activiteit, respectievelijk menselijk handelen. In diverse publicaties benadrukt Freudenthal het belang van het observeren van leerprocessen.

> Niet achter het bureau, maar: kinderen, mensen observeren in hun ontwikkeling, in hun leerprocessen ...
> (Freudenthal 1984, 98)

En verderop in hetzelfde boek:

> Waarom leerprocessen observeren? Alleen al om - vooroordelen overboord zettend - erachter te komen wat mensen allemaal moeten leren. Ook hoe ze leren, hoe ze kunnen leren, hoe geleerd kan worden - uiteraard. Erachter trachten te komen, niet ter wille van de wetenschap, maar om er iets mee te doen. (Freudenthal 1984, 106)

De slotzin in Freudenthals boek over wiskunde en psychologie spreekt in dit kader boekdelen:

> Is het gelukt? U kunt het bewijs leveren door zelf naar kinderen te kijken. Doe het dan. (Freudenthal 1984, 110)

Uit het volgende interviewfragment blijkt dat Freudenthal wist dat Van Parreren op dit punt achter hem stond:

> Dogmatici zeggen dat kinderen het zo moeten doen als ze het geleerd hebben, anders begrijpen ze het niet. Op dit vlak konden Van Parreren en ik elkaar altijd vinden. Al ken ik de leertheorie van Van Parreren niet hij was vrij van elke dogmatiek. Als ik zei dat ik dit of dat geobserveerd had, aanvaardde hij dat iedereen dat op een andere manier kon doen en paste dat in zijn systeem. Het gaat ons om processen, niet om producten. Dit heeft Van Parreren benadrukt en dat interesseert mij ook. (De Vries1985, 92)

In zijn laatste boek licht Freudenthal nog eens toe waarom hij veel onderwijsonderzoek didactisch zinloos vindt en verklaart waarom dit onderzoek doorgaans gericht is op producten van het denken en niet op processen. Volgens hem komt dit doordat producten gemakkelijker te observeren en analyseren zijn (Freudenthal, 1991).

Deze opvattingen van Freudenthal sluiten naadloos aan bij de denkbeelden van Van Parreren die leerprocessen als centraal onderzoeksobject zag en een groot deel van zijn oeuvre daaraan wijdde. Van Parreren spreekt in dit verband over onderzoeksmethoden die handelings- en procesobservatie mogelijk maken (Van Parreren & Schouten-Van Parreren, 1981). In zijn voorwoord bij zijn boek over 'Ontwikkelend onderwijs' schrijft Van Parreren, als hij het heeft over het belang van het observeren en denkend analyseren van onderwijsleerprocessen, dat hij zich hierover geenszins tegenover collega's wetenschappers hoeft te excuseren, maar het hen zelfs moet aanbevelen:

> Deze benadering van praktijkproblemen is de enige vruchtbare en ook de enig die voor de sociale wetenschappen in aanmerking komt (Van Parreren 1988, 9).

Van Parreren kan gezien worden als een voorloper van de brede cognitieve heroriëntatie in de psychologie, met meer aandacht voor leerprocessen, ook in de Verenigde Staten (vergelijk Van Parreren 1982, pag.17).

In het Kwantiwijzerproject speelde het observeren van kinderen een dubbele hoofdrol, niet alleen bij de constructie van het instrument maar ook als methode voor het doen van diagnostisch onderzoek. Observaties van kinderen werden regelmatig besproken in de stuurgroepvergaderingen aan de hand van uitvoerige verslagen en videoregistraties. De observaties van het rekenen van kinderen in de talloze gesprekken die we met hen hadden, vormen de bron van het instrument. In de gesprekken openden kinderen hun verborgen rekenwereld, hun privédomein: de op school onderwezen en hun zelfbedachte oplossingswijzen, hun opvattingen over wat handig is en wat niet, hun strategieën om wat de leerkracht niet gewenst vond verborgen te houden (bijvoorbeeld vinger rekenen), en hun attitude ten opzichte van rekenen. Veel probleemsituaties in het instrument zijn ontleend aan wat kinderen aan ons toevertrouwden.
Een voorbeeld: veel leerlingen vonden het overbruggen van tien lastig en hadden moeite met de standaard aanpak van het 'aanvullen tot tien': 7 + 8; 7 + 3 = 10; 8 = 3 + 5; 10 + 5 = 15.
Uit onze gesprekken bleek dat kinderen allerlei informele strategieën toepassen zoals het rekenen via verdubbelen: 7 + 8; 7 + 7 = 14; 7 + 8 = 15. Via het rekenen met vijven: 7 + 8; 5 + 5 = 10; nog 3 erbij van 8 en nog 2 erbij van 7 is 15. Of via afleiden: 7 + 9; 7 + 10 = 17; 7 + 9 = 16.
Op grond van deze observaties werden opgaven ontwikkeld om na te gaan of kinderen die moeite hadden om dit soort sommen op te lossen volgens de aanpak die ze op school leerden, mogelijk snel een andere aanpak konden leren. Daartoe werden in het instrument allerlei opgaven opgenomen rond verdubbelen, het rekenen met vijven, en het afleiden om na te gaan of een leerling dergelijke strategieën snel zou kunnen oppikken. Zo openden de informele strategieën van leerlingen de weg voor anderen om een doodlopend spoor te verlaten.
Ook namen we informele begrippen van kinderen over. Op een bepaalde school noemden de kinderen sommen zoals 9 + 1,8 + 2, 7 + 3 enzovoort. 'de vriendjes van tien'. Dit begrip sprak andere kinderen direct aan en het werd overgenomen in de hulpaanwijzingen bij het instrument.

Het observeren van kinderen is naast het stellen van allerlei soorten vragen de belangrijkste vaardigheid bij het bedrijven van diagnostisch onderzoek, en misschien ook wel bij onderwijzen. Volgens Freudenthal zou observeren als middel om iets te begrijpen van leerprocessen niet exclusief gereserveerd moeten zijn voor ontwikkelaars en onderzoekers. Ook voor opleiders, onderwijzenden en studenten van de Pabo ziet hij observeren als het middel bij uitstek om mensen bewust te maken van de leerprocessen van anderen en van henzelf. Deze processen zouden bewust gemaakt moeten worden en er zou een mentaliteit moeten worden gekweekt waarin mensen ze bewust willen maken. (Freudenthal, 1984).
Ook op dit punt vinden Freudenthals ideeën weerklank in het project doordat er gaandeweg bij het Kwantiwijzerinstrumentarium een professionaliseringspakket wordt ontwikkeld voor Pabo-studenten en leerkrachten waarin

observeren centraal staat. Hierbij gaat het dan zowel om het observeren van leerlingen, in de klas of op videoband, als om het observeren van jezelf of iemand anders tijdens het leren werken met het instrument.

Leren als discontinue proces

Freudenthal hechtte niet alleen groot belang aan observeren als methode om leerprocessen op het spoor te komen, maar had er tevens een uitgesproken opvatting over op welke leerprocessen die observaties gericht zouden moeten zijn: op discontinuïteiten (Freudenthal, 1973, 1984).

> Een longitudinale observatie - dit is onhaalbaar; en het hoeft ook niet. Als er niets gebeurd hoef je ook niets te observeren. Wat je wel kunt, is: uitkijken naar de discontinuïteiten, naar de sprongen in de ontwikkeling. En daarvoor moet je naar het individuele kind kijken. (Freudenthal 1984, 103)

Deze opvatting spoort inderdaad met die van Van Parreren, die ook groot belang hechtte aan discontinuïteiten in het leren. Al in de jaren zestig bespreekt Van Parreren dit thema en wijst erop dat we dit bij onszelf kennen als:

> Het vaak overrompelende van de goede ingeving, het een licht opgaan.

En even verderop:

> Het plotseling intreden en behouden blijven van inzicht betekent nu, dat het verloop van het leren bij het door inzicht ontdekken van een handeling discontinu is.
> (Van Parreren 1966, 214)

Van Parreren onderscheidt diverse eigenschappen aan handelingen; er is sprake van een leerproces wanneer er een verandering plaatsvindt in een of meer eigenschappen van een handeling, in de handelingsstructuur (Van Parreren 1983, pag.5). Kortom, Freudenthal en Van Parreren wezen beiden op het belang van het observeren van *discontinuïteiten* in het leren.
In dit kader gebruikten zij ook allebei herhaaldelijk het begrip *Aha experience*, dat uit de denkpsychologie komt (zie bijvoorbeeld Van Parreren 1966, pag.214; Freudenthal 1978 pag.214).
Observeren, aldus Freudenthal, moet je wel leren, je moet weten waarnaar je op zoek bent. Aan dit leerproces kan het uitwisselen van observaties bijdragen. Maar om echt te kunnen begrijpen wat wordt onderwezen en wat wordt geleerd, moet je een vak geleerd hebben.
In het begin van het project was er weinig bekend over het leren rekenen van kinderen. De kennis hierover ontwikkelden we met elkaar in direct relatie met wat we observeerden bij de kinderen.
Veel aandacht werd ook besteed aan de verkenning van de zone van naaste ontwikkeling in diagnostisch onderzoek. Hiertoe werden tijdens het diagnostisch gesprek allerlei vormen van hulp aangeboden als een kind een bepaald probleem niet op kon lossen. Wanneer een leerling door deze hulp inderdaad ter plekke iets leerde, was er dus sprake van een discontinuïteit in het leerproces.

7 Verschillen in de opvattingen van Freudenthal en Van Parreren

Naast de genoemde punten waarop Freudenthal en Van Parreren het eens konden worden, waren er ook enkele geschilpunten. Zo verschilden ze sterk van mening over de ontwikkeling van begrippen. Van Parreren benadrukte, evenals Piaget en veel andere psychologen, conceptvorming als startpunt voor leerprocessen. Freudenthal ziet de ontwikkeling van begrippen juist als resultaat van een leerproces:

> Cognition does not start with concepts, but rather the other way around: concepts are the *result* (curs. HF) of cognitive processes. (Freudenthal 1991, 18)

Ik beperk mij in het volgende tot twee belangrijke geschilpunten die in het Kwantiwijzerproject naar voren kwamen: de betekenis van theorie, en de sturing van onderwijsleerprocessen.

Theorie

Van Parreren had de neiging snel naar een zekere systematisering te werken. Freudenthal zag theorieën als iets vanzelfsprekends en hechtte niet zo’n belang aan systematisering. Hij zegt hierover:

> Zoals gezegd, die theorievorming daar heb ik me niet mee bemoeid. Leertheorieën zijn veel te vaag, te weinig op speciale leerstof toegesneden. Wat de leertheorie achter Kwantiwijzer is zou ik niet kunnen zeggen. (..) Je hebt natuurlijk wel je eigen gedachten. Zo spreek ik in mijn boeken over de geleide herontdekking. Dat is een soort leertheorie. Ik kom dan op het belang van heterogene groepen, waar alle partijen van kunnen profiteren. Ik stel bijvoorbeeld prijs op reflectie: dat kinderen dus op hun eigen denken reflecteren.
> (De Vries, 93).

Dit wil niet zeggen dat Freudenthal geen waarde hechtte aan theorie. Hij gebruikte regelmatig begrippen uit de handelingstheorie, maar hij gaat er op een intuïtieve wijze mee om:

> Als je dan van theorie wilt spreken, dan is het gericht zijn op handelingen. Dat zijn namelijk van die begrippen die een rol spelen, zoals: eigenschappen van handelingen en allerlei indelingen. Voor mij zijn die nogal vanzelfsprekend en daar is geen theorie voor nodig. Ik ben gewend vanuit de wiskunde heel andere dingen onder theorie te verstaan. Wat hier in de ‘Kwantiwijzer’ staat is gewoon gezond verstand.
> (De Vries1985, 94).

Van Parreren hechtte wel belang aan theorie en realiseerde zich hoe hij en Freudenthal op dit punt van mening verschilden. In een interview verwoordt hij het als volgt:

> Die samenvoeging (*samenwerking, DvE*) ging niet van een leien dakje. Freudenthal was gewend intuïtief te werken, terwijl ik meer ordening in het geheel wilde brengen (...)
> Het grootste verschil tussen Freudenthal en mij was dat hij de diagnostiek opvatte als een soort kunst, die je intuïtief en op grond van ervaring en creativiteit moest hanteren, terwijl ik toch probeerde er een goed systeem in te brengen.
> (De Vries 1985, 91).

Samenvattend kunnen we zeggen dat Freudenthal wiskundig gezien iets heel anders verstaat onder theorie; psychologisch gezien ziet hij wat Van Parreren theorie noemt als vanzelfsprekendheden. Wat voor de psycholoog Van Parreren een kunde was, was voor de wiskundige Freudenthal een kunst (Van Eerde, 1996).
Van Parreren streefde net als het projectteam naar systematisering en explicitering, mede met het oog op de overdraagbaarheid van het instrumentarium naar anderen. Alhoewel Freudenthal principieel van mening verschilde met Van Parreren, kon hij toch vrede hebben met wat er aan theorie rond Kwantiwijzer ontwikkeld werd. Dit hangt vermoedelijk samen met het feit dat ook er geen sprake was van een pasklare theorie vooraf. De theorie werd gaandeweg ontwikkeld, weliswaar door een handelingspsychologische bril, maar in directe samenhang met onze observaties van het rekenen en de theorie was altijd vakdidactisch gekleurd. Op deze wijze was het mogelijk psychologische en vakdidactische theorie te integreren. (Zie bijvoorbeeld Van den Berg, Van Eerde & Lit, 1992 a en b).

Sturing van onderwijsleerprocessen

Hoezeer beide wetenschappers het ook eens waren over het belang van observeren van onderwijsleerprocessen, over de sturing daarvan waren ze het volstrekt oneens. Freudenthal wees elke vorm van sturing van de hand, de taak van de leerkracht bestaat erin te leerprocessen te observeren en analyseren, passende problemen aan te bieden en interactie tussen leerlingen, liefst in heterogene groepen, te stimuleren. In dit verband wijst Freudenthal op de spanning tussen de vrijheid om te leren, de *reinvention* van de leerling, en de kracht van het onderwijzen, het *guided* door de leerkracht. Twee zaken acht hij hierbij essentieel: het kiezen van situaties binnen de huidige realiteit van de leerling die uitnodigen tot mathematiseren, en het bieden van instrumenten voor verticaal mathematiseren (Freudenthal, 1991).
Van Parreren stelt dat er voor een vorm van meer of minder sturend onderwijs gekozen dient te worden, afhankelijk van het beoogde leerdoel en de vaardigheden van de leerlingen. Hij spreekt in dit verband van banend onderwijs en geeft hier een brede invulling aan.

> ‘Zelf ontdekken of probleemgericht onderwijs kunnen we ook *banend onderwijs* (curs. auteur) noemen: onderwijs waarin een min of meer brede baan wordt uitgezet waarbinnen de leerling vrij kan bewegen, dat wil zeggen zelf zijn weg zoeken, problemen opzoeken en oplossen, enz.
> (Van Parreren 1988, 100)

We zouden kunnen zeggen dat de leerkracht bij Van Parreren de rol heeft van regisseur en bij Freudenthal die van observerende en stimulerende leraar. Van Parreren benadrukte in navolging van Vygotskij meer de interactie tussen leerkracht en leerlingen, Freudenthal meer de interactie tussen leerlingen onderling.

8 De rolverdeling tussen vakdidactiek en psychologie

In een beschouwing van Treffers (1986) over de rolverdeling tussen vaktheorie en psychologie laat hij op overtuigende wijze zien dat niet zozeer onderwijsleertheorieën als wel de basis concepties over wiskunde en wiskundeonderwijs bepalend zijn voor het ontwikkelde onderwijsproduct. Deze basisconcepties zouden onderwerp van discussie moeten zijn. Dit is precies wat gebeurde in het Kwantiwijzerproject: de basisconcepties, ontleend aan de ideeën van Wiskobas en gebaseerd op wat we bij kinderen observeerden, stonden centraal in de discussies. Ik ga kort in op de vraag wat de rolverdeling was tussen vakdidactische en psychologische aspecten en waarom deze konden samengaan in het Kwantiwijzerproject. Een uitgebreidere analyse is te vinden in mijn proefschrift (Van Eerde 1996, pag.39-80).

Als een vaktheoretische en psychologische benadering die raakpunten hebben in onderzoek samengaan, biedt dit mogelijkheden deze te verbinden. De interactieve gesprekken met kinderen over hun vaak verborgen rekenwereld gaf zicht op de complexiteit van leerprocessen en droeg bij aan de ontwikkeling van vakdidactische kennis op het gebied van het rekenen. Deze rekenhandelingen boden bovendien een rijk onderzoeksterrein voor een psychologische benadering die het handelen van mensen wil bestuderen.
De realistische visie op rekenwiskundeonderwijs is in de Kwantiwijzer vooral terug te vinden in de wiskundige probleemsituaties, en de contexten en modellen die zowel bij de diagnostiek als bij de remediering een essentiële rol spelen. In de voorbeeldlesjes voor het geven van hulp zijn de vijf leerprincipes van de reconstructie didactiek toegepast (Treffers, De Moor & Feijs, 1989). Verder vormen twee essentiële kenmerken van realistisch rekenwiskundeonderwijs het hart van de Kwantiwijzer: de centrale aandacht voor de eigen oplossingswijzen van kinderen en de interactieve werkwijze. Het handelingsmodel van Van Parreren bood een psychologisch begrippenkader om de rekenhandelingen van kinderen nauwkeurig te obser-

veren, te beschrijven, te analyseren, te interpreteren en te waarderen. Zo konden de geobserveerde rekenhandelingen van kinderen uiteengelegd worden in deelhandelingen, die elk weer op verschillende niveaus uitgevoerd kunnen worden (bijvoorbeeld uit het hoofd of op de vingers) en in verschillende mate verkort kunnen zijn. Verder werd een diversiteit aan handelingen beschreven in psychologische 'rekentaal' aan de hand van begrippen zoals: aftellen, doortellen, bijtellen, terugtellen, afleiden, afsplitsen, leegmaken, aanvullen, geautomatiseerd, enz. Dit vergroot de mogelijkheden van herkenning van handelingen en de communicatie over geobserveerde handelingen.

Kortom er was een wisselwerking tussen opvattingen over realistisch rekenwiskundeonderwijs en denkbeelden uit de handelingstheorie, die langzamerhand leidde tot integratie van vaktheoretische en psychologische aspecten. Zo werd gaandeweg theorie ontwikkeld en achteraf geëxpliciteerd.

9 Slot

Velen zagen Freudenthals kritiek op de psychologie en onderwijsonderzoek als tegendraads, maar zijn kritiek was altijd onderbouwd en sneed meestal hout. Hij had niet alleen het talent om kritisch te reflecteren op de tijdgeest maar ook het talent om uitspraken te doen die mogelijk nu nog geldig zijn. In hoeverre hebben de opvattingen van Freudenthal aan actualiteit ingeboet?

Ik meen dat veel van zijn kritiek nog steeds opgaat voor veel onderwijsonderzoek. Maar er is er ook sprake van meer toenadering tussen vakdidactici en psychologen. Na een decennia lange strijd lijkt het erop dat ook subsidiegevers, zoals NWO het belang van de vakdidactiek en ontwikkelingsonderzoek erkennen.

Er is al veel werk verzet, soms tegen de klippen op. Veel proefschriften van medewerk(st)ers van het Freudenthal Instituut en van enkele vakdidactisch georiënteerde psychologen en onderwijskundigen, hebben de laatste dertig jaar hiertoe interessante aanzetten gegeven.

Ik bepleit dat binnen vakdidactisch georiënteerd ontwikkelingsonderzoek meer ruimte gecreëerd wordt om aan de explicitering en integratie van vakdidactische en psychologische aspecten te werken. De denkbeelden uit de realistische visie en uit de cultuurhistorische school, c.q. de handelingspsychologie hebben elkaar mijns inziens interessante aanknopingspunten en discussiepunten te bieden, die verder uitgewerkt zouden kunnen worden. Enkele daarvan zijn in het voorgaande aan bod gekomen: de mate van sturing van onderwijsleerprocessen: guided reinvention tegenover banend onderwijs, het observeren en analyseren van wiskundige leerprocessen met speciale aandacht voor discontinuïteiten in het leren, en de ontwikkeling van geïntegreerde vakpsychologische theorie.

Hoe kan het dat Freudenthal en Van Parreren, twee wetenschappers uit zo'n verschillende hoek, toch met elkaar in dialoog gingen en het in project op belangrijke punten eens konden worden? De verklaring kan mogelijk gezocht worden in de oorsprong van de tradities waaruit beiden voortkwamen. In de jaren dertig en veertig van de vorige eeuw ontstond een Europese traditie waarin grote waarde gehecht werd aan de bestudering van psychologische processen en daarop toegesneden kwalitatieve onderzoeksmethoden.

Van Parreren baseert, zoals bekend, veel van zijn denkbeelden op die van de Rus L. Vygotskij. Mogelijk minder bekend is dat hij ook in de voetsporen trad van de Nederlandse psycholoog Ph. Kohnstamm (Van Parreren 1983, pag.33-39). Deze bepleitte al in de jaren dertig van de vorige eeuw de zogenaamde microbenadering voor onderzoek van het onderwijs waarbij het onderwijs wordt onderzocht waar het plaatsvindt: tussen onderwijsgevende en leerlingen ín de klas. Bovendien was hij voorstander van kwalitatief onderzoek, eerst processen observeren voor er gemeten wordt. Ook Freudenthal heeft banden met deze traditie.

Freudenthal begeleidde samen met de fenomenoloog en pedagoog Langeveld het echtpaar Van Hiele bij hun doctoraal onderzoek (Gravemeijer & Terwel 2000, pag.3). Verder had Kohnstamm contact met de Wiskundewerkgroep, waarvan onder meer Freudenthal, mevrouw Ehrenfest en Van Hiele lid waren. En last but not least, Freudenthals leermeester Brouwer komt ook uit deze traditie voort.

De samenkomst van denkbeelden van Freudenthal en Van Parreren is te verklaren uit hun gemeenschappelijke wortels: zij zijn loten van een zelfde stam (Van Eerde, 1996).

Noten

1. Het kernteam van het project bestond de langste periode uit: Wim van den Berg, Dolly van Eerde en Sabine Lit.
2. De samenstelling van de stuurgroep van het project was vrij constant, de volgende mensen zaten bijna de gehele looptijd van het project in de stuurgroep: professor Freudenthal, Jan van den Brink, Klaas Koster, Jo Nelissen en Bert van Oers.

Literatuur

Berg, W. van den, H.A.A. van Eerde & S. Lit (1992a). *Kwantiwijzer voor Leerkrachten. Handleiding.* Tilburg: Zwijsen.

Berg, W. van den, H.A.A. van Eerde & S. Lit (1992b). *Kwantiwijzer voor Leerkrachten, Werkboek 4: Overbruggen van tien(optellen).* Tilburg: Zwijsen.

Eerde, H.A.A. van (1996). *Kwantiwijzer. Diagnostiek in rekenwiskundeonderwijs.* Tilburg: Zwijsen (proefschrift).

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing. Preface tot a Science of Mathematical Education.* Dordrecht: Reidel.
Freudenthal, H. (1984). *Appels en peren / wiskunde en psychologie.* Apeldoorn: Van Walraven B.V.
Freudenthal, H. (1987). *Schrijf dat op Hans. Knipsels uit een leven.* Amsterdam: Meulenhoff.
Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics Education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer.
Gagné, R.M.(1977). *The conditions of learning*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education.* Utrecht: CD-β Press (proefschrift).
Gravemeijer, K. & H. Terwel (2000) Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of curriculum studies, 32*(6), 777-796.
Gravemeijer, K. & D. Van Eerde (2004).Verschil maken. De ontwikkeling in denkbeelden over het omgaan met verschillen tussen leerlingen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 23*(1), 3-15.
Hetebrij, M. & H.A.A. van Eerde (1988). *Reconstructie onderzoek Kwantiwijzer.* Utrecht: ISOR, Rijksuniversiteit Utrecht.
Parreren, C.F. van (1966). *Psychologie van het leren I.* Arnhem: Van Loghum Slaterus.
Parreren, C.F. van & M.C. Schouten-Van Parreren (red.) (1981). *Onderwijsproceskunde: Leerpsychologie en onderwijs.* Groningen: Wolters Noordhoff.
Parreren, C.F. van (1982). *Op weg naar een genetische onderwijsleerpsychologie.* Groningen: Wolters Noordhoff.
Parreren, C.F. van (1983). *Leren door handelen. Onderwijsvernieuwing in de klas.* Apeldoorn: Van Walraven.
Parreren, C.F. van (1988). *Ontwikkelend onderwijs.* Apeldoorn/ Leuven: Acco.
Treffers, A. (1986). Analyseren en ontwikkelen van reken/wiskundeonderwijs vanuit twee verschillende basisconcepties. *Pedagogische Studiën, 1963*(1), 14-25.
Treffers, A., E. de Moor & E. Feijs (1989). *Proeve voor een nationaal programma voor het reken- wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1: Overzicht einddoelen.* Tilburg: Zwijsen.
Vries, E. M. de (1985). *Verkenning Kwantiwijzer. Vooronderzoek als hulpmiddel ter reconstructie van het project Kwantiwijzer als research programma.* Amsterdam: Vrij Universiteit.
Vygotskij, L.S., (1986). *Thought and language.* Cambridge, MIT Press 1986.

In many of his publications, the mathematician Freudenthal draws explicit attention to the psychological perspective on the learning and teaching of mathematics. He was critical of psychologists' and educationalists' studies on mathematics education and made no secret of this. In this contribution we discuss Freudenthal's criticism of some psychological and educational themes. His ideas about psychology are clarified by confronting them with those of the psychologist Van Parreren, with whom he had discussions in the advisory committee of the 'Kwantiwijzer' project over many years. The common ground as well as the differences between these two are reviewed. The division of roles between mathematics and psychology in the project is also discussed. Freudenthal and Van Parreren disagreed completely with each other on some points. However, they could reach a consensus because they shared some basic assumptions. History shows that these originate in the thirties; since then, there have been more or less intensive contacts between some mathematicians and psychologists in the Netherlands. A plea is made to elaborate further on the common ground between Realistic Mathematics Education and the social-cultural school of psychology.

Walking with Bastiaan

Bastiaan (5,7). Walking with Bastiaan. He finds two tree branches. 'This is longer than that', he says - the difference was small. 'If you have three of them, what do you say then?', I ask him. I must help him: the biggest, the smallest, and in between. Then I ask him: 'At home you are the eldest, Daphne is the?' 'Youngest.' 'And Monica?' 'Is in between.' He takes one branch on each hand. 'This is heavier.' Maybe he is right, anyhow the difference is small. 'Can you weigh it with the spring balance?', I ask him. 'No', with indignation. Than: 'This one with the nail I can.' He probably meant that it can hang at the nail. 'How far does the spring balance weigh?', I ask. 'Up to 100.' 'And how much does this weigh?' 'A thousand.' 'Can you weigh it with the spring balance?' 'No, but with another balance.'

(*Educational Studies in Mathematics, 8*, 1977)

The continuing significance of the didactics of mathematics proposed by H. Freudenthal

In the light of his didactical principles of ‘reinvention’ and ‘aha-experience’

Shinya Ito
Graduate School of Comprehensive Human Sciences, University of Tsukuba

The main focus of this paper is on Hans Freudenthal’s didactical principle of ‘reinvention’. First, the meanings of ‘reinvention’ and ‘aha-experience’ that are concurrent with ‘reinvention’ are discussed. Second, Freudenthal’s view that emotional experience affects subsequent learning is considered. Third, it is argued that the function of ‘aha-experience’ as understood by Freudenthal is consistent with contemporary cognitive theory. Freudenthal’s emphasis on emotion in mathematics learning shows the continuing fecundity of his idea, and the enduring significance of his didactics of mathematics.

1 Introduction

Hans Freudenthal (1905-1990) has been discussed from many points of view:[1] mathematics, foundations of mathematics, history of mathematics, mathematics education. Any attempt to do justice to Freudenthal’s role of ‘the universal scientist’[2] cannot be completed here. In this paper, the discussion is limited to Freudenthal as a mathematics didactician. It goes without saying that his influence on mathematics education has gone beyond Europe. In this sense, his didactics of mathematics continues to be relevant. The development of Realistic Mathematics Education (RME) has also indicated the validity of his ideas. The paper by Gravemeijer and Terwel (2000)[3] clearly pointed out the characteristics of Freudenthal’s didactics by comparing his approach to that of Klafki. The focus of this paper is on the present significance of Freudenthal’s didactics of mathematics from a specific standpoint, his didactical principle of reinvention.

Reinvention is one of the central didactical principles in Freudenthal’s didactics of mathematics, as he clarified his intention that reinvention ‘should be the principle of all mathematical education’.[4] Roughly speaking, this concept of reinvention means either the creative activity of thinking and organizing mathematically or the didactical principle that cultivates such activity among students. This concept has influenced the theory and practice of mathematics education around the world.

Freudenthal’s concept of reinvention shares roots with other theories such as Van Hiele’s theory of geometrical thinking. Van Hiele’s theory has been seen as a basic theory of mathematics education, which many researchers have, in addition to Freudenthal, studied and generalised. While Van Hiele’s theory does not put an emphasis on emotional experience when it discusses the characteristics of levels of thinking and the five phases involved in progress from one level to the next,[5] Freudenthal attached great importance to the learner’s emotional experience that is concurrent with reinvention. Goffree (1993) notes that Freudenthal was quite impressed by observing aha-experiences in young children.[6] The importance of emotion in thinking has been a continuing theme of cognitive psychology and cognitive science since the 1980s. Prior to this, Freudenthal had already pointed out the importance of emotional experiences in his discussion of reinvention.

This paper considers the present significance of the didactics of mathematics proposed by Freudenthal, with particular reference to the position of emotional experiences in his didactical principle of reinvention, arguing that Freudenthal’s position is consistent with present cognitive theory.

In order to achieve this purpose, my argument is based on Freudenthal’s works, especially the paper ‘Nacherfindung unter Führung’ (1979)[7] with respect to the aha-experience. First, I discuss the meanings of reinvention and the aha-experiences that are concurrent with reinvention. Second, I consider Freudenthal’s view that emotional experience affects subsequent learning. Third, I argue that the function Freudenthal attaches to the aha-experience is consistent with contemporary cognitive theory.

2 The didactical principle of reinvention

Freudenthal’s consciousness of difficulties facing mathematics teaching

It is useful to explore the direction of Freudenthal’s didactical principle by reviewing his consciousness of difficulties facing mathematics teaching in the 1970s. In mentioning the concept of reinvention, Freudenthal pointed out the grave situation that many pupils had engaged in mathematical activities only by working on standard or routine ‘problems’, and so ‘left school with a strange image of mathematics’.[8] Freudenthal also pointed out a more fundamental and serious shortcoming, lamenting that mathematics had been taught as ‘ready-made mathematics’, as a system of already fixed organized knowledge, not ‘mathematics as an activity’.[9] Freudenthal explained the meaning of ‘mathematics as an activity’ by analogy with language and art: ‘There is a finished art studied by the historian of art, and there is an art exercised by the artist’.[10] He believed that doing mathematics should be more like doing art, instead of being a study of objects already created.

Regarding so serious a situation, Freudenthal asserted that ‘the pupil himself should reinvent mathematics’ and ‘the learning process has to include phases of directed invention’.[11] He framed the idea of mathematics teaching and learning as reinvention. He then had to face the challenge of actualizing reinvention.

The significance of reinvention

Freudenthal described his vision of mathematics learning, referring to the level theory of Van Hiele. For example, he set up the question ‘How would a student proceed if he is allowed to reinvent geometry?’, and sketched the learning process for arriving at a definition for a parallelogram and ‘grasping the meaning of the formal definition, its relativity, and the concept of equivalence of definitions’.[12] In addition, Freudenthal applied this idea to other subject matter, such as complete induction, setting up the levels of the learning process. Freudenthal described the relations among levels of the learning process using various expressions: in one place, he suggests ‘at the higher level the acting of the lower becomes an object of analysis’.[13] In another place, he comments that ‘the means of organization of the lower level become a subject matter on the higher level’;[14] and elsewhere that ‘the pupil learns organizing by mathematical means, he learns to mathematize his spontaneous activities’.[15]

Freudenthal suggested that, by tracing the historical development of mathematical ideas, the process of organizing mathematically could be seen as a ‘highly scientific and creative activity’.[16] He gave axiomatizing, unifying theories, and formalizing as examples. Freudenthal illustrated his ideas with examples of logarithms, probability, angles and solids, to show a possible parallel between the order in which students could organize and invent mathematics and the order in which these ideas were developed historically.[17] He expressed the view that students should be taught mathematics in a similar order of organizing as had occurred in the history of mathematics. Of course Freudenthal was careful to point out that drawing on the historical development of mathematics should not be interpreted ‘in the trivial manner of an abridged version’.[18] He expressed his view positively by saying that ‘we cannot require the new generation to start just at the point where their predecessors left off’.[19] In rejecting a view of mathematics as ‘ready-made’ or as already fixed organized knowledge, Freudenthal thought of mathematical concepts, structures, and ideas as having been invented as tools to organize the phenomena of the physical, social and mental world.[20] This view of mathematics underpins his concern for the mathematics education of the young generation and leads directly to his didactical phenomenology which points the teacher to places:

> ‘where the learner might step into the learning process of mankind; not in its history, but in its learning process that still continues, which means dead ends must be cut and living roots spared and reinforced’.[21]

This paper is not the place to discuss how this vision of teaching can be realized. Therefore, his meaning for reinvention implies that a learner’s creative activity of organizing mathematically should be structured along a pathway of learning which parallels the order of organizing in history of mathematics. This principle can be used to structure all subject matter in mathematics: geometry, numbers, and so on. As a didactical principle, reinvention also means teaching in school in a way that cultivates such activities among learners.

3 The significance of aha-experiences

Freudenthal described the learner’s sense of ‘joy’ (‘Freude’) that is concurrent with reinvention as follows:

> ‘How active the preschooler in the discovery of his world and the techniques to master it, and how full of the bright joy of discovery! This can also be mathematical discovery, for example the huge discovery by the child that you can calculate 4 + 3 yourself. … Yes, these are discoveries – from the standpoint of a child. But I would rather, and unpretentiously, speak of *reinvention*, and then *under guidance*’.
> (Wie tätig ist das Vorschulkind nicht im Entdecken seiner Welt und der Technik, sie zu meistern, und wie erfüllt von heller Entdeckerfreude! Es können auch mathematische Entdeckungen sein, z. B. Die gewaltige Entdeckung eines Kindes, daß man 4 + 3 selber ausrechnen kann. (...) Ja, das sind Entdeckungen – von Standpunkt des Kindes aus. Doch spreche ich lieber und anspruchsloser von *Nacherfindung* und dann unter *Führung.*[22])

For Freudenthal, the ‘joy’ of a child that is associated with discovery or ‘invention’ takes place within the child’s world and reality (‘seine Welt und die Technik’). It is something new that grows out of what is already known, and to some extent changes what is already known. It is not, according to Freudenthal, to be compared with the discovery of some vast and totally unknown object ('Amerika von neuem entdecken').[23]

Freudenthal used the term aha-experience (Aha-Erlebnis) to denote the learner's joy. Aha-experience generally is 'a descriptive term for an emotional reaction that typically occurs at a moment of sudden insight following a long process of learning, problem-solving, or psychotherapy', and 'the moment when the separate elements of a problem seem to come together and make sense'[24] as used in Gestalt psychology.

It must be stressed that aha-experience is not *Aha-Erfahrung*, but *Aha-Erlebnis*. Freudenthal was dissatisfied with the term 'experience' as a corresponding word for 'Erlebnis'. He explained the reason why 'Erlebnis' is appropriate as follows: 'German *Aha-Erlebnis* is translated by aha-experience, there is no *Aha-Erfahrung*; *erleben* is more emotional than *erfahren*'.[25] Therefore, his meaning for 'aha-experience' is to experience with an emotion of joy that is concurrent with reinvention.

4 Background of Freudenthal's respect for the aha-experience

What is the background of Freudenthal's emphasis on the aha-experience? First, his view of mathematics education is that the process of learning is discontinuous. Freudenthal attaches great importance to levels or stages of mathematical learning. That view was based on his own introspection as a learner and observation of learning process as didactician. Freudenthal remarked:

> 'What one observes, what one can observe, is discontinuity, jumps in the development, in the learning process. My theory is that one *must* observe those if one wants to understand something of the development, of the learning process'.
> (Was man beobachtet, was man beobachten kann, sind die Unstetigkeiten, die Sprünge in der Entwicklung, im Lernprozess. Meine These ist, das man sie beobachten *muß*, wenn man etwas von Entwicklung, von Lernprozessen verstehen will.[26])

In this context, Freudenthal restated his criticism of mathematics education at the time. He did not regard learning based solely on repeated practice as real mastership.[27]

Second, Freudenthal was fully aware of the importance of emotion for research in mathematics. He regarded 'Einfülung' (empathy) as being important not only in the 'humanities' but also in mathematics.[28] He believed that '*Einfülung* plays a more important part' in serious mathematical activity than purely following 'logically rigorous procedures'. He also described the outpouring of emotion associated with scientific discovery, Archimedes' 'Eureka', in the beginning of chapter six, 'Reinvention' in 'Mathematics as an Educational Task'.

In a very personal account of his long and arduous work on solving Fermat's last theorem, Andrew Wiles (1997)[29] discusses at length the critical importance of getting one's head around a mathematical problem. In English, this is referred to also as 'getting or developing a feeling for' a problem and its intricacies. Andrew Wiles uses the metaphor of learning to find one's way around and becoming familiar with the layout and furniture of a dark room. He talks about the long process of feeling his way around his mathematical task. This is 'Einfülung'. It is certainly not using and following a path set by logically rigorous procedures. Freudenthal would agree with Andrew Wiles. Moreover, in my opinion, Freudenthal would want to see more cultivation of this kind of thinking, exploring, and working in university and school mathematics teaching.

Third, Freudenthal considered that from a children's points of view every learner had the same right in mathematical creation as a mathematician. He put a question as follows:

> 'The pupil himself should reinvent mathematics. It is the generally acknowledged right of the adult mathematician as far as he is a learner, to learn by reinventing. Can we not treat both mathematician and pupil alike? Alas; there are mathematicians who would deny it to him'.[30]

That premise led him to find 'mathematics as an activity', especially 'highly creative and scientific,' 'organizing mathematically' not only in the research of mathematicians, but equally in the way children learn mathematics.

5 The position of the aha-experience in reinvention

What is the position of the aha-experience in reinvention? Freudenthal considered that an aha-experience could be had at the moment of reinvention, or rising to a new level, or a major jump in the process of learning. At these moments, one can sometimes observe an outpouring of emotion, joy, that comes with an aha-experience. There are some fundamental relations between aha-experiences and emotion, which are essential to understanding the importance that Freudenthal attaches to the aha-experience, even though he does not discuss these relations in detail. First, there is no aha-experience without emotion. That is to say, the emotion is part of the connotation of aha-experience. Second, the relationship between aha-experience and emotion is one of meaning, not of cause and effect. The aha-experience describes the emotion, and is also defined by the emotion. Third, both aha-experience and emotion are internal and their outpouring cannot always be observed. Freudenthal explained the effect of aha-experiences as follows:

> 'The aha-experience that gives rise to an outpouring of emotion and can influence for a long time with its charge of feeling'.

(das Aha-Erlebnis, das einen Gefühlsausbruch auslösen und mit seiner gefühlsmäßigen Ladung lange weiterwirken kann.[31])

In this context, Freudenthal described his own joyful sense of discovery based on his memory of an aha-experience. In another reference, he described the situations that a student felt freedom and joy; this emotion took over other students in this student's group, and they sounded with one voice: 'We have done it'. ('einer, ..., riß die anderen mit sich, und unisono schallte es 'wir haben es geschafft'.'[32]) Here, Freudenthal may seem to be describing some observable classroom event, but he is using these external events as indicators of internal, mental or intellectual events, namely the sharing of an aha-experience by the group of students.

Needless to say, as Freudenthal described it, one can sometimes observe an outpouring of emotion, or joy, that comes with an aha-experience. This is an external manifestation of the aha-experience that is itself internal. Freudenthal was describing these external observable manifestations to catch and express aha-experiences that are internal, mental, or intellectual events.

Such aha-experiences are not only past events remembered by learners when they move to a higher level of learning process. For Freudenthal, an aha-experience has a beneficial effect on subsequent learning. It becomes what the learner aspires to in the next level of the learning process. Moreover, it becomes something to be pursued by learner and teacher at every level of the learning process. In this sense, the place of emotional experience in reinvention is quite consistent with contemporary cognitive theory.

For example, Baron (2000)[33] in his book 'Thinking and Deciding' considers thinking as a method of finding and choosing among potential possibilities, that is, possible actions, beliefs, or personal goals. In this sense, thinking is goal-directed.[34] These goals are frequently shaped by an individual's previous experience. In Baron, the creation or avoidance of emotions is considered to serve as such goals of thinking, and emotion is involved in thinking.[35] Freudenthal's recognition that the aha-experience is pursued by the learner at every level of the learning process fits neatly within Baron's view that the creation of emotion can become a goal of thinking.

6 Conclusion

Freudenthal continues to challenge mathematics education in the twenty-first century. His idea of reinvention continues to be rich in possibilities and stands in contrast to approaches to mathematics teaching and learning which Freudenthal himself criticized in his own time. Regrettably, these approaches in which mathematics is taught and learned as ready-made knowledge to be mastered through repeated practice continue today. It is no wonder that many young people leave school with negative attitudes towards mathematics, having never experienced the joy of any creative mathematical activity.

Freudenthal's idea of reinvention emphasizes the active role that learners must play in developing mathematical knowledge. It has been left to those who have followed Freudenthal to give practical expression to his vision of learning mathematics by students in elementary schools, junior high schools, and high schools. This challenge continues to inspire mathematics educators and remains a critical task for mathematics education in the twenty-first century.

Freudenthal offered the insight that mathematics teaching and learning should be accompanied by reinvention and empathy. These ideas still remain powerful in guiding teaching and learning at all levels. Perhaps his most important insight in this respect is his recognition of the emotional content of the aha-experience, and that all learners of mathematics have a right to these experiences, which can serve not only as end points but also as goals for future mathematical learning.

7 Acknowledgement

The author expresses his appreciation to Dr. Max Stephens for his many suggested improvements to the English of an earlier draft of this paper. And, in particular, the author received much helpful advice how to describe the relation between emotion and aha-experience.

References

1 e.g. (1993). *Educational Studies in Mathematics, 25*(1-2), and (1991). *Nieuw Archief voor Wiskunde, 9*(2), 1991.
2 van Dalen, D. (1991). Freudenthal and the Foundations of Mathematics. *Nieuw Archief voor Wiskunde, 9*(2), 137.
3 Gravemeijer, K. & J. Terwel (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies, 32*(6), 777-796.
4 Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task,* D. Reidel Publishing Company, 130.
5 van Hiele, P. M. & D. van Hiele-Geldof (1958). A Method of Initiation into Geometry at Secondary Schools. In H. Freudenthal (Ed.) *Report on Methods of Initiation into Geometry*, J. B. Wolters, 67-80.
6 Goffree, F. (1993). HF: Working on Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 25*, 41.
7 Freudenthal, H. (1979) Nacherfindung unter Führung, In Dieter Volk (Hrsg.) *Kritische Stichwörter zum Mathematikunterricht*, Wilhelm Fink Verlag, 185.
8 Freudenthal, H., op. cit. (n. 4), 117.
9 Ibid., 117.
10 Ibid., 114.
11 Ibid., 118.
12 Ibid., 125.
13 Ibid., 121.
14 Ibid., 123.
15 Ibid., 125.

16 Freudenthal, H. (1968). The Implicit Philosophy of Mathematics Today. In R. Klibansky (Ed.) *Contemporary Philosophy, La Nuova Italia Editrice*, 342-368.
17 Freudenthal, H. (1971). Geometry between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 415-416.
18 Freudenthal, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel Publishing Company, ix.
19 Ibid., ix.
20 Ibid., ix.
21 Ibid., ix.
22 Freudenthal, H., op. cit. (n. 7), 190.
23 Ibid., 190.
24 Goldenson, R. M. et. al. (1984). *Longman Dictionary of Psychology and Psychiatry*, Longman.
25 Freudenthal, H., op. cit. (n. 18), 542.
26 Freudenthal, H., op. cit. (n. 7), 187.
27 Ibid., 187.
28 Freudenthal, H., op. cit. (n. 4), 113-114.
29 The Proof, http://www.pbs.org/wgbh/nova/transcripts/2424proof.html, Original broadcast: October 28, 1997.
30 Ibid., 118.
31 Freudenthal, H., op. cit. (n. 7), 188.
32 Ibid., S.188f.
33 Baron, J. (2000) *Thinking and deciding (Third Edition)*. Cambridge University Press.
34 Ibid., 8.
35 Ibid., 59.

Dit artikel gaat voornamelijk over Freudenthals didactische principe van de herontdekking. Allereerst wordt er ingegaan op de betekenissen van 'aha-erlebnis' die samenvallen met 'herontdekking'. Daarna wordt Freudenthals visie dat emotionele ervaringen het verder leren beïnvloeden, besproken en als derde wordt er ingegaan op het feit dat dat de functie van de aha-erlebnis zoals Freudenthal die ziet overeenkomt met die in de huidige leertheorieën. Freudenthals nadruk op de emotionele kant van het wiskunde leren laat de blijvende vruchtbaarheid van zijn ideeën zien en de voortdurende betekenis van zijn didactiek van de wiskunde.

De meetlijn van Freudenthal

Ed de Moor
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Binnen het Wiskobasproject[1] is in de jaren 1971-'81 intensief gewerkt aan een vernieuwd reken-wiskundeprogramma voor de basisschool. Professor Freudenthal behoorde tot het team van dertien medewerkers. Zelf heeft hij geen ontwerpen gemaakt, maar zijn betrokkenheid op het ontwerpwerk was diepgaand. Hij nam deel aan de discussies over mogelijke nieuwe leerstof, leerlijnen en didactiek, observeerde lessen in de praktijk en deed zelf experimenten met individuele leerlingen. Ook schreef hij fenomenologische beschouwingen over onderdelen van de wiskunde met betrekking tot de didactiek. Een van die stukken, 'Meten vanuit wiskundig standpunt', is de basis geweest voor baanbrekende ontwikkelingen binnen het meetonderwijs op de basisschool. Hoe dat in zijn werk is gegaan, heb ik persoonlijk ervaren. Thans, na meer dan dertig jaar, kijk ik er nog eens op terug.[2]

figuur 1: Wiskobasteam uit 1973[3]

1 Inleiding

Wie voor 1980 de basisschool doorlopen heeft, zal opgaven als '102,6 m^2 + 0,13 ha = ...are' of 'Wat is de oppervlakte van een weiland van 98 bij 56 meter?' wel herkennen. Bij de eerste komt het neer op kennis van het metrieke stelsel en nauwgezet cijferen. Bij de tweede gaat het vooral om het toepassen van de formule 'lengte keer breedte' - door sommige auteurs werd dit meten genoemd. Toen echter aan het eind van de jaren zestig de Wiskobasbeweging opkwam, kreeg meten als nieuw onderwerp een heel ander accent. Allereerst bestond er in die tijd grote aandacht voor het *learning by doing*-principe, dat met name een kenmerk van het Britse Nuffield-project was. Tevens kwam het onderzoekswerk van Piaget in de belangstellingssfeer van het onderwijs.

F. Goffree (1972) ontwierp aan het begin van de jaren zeventig als eerste een werkboek voor het meetonderwijs op de Pedagogische Academie (PA). 'Meten en benaderen', zo heette blok 2 van een reeks werkboeken voor de toenmalige Pedagogische Academie. Deze blokken werden in getypte en geplakte vorm uitgegeven door het toenmalige Instituut Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (IOWO), waar ook het Wiskobasproject ondergebracht was. Ze werden op grote schaal gebruikt op de PA's. Het genoemde blok vertoont duidelijke aspecten van een empirische aanpak: veel zelf meten, gebruik van meetinstrumenten, gegevens verzamelen, grafieken maken en interpreteren, directe en indirecte meetmethoden, maar ook schatten, meetfouten en foutentheorie. Tevens werd aandacht besteed aan de ontwikkelingspsychologische aspecten van het meten volgens Piaget, maar vooral nieuw voor die tijd was de aandacht voor de mathematische achtergrond van het meten.

'Meten vanuit wiskundig standpunt', zo is de titel van een elf pagina's tellend artikel in dit blok. Een aparte auteursnaam ontbreekt, maar voorin vinden we bij de groep van medewerkenden de naam van Hans Freudenthal.[4] Dat dit stuk van de hand van Freudenthal was was algemeen bekend, maar tot voor kort wist ik niet dat hij het op verzoek van Goffree specifiek voor dit blok had geschreven. Het is in die jaren nergens officieel gepubliceerd, noch heeft hij elders over dit onderwerp op deze manier geschreven.[5] In zijn bekende 'Mathematics as an Educational Task' uit 1973 spreekt hij wel over het 'meetgetal' en het gebruik van grootheden, maar verder heb ik geen stuk van zijn hand kunnen vinden dat gelijkenis vertoont met dit artikel, althans met de eerste vijf pagina's ervan. De inhoud van die vijf pagina's is in de loop van de tijd voor de Nederlandse reken-wiskundedidactici ‘de meetlijn van Freudenthal’ gaan heten. Pas dertien jaar later is het artikel opgenomen in zijn boekje ‘Appels en peren/ wiskunde en psychologie’ (1984).[6] In het volgende gaat het om de betekenis van en invloed op het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs van dit tamelijk obscure artikel.

2 Freudenthals artikel

Freudenthal begint met het vergelijken van lengtes en gewichten. Dat gaat met gewone taaltermen als ‘is groter dan’ en ‘is zwaarder dan’. Met voorbeelden als ‘rent harder dan’ of ‘is slimmer dan’ wordt het idee van een relatievoorschrift algemener gemaakt en meteen ook gesymboliseerd. Zo staat al snel de bekende transitiviteitswet (als $A > B$ en $B > C$ dan $A > C$) als een vanzelfsprekendheid op papier. Tevens wordt het begrip ‘klasse’ gedefinieerd ten behoeve van gelijkheid van lengtes, gewichten of andere grootheden. Vanuit een mathematisch standpunt bezien komt dit overeen met de orderelatie en de equivalentierelatie, hoewel FreudenthaL deze termen niet expliciet gebruikt. Hij beschrijft dit als de eerste kwalitatieve fase van het meten, waarbij nog geen getallen in het geding zijn: eerst vergelijken en daarna de resultaten ordenen. Hij geeft daarvoor nog een mooi voorbeeld: de zogenoemde hardheidsschaal van Mohs voor mineralen (fig.2).[7]

1. talk 2. gips	met de nagel te krassen
3. calciet 4. fluoriet	gemakkelijk met mes te krassen
5. apatiet 6. veldspaat	moeilijk met mes te krassen
7. kwarts 8. topaas 9. korund 10. diamant	niet meer met vijl te krassen maar geven kras op glas

figuur 2: schaal van Mohs

Voor het kwantitatieve meten moet allereerst een nieuwe operatie worden ingevoerd. Deze bewerking, die hij als volgt beschrijft, noemt Freudenthal samenstellen:

> Jan is zwaarder dan Piet, maar als Lies nog bij Piet op de wip gaat zitten, zijn ze samen even zwaar als Jan. Ik heb Piet en Lies samengesteld tot iets wat even zwaar is als Jan. Ik zeg ‘samenstellen’ en niet ‘optellen’. Optellen doe je met zoiets als getallen. ‘Piet + Lies’ lijkt nergens op, maar omdat ik voor het samenstellen een teken moet hebben, gebruik ik maar eventjes. Jan $\approx$ Piet $\oplus$ Lies.

Uitgaande van het begrip ‘even zwaar’ en de ‘samenstel’-operatie komt hij tot ‘dubbel zo zwaar’, waarmee de eerste stap is gezet tot het kwantitatieve meten. Maar gaat dat altijd? ‘*A* zingt dubbel zo mooi als *B*’ of ‘*A* is dubbel zo slim als’ zo vraagt Freudenthal zich af, waarmee hij anticipeert op het probleem van het opstellen van een numerieke maatschaal voor een ordening. Daarna laat hij aan het volgende voorbeeld zien dat de mens aanvankelijk met natuurlijke maten werkte, die vaak tot ingewikkelde omwisselpraktijken leidden.

> Er was eens een volksstam, die ruilhandel pleegde en als volgt rekende:
> 1 slaaf is evenveel waard als 3 slavinnen plus 1 ezel.
> 1 slavin is evenveel waard als 2 stieren plus 1 schaap.
> 1 stier is evenveel waard als 2 koeien.
> 2 koeien zijn evenveel waard als 5 ezels.
> 1 ezel is evenveel waard als 4 schapen.
> Toen kwam er iemand op het idee: laten we alles in schapen uitdrukken. Een schaap was dus de wettelijke eenheid in deze economie. Dat kost zoveel schapen - zei de man die een huis wilde verkopen; zij kost zoveel schapen - zei de vader met een huwbare dochter.

Door nu dit betalen ‘in natura’ te vervangen door een afspraak over een waarde-eenheid van een zekere hoeveelheid koper of zilver of goud komt men tot een ‘standaardmaat’:

> Hetzelfde doe je altijd bij numeriek meten. Je kiest een maateenheid: pond, voet, kilogram, duim, el, meter, schepel, mud, liter, dag, jaar, seconde, stuiver, duit, gulden, dollar, enz. Je zorgt er verder voor dat je die eenheid voldoende kunt reproduceren, om te meten grootheden in de eenheden uit te drukken.

Zoals bekend uit de dagelijkse praktijk kunnen we het gemeenschappelijke gewicht van twee objecten, die beide in kilogrammen zijn uitgedrukt, bepalen door die twee maten bij elkaar op te tellen. Freudenthal gaat daarvoor als volgt te werk. Hij neemt twee koffers, van twintig en veertig kilogram, en laat zien dat die kunnen worden samengesteld tot een object waaraan zestig kilogram kan worden toegekend, maar dan vraagt hij zich af:

> Is dat goed, twintig kilo + veertig kilo? Mag ik gewichten optellen of alleen maar getallen? Is dat niet zo iets als:
> Jan = Piet + Lies?

Hier wordt zo precies op ingegaan om de rekenstructuur, waaraan we zo gewend zijn bij het meten, te kunnen verantwoorden; zie maar:

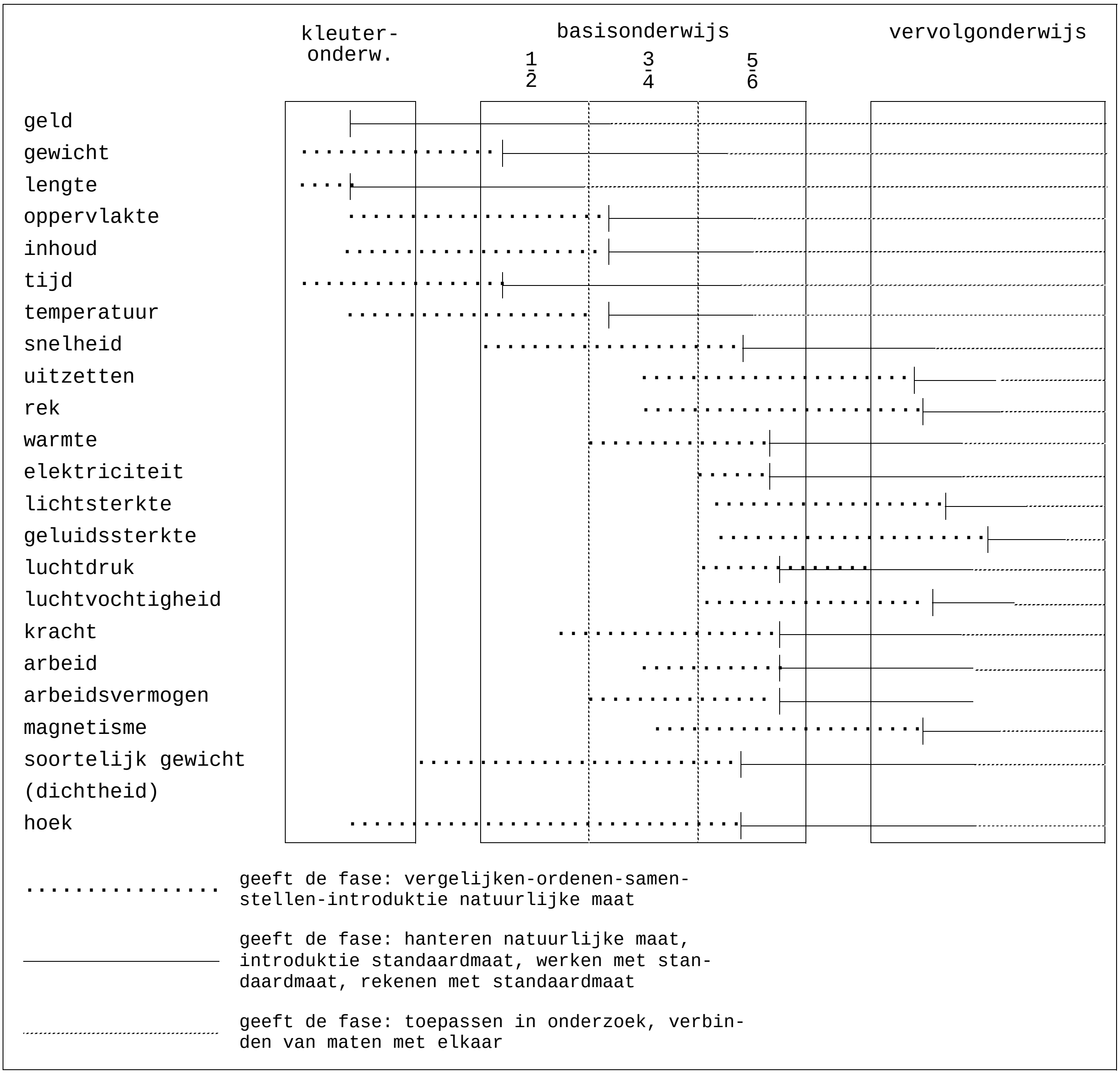
> Twintig kilo is, los van zijn feitelijke realisering, een rekenbegrip, waarmee ik rekenoperaties uitvoer. In de natuurkunde noemt men zoiets ook grootheden en werkt er rekenkundig mee.

De rest van het artikel handelt over grootheden. In het bijzonder over samengestelde grootheden, zoals oppervlakte, snelheid, druk, arbeidsvermogen en zo meer. Zo wordt verband gelegd met het natuurkundige groothedenstelsel en het rekenen daarmee. Hierop ga ik nu niet verder in. Ik beperk me tot de kern van dit stuk, de meetlijn van Freudenthal: vergelijken, ordenen, samenstellen en inwisselen, natuurlijke maat, ‘standaardmaat’. Pas daarna zou het echte toepassen van het meten aan de orde moeten komen.

3 Uitwerking voor de nascholing en de basisschool

Toen het meten in de jaren zeventig op de PA als onderwerp op het programma kwam, werd er ook een blok over meten voor de heroriëntering voor onderwijzers ontworpen. Ook deze cursus was geënt op Freudenthals meetlijn, zij het dat daarin wat meer aandacht werd besteed aan het zelf ontwikkelen van maten en meetstrategieën.

De meeste invloed had Freudenthals stuk op het ontwerpplan voor de basisschool, waarin het meten toen als volwaardig ‘leerstofvlak’ (domein) werd onderkend. Het is met name H. ter Heege geweest, die dit onderwerp koos voor allerlei praktische meetopdrachten, een aantal in de vorm van kant en klare werkkaarten. Ter Heege bewerkte het stuk van Freudenthal voor de genoemde nascholingscursus en gaf er uitbreidingen aan. Hij liet aan de hand van praktijkvoorbeelden zien hoe een aantal traditionele meetonderwerpen (lengte, gewicht, volume) volgens de meetlijn zouden kunnen worden opgezet. Tevens pleitte hij voor verdergaande meetactiviteiten in het basisonderwijs. Hoever we daar indertijd mee wilden gaan, is te zien in figuur 3, waar een overzicht wordt gegeven van de grootheden, waarvan we toen meenden dat ze ook al op de basisschool aan de orde zouden kunnen komen. Kenmerkend hierbij zijn de trajecten, die aangeven hoe de fasen van de meetlijn voor alle grootheden doorlopen móesten worden.

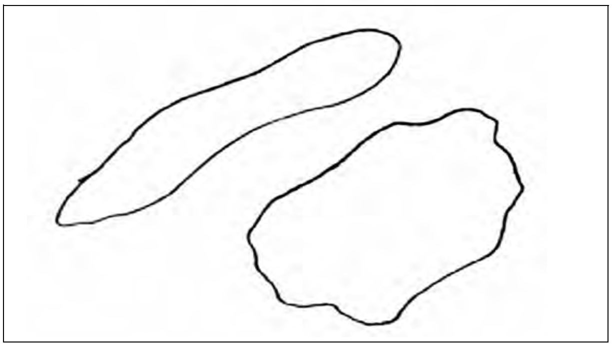


figuur 3: voorstel Wiskobas-leerlijn grootheden

4 Een leerlijn oppervlakte

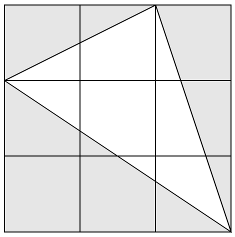
Nadat in 1975 het zogenoemde integratieplan ‘Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool, een model voor een schoolwerkplan’ was gepubliceerd, kwamen er vragen uit het veld om nadere uitwerking van specifieke onderdelen. Een daarvan betrof oppervlakte. Samen met Ter Heege heb ik toen een jaar lang ontwikkelwerk op dit onderwerp gedaan. Het is een van de mooiste ervaringen die ik me uit die tijd herinner. Het sprak vanzelf dat het uitgangspunt weer Freudenthals meetlijn was. In de toen ontworpen werkbladen voor de onderbouw (thans groep 3 en 4) komen dan ook veel activiteiten voor over het vergelijken en ordenen van allerhande (ook niet ‘rechtlijnige’) vlakke figuren. Ruime aandacht wordt besteed aan ‘natuurlijke’ maten, voordat op het bekende vierkantenrooster wordt overgestapt.

We stuitten bij dit ontwikkelwerk echter op enige specifieke problemen. Vroegen we aan kinderen van zeven jaar welk stuk van twee willekeurige vormen (fig.4) het grootste was, dan wisten de meesten daar geen antwoord op of ze wezen er een aan, die naar hun idee het ‘langste’ was.



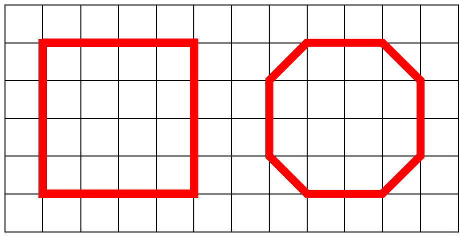
figuur 4: welke is het grootst?

Ook werd wel verwezen naar de omtrek van zo’n vorm. Hier bleek dat oppervlakte een veel lastiger begrip is dan lengte. Treffers heeft toen aanbevolen om oppervlakte in eerste instantie aan andere grootheden te binden. We veranderden de vraagstellingen door de kinderen te vertellen dat het hier ging om een keuze tussen twee stukken drop of koek van gelijke dikte. Dit bleek zeer goed te werken, en zo kozen we allerlei andere grootheden, zoals geldwaarde of tijd om te ploegen voor het vergelijken van oppervlakten van landjes. Een ander probleem bleek het zogenoemde ‘omstructureren’ van figuren te zijn. Allereerst moeten de kinderen het begrip van het behoud van oppervlakte - conservatie in de termen van Piaget - hebben, wanneer een figuur wordt verknipt en weer aan elkaar wordt geplakt. Maar tevens dienen ze daarbij enige meetkundige vaardigheden te hebben ontwikkeld. Toch boekten we ook hier frappante resultaten. Zeer lastig was ook het zogenaamde completeren of aanvullen van een figuur tot bijvoorbeeld een rechthoek (fig.5).



figuur 5: oppervlakte bepalen door completeren
$9 - 1 - 3 - 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

Toen we dit soort problemen bespraken in de Wiskobasgroep, was het Freudenthal die daarvoor direct eenvoudige didactische tips bedacht: ‘Begin met een vierkant en knip daar eerst kleine stukjes vanaf en draai daarna pas de zaak om.’ Het werkte! (fig.6).



figuur 6: afknip-didactiek van Freudenthal

Het voert te ver op dit totale onderzoekswerk in te gaan. Ik merk slechts op dat we tijdens dat jaar ongelooflijk veel nieuwe aspecten van het meten ontdekten, dat we gebruikmaakten van de feedback van de hele Wiskobasgroep en vooral ook van een aantal ideeën van Freudenthal waarbij hij het oppervlaktebegrip in een veel ruimer kader plaatste dan tot dan toe gebruikelijk was.[8] De resultaten van dit onderzoeks- en ontwikkelwerk zijn in 1977 neergelegd in leerplanpublikatie 7, ‘Oppervlakte, handleiding en werkblok voor het basisonderwijs’. Daar wordt in de inleiding gesteld dat het meten van oppervlakte model stond voor het totale domein van het meten. Uit dit ontwikkelwerk bleek toen namelijk al dat consequent vasthouden aan deze ideële meetlijn niet voor elk begrip mogelijk en ook niet nodig is.

5 Freudenthal en Piaget

Toen ik in 1971 bij Wiskobas begon, was eigenlijk alles op het gebied van de rekendidactiek, pedagogiek, leer- en ontwikkelingspsychologie nieuw voor mij. Ik had wel eens van Piaget gehoord, maar nu moest ik me echt gaan verdiepen in zijn theorieën. Ik studeerde in zijn ‘Child’s conception of geometry’ en hoorde van de collega’s over de beroemde conservatieproeven. Iedereen kent wel het volgende voorbeeld. We laten een kind van een jaar of vijf twee identieke cylinderbekers zien, die met evenveel water gevuld zijn. Het kind ‘begrijpt’ dat het om gelijke volumes gaat. Daarna wordt een van de twee bekers in een smaller cylinderglas overgegoten, waarin het waterniveau hoger komt te staan. De meeste kinderen van die leeftijd zeggen nu dat de hoeveelheden water niet meer gelijk zijn. Het kind heeft de fase van begrip van conservatie van volume nog niet bereikt, zo wezen dergelijke experimenten van Piaget en zijn medewerkers uit.

In het genoemde PA-blok van Goffree wordt ook aandacht aan deze theorie besteed. Uitdrukkelijk wordt gewezen op het feit dat Piaget deze proeven niet bedoeld had als bijdragen voor de praktijk van het onderwijs. Hij wilde slechts aantonen dat de ontwikkeling en verwerving van begrippen als lengte, gewicht, volume, oppervlakte, tijd, enzovoort, volgens vaste fasen verlopen.
De PA-studenten kregen nu opdrachten om dit soort proefjes te herhalen of om te onderzoeken of een basisschoolmethode van toen hiermee wel rekening hield. Ondanks Piagets uitdrukkelijke bedoeling dat deze proeven niet voor het onderwijs bedoeld waren, baseerden veel moderne buitenlandse rekenmethoden rond de jaren zeventig zich bij de uitlijning van de leerstof en didactiek toch op zijn theorieën.

Uiteraard werd dit een onderwerp van discussie binnen de Wiskobasgroep. En toen ervoer ik Freudenthal als een ongemeen scherpe criticus ten aanzien van het werk van Piaget, althans zo kwam het toen op mij over. Zo herinner ik me nog hoe hij juist de genoemde proeven over conservatie van volume bekritiseerde in verband met de wijze van vraagstelling. Wat betekenen uitspraken als ‘wat is meer?’ of ‘is dit evenveel of even groot?’, waarbij hij teruggreep op de precieze formuleringen van de Franse verslagen. Hij verweet de wiskundedidactici de bevindingen van Piaget kritiekloos te volgen. Tevens stelde hij de verkeerde interpretaties van allerlei wiskundige concepten van Piaget (en zijn medewerkers) aan de kaak. Echt kwaad kon hij worden wanneer er blunders gemaakt werden zoals de gedachte dat een cylinder hetzelfde volume houdt als men de diameter halveert en de hoogte verdubbelt.

Later kreeg Freudenthal in zekere mate gelijk toen ook vakgenoten van Piaget als M. Donaldson (1978) en H. Gardner (1985) diens onderzoeken kritisch onder de loep namen. Met name Donaldson wees erop dat de uitkomsten van de experimenten geheel anders konden uitpakken indien de proeven in een voor de kinderen zinvolle context vervat werden. Dat was precies wat ook Ter Heege en ik ondervonden bij onze onderzoekingen over het oppervlaktebegrip.

Overigens heeft Freudenthal wel altijd zijn bewondering en waardering uitgesproken voor de rijkdom van ideeën en de originaliteit van Piaget. Men zal begrijpen dat wij toen in de Wiskobasgroep niet zomaar uitgingen van het ‘meten volgens Piaget’, maar de lijn van Freudenthal volgden.

6 De effecten van meetopvattingen

Vanaf de jaren tachtig kwamen er nieuwe reken-wiskundemethoden op de Nederlandse markt, die geënt waren op de realistische opvatting, zoals Treffers het Wiskobaswerk in 1979 heeft genoemd.[9] Ook het meten kreeg in deze schoolboeken een eigen plaats en de auteurs sloten zich aan bij de meetlijn van Freudenthal. Vooral het meten van oppervlakte kreeg veel aandacht, een gevolg van de eerdergenoemde publicatie over dit onderwerp. De uitwerking van het totale meten was echter niet zo breed- en diepgaand als in de Wiskobaspublicaties was beschreven, maar dat kon natuurlijk ook niet binnen de beschikbare tijd op de scholen.

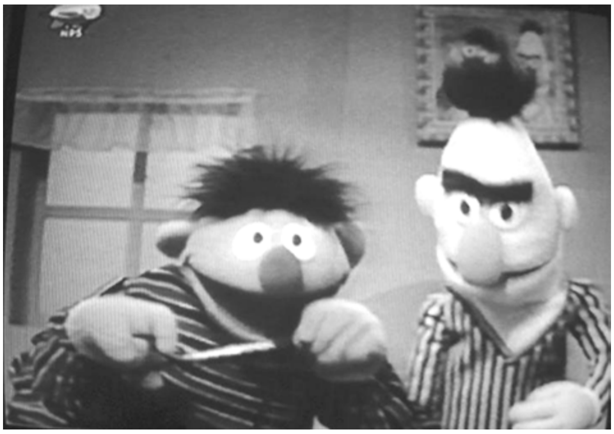
De vraag hoe de leraren met het onderwerp omgingen is nooit diepgaand onderzocht, maar uit de waarnemingen en verslagen van ondermeer schoolbegeleiders is gebleken dat de aard van het rekenonderwijs in feite niet veel veranderde. Men volgde het boek en nieuwe zaken, zoals meten en meetkunde, werden er zo’n beetje bij gedaan als er tijd voor was. Meten, dat bleef toch zoiets als een liniaal gebruiken en sommetjes maken. Men kan de leraren daarvoor niet verantwoordelijk stellen, omdat er vrijwel geen georganiseerde en verplichte nascholing op dit gebied heeft plaatsgevonden.
In 1999 kwam er echter een nieuwe kans. Binnen het door de overheid in gang gezette TAL-project werden meten en meetkunde opnieuw in studie en ontwikkeling genomen, althans voor de groepen 1 tot en met 4.[10] Het is met name K. Buijs geweest, die het meten voor deze leeftijdsgroep in een nieuw daglicht heeft gezet. In de TAL-publicatie ‘Jonge kinderen leren meten en meetkunde’ (Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2004) wordt de globale leerlijn voor het meten als volgt omschreven:

– meten via vergelijken en ordenen;
– meten via natuurlijke maten en standaardmaten;
– meten via gebruik van een meetinstrument.

De overeenkomst met de meetlijn van Freudenthal, die overigens in het betreffende boek niet wordt genoemd, is vrijwel direct zichtbaar. Bekijken we de uitwerking wat nader, dan vallen echter wel degelijk verschillen op met de ideeën die zo’n vijfentwintig jaar terug opgeld deden. Allereerst worden vergelijken en ordenen niet meer zo strikt als verschillende fasen onderscheiden. Ze gaan als het ware hand in hand, waarbij meteen al gebruik gemaakt wordt van natuurlijke maten en ook van standaardmaten, zoals de meter, die de kinderen vaak al uit de praktijk van alledag kennen.
Ten slotte wordt het feitelijke meten met eenvoudige instrumenten als liniaal, brievenweger, maatglas en zo meer ook beoefend. De leerstof voor deze leeftijdsgroep is beperkt tot de grootheden lengte, gewicht, inhoud, een begin met oppervlakte en tijd als aparte grootheid.

Lengtemeting vormt de kern van alle meetactiviteiten voor dit niveau. Gewichtmeting wordt via het gebruik van een unster teruggebracht tot een lineaire schaal. De alledaagse standaardmaten als meter, kilogram, liter en zo meer behoren tot de leerstof.

De kern van Freudenthals meetlijn blijft zichtbaar en zelfs zie ik sprekende voorbeelden uit die tijd, die als het ware *evergreens* zijn, zoals het videofilmpje van Bert en Ernie, die een dropveter moeten verdelen (fig.7).



figuur 7: Bert en Ernie verdelen een dropveter

Hieraan zijn zo mooie en zinvolle opdrachten voor de kleuters te verbinden, zoals in het TAL-boek beschreven, dat je je nauwelijks kunt voorstellen dat niet elke leraar zoiets zou willen doen.

Lag toen de nadruk op de leerstofkeuze en -sequentie, nu gaat het vooral om (ontluikend) maatbesef, hetgeen in de TAL-publicatie als volgt wordt omschreven: besef ontwikkelen voor meten als benaderen, kwantitatief leren omgaan met alledaagse verschijnselen, daarbij een geschikte taal ontwikkelen, begrip van verschillende grootheden krijgen, en zich voorstellen welke maatsoorten daarbij horen. Ik denk dat Freudenthal zich hier heel goed in had kunnen vinden.

7 Reflectie

De aanleiding tot dit stuk was een voordracht die ik in mei 2004 hield tijdens het tiende symposium van de 'Historische Kring Reken en Wiskunde Onderwijs' (HKRWO). Ik heb daar wat uitgebreider verteld wat ik hierboven heb beschreven. Zoals dat wel vaker gaat wanneer je je in de historie van bepaalde kwesties begeeft, stuitte ik op feiten die tot dan toe onbekend waren. Verrassend was het voor mij dat Freudenthal die vijf pagina's zomaar op verzoek van Goffree had geschreven en dat ze verder nergens in zijn didactische werk zijn ingebed. Ook werd ik me bewust van het feit dat die vijf pagina's in Nederland nooit zo bekend geworden waren indien die niet door de gehele Wiskobasgroep waren omarmd en nader waren uitgewerkt. Freudenthal zelf heeft er zich verder eigenlijk niet meer mee bemoeid. Hij had een idee gezaaid en liet het verder aan anderen over om het tot bloei te brengen.

Toch kun je je achteraf afvragen hoe hij in staat is geweest zo'n stuk zo vlot te schrijven. Nu was professor Freudenthal een kenner van de geschiedenis in het algemeen, maar ook was hij thuis in de historie van de natuurwetenschappen en de wiskunde. Hij kon zich derhalve voorstellen hoe het meten zich in de loop der tijden ontwikkeld had. Alleen al op grond van de historisch-genetische ontwikkeling kan men zich de herontdekking - een principe dat hij graag propageerde - van de fasen van zijn meetlijn voorstellen. Het bijzondere is nu dat hij de meetbegrippen die bij de verschillende fasen behoren, tevens als mathematische begrippen (ordenen, relaties, klassen, maat, rekenstructuur) laat ontstaan. Natuurlijk, dat moest ook wel, Goffree had hem tenslotte gevraagd iets te schrijven waarin het meten vanuit wiskundig perspectief zou worden beschouwd. Als geen ander wist Freudenthal zijn stukken altijd zo te stileren dat ze toegesneden waren op het publiek waarvoor ze bedoeld waren. Vandaar dat hij in dit stuk, bedoeld voor de PA-student van toen, geen moeilijke wiskunde deed en in feite dichtbij het lerende kind bleef. En zo kon deze beschouwing ook uitgangspunt zijn voor een meer psychologisch-genetische ontwikkeling, zoals die later door de Wiskobasmedewerkers is uitgewerkt.

Nu verzin je zoiets natuurlijk niet op een achternamiddag. HF was goed op de hoogte van het werk van Piaget, maar hij wijdde er geen woord aan in zijn stuk. Toch vraag ik mij af of Piagets bevindingen hem niet onbewust beïnvloed hebben. Treffers heeft hem er toentertijd op gewezen dat diens opvattingen en die van Piaget over de fasen van de kinderlijke ontwikkeling in feite niet verschilden.
Piaget ging uit van de geestelijke ontwikkeling van het kind volgens vaststaande fasen: intuïtief-perceptief, handelend en formeel. Freudenthal zette zijn 'meetlijn' op vanuit de historisch-genetische ontwikkeling van wiskundige begrippen.
Toen enkele jaren geleden bij het TAL-project deze schijnbaar tegengestelde opvattingen van Piaget en Freudenthal weer ter sprake kwamen zijn de 'geschilpunten' nog eens onderzocht, zowel in historisch-didactische als in leerpsychologische zin. En er werd opnieuw geconstateerd dat beide opvattingen niet met elkaar in tegenspraak zijn. Beide grote geleerden hebben het meten als belangrijke menselijke activiteit onderkend en beiden hebben fundamentele bijdragen geleverd zowel voor de ontwikkelingspsychologie als voor de didactiek van het reken- en wiskundeonderwijs.
Omdat ik vanuit de laatste discipline heb meegewerkt aan de verdere ontwikkeling van het meten en daarbij de

beste herinneringen bewaar aan Hans Freudenthal, blijf ik toch maar het liefst spreken van 'de meetlijn van Freudenthal'.

Noten

1 Wiskobas staat voor: '*Wisk*unde *o*p de *bas*isschool'.
2 Met dank aan F. Goffree.
3 Het toenmalige Wiskobasteam bestond uit (van *l* naar *r*): Edu Wijdeveld, Louis Gilissen (U), Fred Goffree, Henk Meijer, Jan van den Brink, Ed de Moor, Adri Treffers, Johan van Bruggen, Hans Freudenthal (U), Huub Jansen, Rob de Jong, Hans ter Heege, Leen Streefland (U), Ineke Hoogeveen (zittend). Afwezig: Betty Heijman en Ada de Graaf.
4 De overige medewerkenden waren K. Kuipers, D. Karman, A. Treffers en E. Wijdeveld. Goffree voerde de redactie.
5 In de *Inventory of the papers of Hans Freudenthal* (1905-1990) staat onder nummer 1297: '*Meten vanuit wiskundig standpunt*'. Photocopy of a chapter from *Wiskunde en didactiek in de onderwijzersopleiding*, 1976, also appeared in *Appels en peren / wiskunde en psychologie*.
6 In dit gedeelte van de oorspronkelijke tekst bevonden zich twee storende fouten. Ze zijn hier herzien, zoals dat later ook in de tekst van 'Appels en peren' is gebeurd.
7 Deze tabel staat in het zogenoemde Wisboek *Meten* (blok VIII, 1973), een handleiding voor docenten van de heroriënteringscusussen.
8 In 1978 heeft Freudenthal een aantal van deze ideeën beschreven in *Wiskobas Bulletin, 7*(5/6), leerplanpublikatie 9 onder de titel: *Oppervlakte als verschijnsel benaderd*.
9 Treffers gebruikt deze term voor het eerst in Fundering, Cijferend vermenigvuldigen en delen (1). *Wiskobas Bulletin, 8*(5/6), 84.
Zie ook: E.W.A. de Moor (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde*, 373-374.
10 TAL staat voor 'Tussendoelen Annex Leerlijnen'. Een team van deskundigen van het Freudenthal Instituut en de SLO heeft voor het rekenen met hele getallen tussendoelen en leerlijnen opgesteld, die een aanvulling dienen te zijn op de kerndoelen.

Literatuur

Donaldson, M. (1978). *Children's Minds.* Glasgow: Fontana/ Collins.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1984). *Appels en peren / wiskunde en psychologie*. Apeldoorn: Van Walraven.

Gardner, H. (1985). *Frames of Mind.* London: Paladin Books, Granada Publishing Ltd.

Goffree, F. (1972). *Meten en benaderen.* Blok 2 voor Wiskunde en Didaktiek voor de Pedagogische Akademie. Utrecht: IOWO.

Heege, H. ter & E. de Moor (1977). Oppervlakte. Handleiding en werkblok. *Wiskobas Bulletin, 7*(1/2), leerplanpublikatie 7. Utrecht: IOWO.

Heege, H. ter & E. de Moor (1973). *Heroriëntering Onderwijzers, blok VII Meten. Ko-boek.* Utrecht: IOWO.

Heuvel-Panhuizen, M. van den & K.Buys (red.) (2004). *Jonge kinderen leren meten en meetkunde.* Groningen: Wolters Noordhoff.

Piaget, J., B. Inhelder & A. Szeminska (1966). *The child's conception of geometry*. London: Routledge and Keagan Paul.

Over the period 1971-'81 the Wiskobasteam did a lot of work to create a renewed math curriculum for Dutch primary schools. Professor Freudenthal was one of the thirteen members of this group. Although he did not create any designs himself, he was deeply involved with the design of the curriculum as a whole. He took part in discussions about new contents, learning trajectories and didactics. He observed lessons in schools and did some experiments with individual students. He also wrote phenomenological essays on the specific didactics of several math topics. One of these essays 'Measuring from a mathematical point of view' has become the foundation of pioneering developments in measurement education in primary school. With my own eyes I have seen how that happened. Now, after more than thirty years, in this article I look back on the birth of the so-called 'Freudenthal learning trajectory for measurement'.

De Juiste Maat

Heleen Verhage
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

In opdracht van De Bijenkorf heeft Hans Freudenthal meegewerkt aan het optimaliseren van confectiematen. Samen met J. Sittig schreef hij er een boek over, getiteld: 'De juiste maat'. Ondanks dat het boek in 1951 verschenen is, en de optimale confectiematen van toen dat nu vast niet meer zijn, heeft de wijze waarop statistiek bedreven wordt met de meetgegevens van 5000 vrouwen volgens Heleen Verhage nauwelijks zijn actualiteitswaarde verloren.

1 Inleiding

In 1951 verscheen bij uitgeverij Stafleu te Leiden het boek 'De Juiste Maat', met als ondertitel 'Lichaamsafmetingen van Nederlandse vrouwen als basis voor een nieuw maatsysteem voor damesconfectiekleding'. Auteurs van dit boek waren J. Sittig, Adviesbureau voor Toegepaste Statistiek en Prof.dr. H. Freudenthal, Rijksuniversiteit Utrecht. Het onderzoek was gehouden in opdracht van N.V. Magazijn De Bijenkorf, Amsterdam.

Kort gezegd komt het erop neer dat in het kader van dit onderzoek bij ruim vijfduizend vrouwelijke klanten van de Bijenkorf vijftien lichaamsmaten zijn opgemeten. Vervolgens is gekeken welke van deze maten het meest bruikbaar zijn om een maatsysteem voor kleding op te baseren. Het eerste deel van het genoemde boek bestaat uit een populaire samenvatting van methoden en resultaten en is onmiskenbaar geschreven door Freudenthal. Dit artikel is grotendeels op dit deel van het boek gebaseerd.

In het boek komen verschillende perspectieven voor: dat van de klant, dat van de verkoper en de inkoper, dat van de confectie-industrie en dat van de wiskundige. De klant wil een eenvoudig maatstelsel en weinig extra kosten in verband met het vermaken van de kleding. De verkoper wil duidelijke instructies hoe de klant de maat te nemen en deze zo goed mogelijk te adviseren. De inkoper wil weten wat er in de rekken moet komen te hangen (aantallen en maten). De confectie-industrie wil produceren tegen zo laag mogelijke kosten en niet met overschotten blijven zitten. De wiskundige wil een model maken waarin bovenstaande zaken verwerkt zijn en wil daarbij bovendien zorgen voor het minimaliseren van fouten.

In dit artikel staat het perspectief van de wiskundige voorop, met hier en daar een uitstapje naar een van de andere perspectieven.

2 Aanleiding van het onderzoek

Eind jaren veertig van de vorige eeuw ontstond er behoefte aan een uniform maatsysteem. Men wilde wel eens af van de veelheid aan systemen die tot dan toe in zwang waren. De Bijenkorf besloot een groot eigen onderzoek op te zetten om tot zo'n maatsysteem te komen. Inspiratiebron was een Amerikaans onderzoek, waarbij van veertienduizend vrouwen de maat was genomen. In augustus 1947 was het zo ver: in de filialen van de Bijenkorf in Amsterdam, Rotterdam en Den Haag werd 'de vrouwelijke clientèle boven de achttien jaar opgewekt haar medewerking te verlenen aan de meetcampagne'. Er deden 5001 vrouwen mee.

3 Het doen van de metingen

Per filiaal werden zes meetsters aangenomen. Dit waren vrouwelijke studenten medicijnen, aangevuld met leerlingen van de kunstacademie. Ze werden geselecteerd op meetvaardigheid en omgangsvormen. Daarnaast kregen ze een training van enkele dagen om te leren hoe de metingen precies uitgevoerd moesten worden. Voor het doen van de feitelijke metingen was er in de filialen een

figuur 1: het opmeten van de taille

opstelling met vier hokjes gemaakt, dit om de privacy van de deelneemsters te garanderen. In elk hokje was een meetster aanwezig voor het nemen van enkele maten.

De maten die genomen werden, zijn:

gewicht	mouwlengte
lengte	handomvang
bovenwijdte	vuistomvang
taille	middelvingerlengte
heupomvang	kniehoogte
voorlengte	voetlengte
ruglengte	voetbreedte
rugbreedte	

Freudenthal gaat uitvoerig in op de onvermijdelijke fouten die ontstaan bij het doen van de metingen en hoe daarmee om te gaan. Een citaat:

> 'Want - gelukkig - de fouten gedragen zich volgens wetten, en deze wetten behoren sinds anderhalve eeuw tot het arsenaal van de toegepaste wiskunde. Niet de afzonderlijke fout doet ons het plezier aan wetten te gehoorzamen, die is wetteloos. Maar telkens, wanneer het wetteloze zich op grote schaal voordoet, kan de statisticus zijn taak opnemen, vertrouwend op de wetmatigheid van het toeval, de statistiek. Hoe dit mogelijk is - dat pleegt men te illustreren aan een aardig stuk speelgoed - het bord van Galton; (...)'

Waarna Freudenthal uitlegt dat elke laag in het bord van Galton overeenkomt met een mogelijke foutenbron en de vraag die een pin van het bord aan het vallende balletje stelt (*links of rechts?*) vertaald kan worden naar een foutenbron (*te groot of te klein, te veel of te weinig?*).

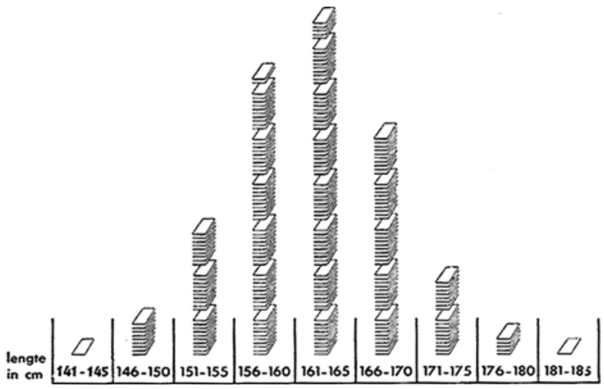
figuur 2: het meten van voetlengte en voetbreedte

4 Resultaten

Eind jaren veertig waren er nog nauwelijks computers, men beschikte alleen over vernuftige tel- en rekenmachines. Het verwerken van alle meetgegevens was daardoor een hele klus, en het uitvoeren van berekeningen op die data al helemaal. Het dragende medium voor de data was de ponskaart (ook wel Hollerithkaart genoemd). De ponskaarten konden verwerkt worden door een sorteermachine. Tot ver in de jaren zeventig zijn ponskaarten in gebruik gebleven voor het doen van girobetalingen.

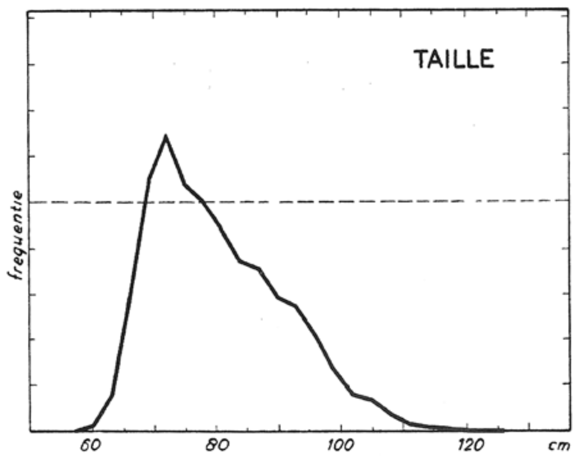
Over het bepalen van de frequentieverdeling van de lengte schrijft Freudenthal heel beeldend:

> 'Aan de hoogte van de stapel die bij een bepaalde lichaamslengte ligt, zie ik hoe frequent die lengte is, en de gevellijn van die hele rits kaartenstapels heet daarom de frequentiekromme van de lichaamslengte.'



figuur 3: elk ponskaartje stelt 20 gemeten vrouwen voor; elk stapeltje van 10 kaartjes stelt 200 gemeten vrouwen voor

De frequentieverdeling van de lengte ziet er aardig symmetrisch uit. Heel anders is dat bij de taille. De verdeling van de taille is asymmetrisch, en wel scheef naar rechts, zoals dat in vaktermen heet.



figuur 4: frequentieverdeling van de taille

Ook de maten gewicht en heupomvang hebben een dergelijke asymmetrische verdeling. Het blijkt dat de vijftien lichaamsmaten opgedeeld kunnen worden in twee groepen: lengtematen en diktematen. De lengtematen hebben een symmetrische verdeling en worden in de eerste plaats bepaald door het beenderstelsel. De diktematen zijn asymmetrisch en worden naast het beenderstelsel ook bepaald door spieren en vetlagen. Freudenthal zegt het weer veel mooier:

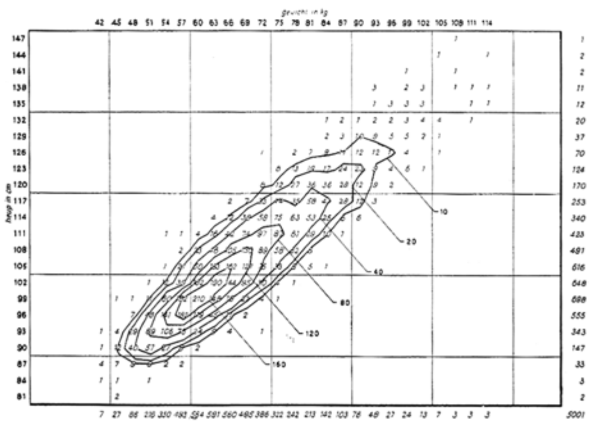
> 'Wij constateren dus het feit, dat bij de maten van het beenderenstelsel afwijkingen van het gemiddelde naar beide kanten ongeveer even frequent zijn - de frequentiekromme is symmetrisch -, dat daarentegen in alle kwesties van gewicht en corpulentie een uitgesproken voorkeur heerst voor afwijkingen naar de kant van het stevige.'

5 Samenhang tussen variabelen

De ponskaarten kunnen ook naar twee kenmerken tegelijk geordend worden:

> 'Wij krijgen dan niet één rij stapels met als gevellijn een normale kromme, maar een rij rijen, op een tafel gerangschikt.'

Als gesorteerd wordt naar gewicht en heupomvang en vervolgens stapels van gelijke hoogte met elkaar verbonden worden, ontstaat een soort van langgerekte heuvelrug.



figuur 5: spreidingskaart gewicht (horizontaal) versus heupomvang (verticaal) met hoogtelijnen

Freudenthal geeft er een beeldende beschrijving van:

> '… 'komt u in de buurt van het gemiddelde gewicht of de gemiddelde heupomvang, dan stuit u op stapels van 100-200 kaarten. 210 vrouwen met een gewicht van 60 kg en een heupomvang van 99 cm, dat is dan de top van het kaartengebergte, dat naar het NW weer steil afvalt, naar het ZW minder steil en naar het NO langzaam glooiend uitloopt tot naar de zeldzame gevallen toe, zoals een enkele heupomvang van 147 cm bij een gewicht van 108 kg en een heupomvang van 144 cm bij een gewicht van 114 kg …'

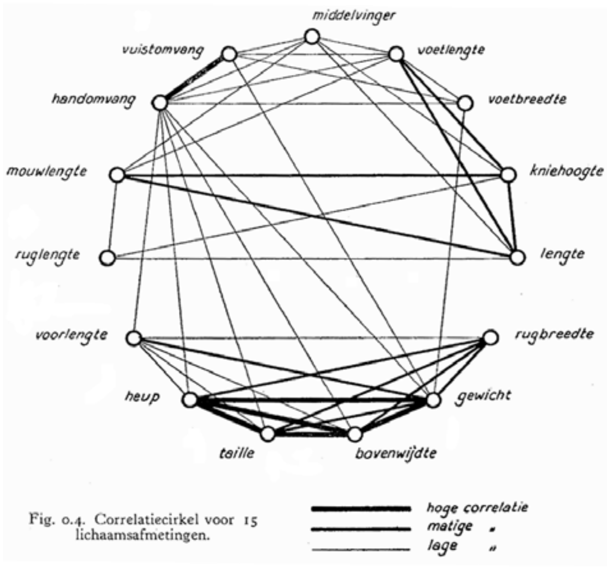
De vijftien kenmerken vertonen onderling een wisselende mate van samenhang, die twee aan twee uitgedrukt kan worden in een correlatiecoëfficiënt. Zo blijkt de correlatie tussen gewicht en heupomvang 0,9247 te zijn (sterk verband), terwijl de correlatie tussen gewicht en lengte slechts 0,2124 bedraagt (zwak verband).

Bij vijftien kenmerken zijn er $15 \times \frac{14}{2} = 105$ correlatiecoëfficiënten om uit te rekenen. Voorwaar een hele klus, als je weer bedenkt dat het computertijdperk nog maar nauwelijks begonnen was, en dat er 5001 vrouwen meededen (er zijn alles bij elkaar dus ruim 75.000 metingen gedaan). Het boek bevat een imposant rekenschema met daarin alle tussenstappen die nodig zijn om tot de juiste resultaten te komen. Een stukje van het resultaat van deze rekenpartij, de tabel met correlatiecoëfficiënten, staat hieronder (in werkelijkheid is deze tabel dus 15 bij 15).

	Gew.	Lengte	Bovenw.	Taille	Heup	Voorl.	Rugl.
Gewicht		.2124	.8768	.8422	.9247	.6948	.2582
Lengte	.2117		−.0779	−.1578	−.0107	.2988	.5933
Bovenwijdte	.8697	−.0771		.9180	.8699	.6605	.0742
Taille	.8372	−.1564	.9058		.8967	.5257	.0317
Heup	.9130	−.0105	.8526	.8807		.5354	.1124
Voorlengte	.6012	.2578	.5673	.4525	.4578		.4105
Ruglengte	.2255	.5169	.0644	.0276	.0970	.3105	

figuur 6: enkelvoudige correlatiecoëfficiënten

Nadere bestudering van deze tabel leert, dat er vrij hoge waarden voorkomen (zeg meer dan 0,8), maar ook hele lage waarden en zelfs waarden die licht negatief zijn.
Nu is de volledige tabel nogal een cijferbrij, en je kunt je afvragen of dezelfde gegevens niet op enigerlei wijze aardig te visualiseren zijn.
In het boek staat een prachtig antwoord op deze vraag, de *correlatiecirkel* zoals Freudenthal die noemt. Het is een graaf, waarbij de punten de vijftien lichaamskenmerken voorstellen, en de verbindingen de correlaties daartussen. Hierbij is de ligging van de punten zodanig gekozen, dat er als het ware vanzelf 'clusters' van samenhangende lichaamsmaten zichtbaar worden.



figuur 7: correlatiecirkel

Hiermee zijn we weer terug bij de eerdergemaakte opmerking dat de lichaamsmaten opgedeeld kunnen worden in twee groepen: lengte- en diktematen. Het onderste deel van de graaf geeft zo de diktematen weer (met heup, taille, gewicht en bovenwijdte in de hoofdrol), het bovenste deel de lengtematen. En passant lezen we af dat vuistomvang en voetlengte laag correleren, dus hoezo het gebruik om een sok om je vuist te winden voor het bepalen van de juiste maat bij het kopen van sokken?

Correlatiecoëfficiënten zijn een maat voor samenhang, maar over hoe een mogelijk verband eruit kan zien, doen zij geen uitspraak. Daarvoor hebben we regressielijnen nodig. Bijvoorbeeld de regressielijnen voor heupomvang (H) en gewicht (G) zijn:

$$H = 0.767G + 53{,}876$$
$$G = 1{,}069H - 45{,}564$$

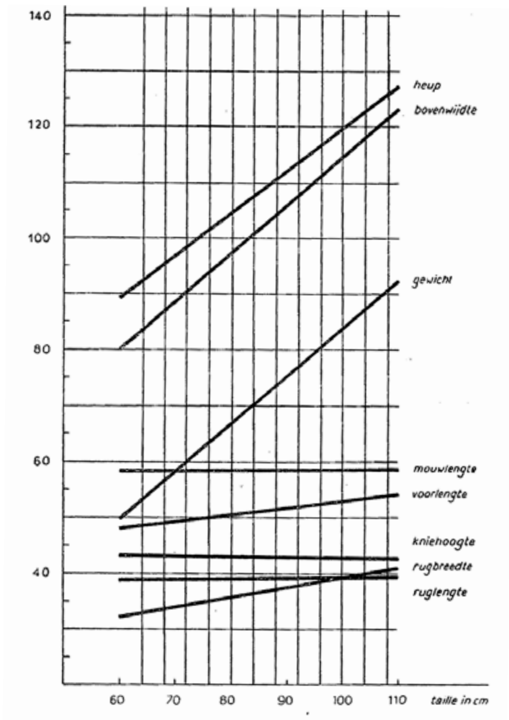
Bij een gewicht van 66,8 kg is de voorspelde heupomvang volgens de eerste vergelijking 105,1 cm. Aan de lezeressen van dit artikel de taak om na te gaan of deze regressielijnen anno 2005 nog steeds zo'n beetje kloppen! In totaal zijn er 210 regressielijnen op te stellen (dus niet 105, zoals bij de correlatiecoëfficiënten, want de twee bovenstaande vergelijkingen zijn wezenlijk verschillend).

6 Eéndimensionaal maatsysteem

Na al deze analyses van het cijfermateriaal wordt het tijd om terug te keren naar de oorspronkelijke probleemstelling: het ontwerpen van een maatsysteem voor confectiekleding. De regressielijnen kunnen we hierbij goed gebruiken, want die bieden immers de mogelijkheid om uit één maat de andere maten te voorspellen. Je zou bijvoorbeeld de heupomvang als uitgangspunt kunnen nemen, om vervolgens met behulp van regressie op de heup zo goed mogelijke waarden te vinden voor de andere lichaamsmaten. De confectie-industrie gaat met zo'n rijtje waarden aan de slag en maakt er een leuk confectiejurkje bij. Nog een indeling in klein-middel-groot erbij (of iets dergelijks) en klaar is kees.
De cruciale vraag is nu, welke lichaamsmaat het beste als uitgangspunt genomen kan worden. Een gangbaar criterium in de statistiek bij dit soort vraagstukken is om te proberen de som van de residuen die overblijven na regressie zo klein mogelijk te krijgen. Het voert te ver om dit hier verder uit te werken, en bovendien is men deze weg ook helemaal niet opgegaan in het Bijenkorfonderzoek.
In dit onderzoek is een heel ander criterium gekozen: *het minimaliseren van de pompkosten*. Dit zijn de kosten die gemaakt moeten worden om een confectiekledingstuk passend te maken in het geval de maten van de klant toch te veel afwijken van de standaardmaten. De coupeur moet dan aan de slag en dat kost tijd en dus geld. Het uitleggen van een mouwtje zal zo duur niet zijn, maar het veranderen van de rugbreedte is een ingewikkelde zaak.
In het onderzoek is aan een groot aantal coupeurs gevraagd wat de kosten van pompwerk zijn. Daar kwam na een serie ingewikkelde berekeningen uit dat de te verwachten gemiddelde pompkosten per japon het laagste zijn in het geval de taille als verklarende afmeting voor het maatsysteem wordt gekozen. Zodoende vormen de regressievergelijkingen op de taille een geschikte basis voor het nieuwe (ééndimensionale) maatsysteem. De belangrijkste vergelijkingen zijn:

Bovenwijdte:	$B = 0{,}86\ T + 28{,}6$
Heupomvang:	$H = 0{,}76\ T + 43{,}6$
Voorlengte:	$V = 0{,}12\ T + 41{,}2$
Ruglengte:	$Rl = 0{,}006T + 38{,}6$
Rugbreedte:	$Rb = 0{,}18\ T + 21{,}8$
Gewicht:	$G = 0{,}85\ T - 1{,}59$
Lengte:	$L = -0{,}095\ T + 170{,}2$

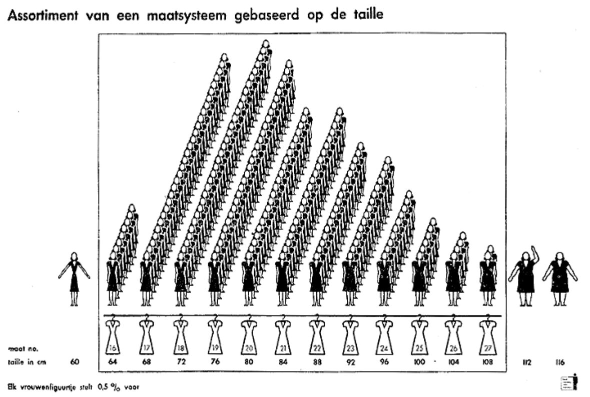
Moet er bijvoorbeeld een confectiejurkje ontworpen worden voor taillemaat 64 cm, dan rollen de andere maten eenvoudigweg uit deze regressievergelijkingen (waarbij Gewicht overigens niet van belang is voor de fabriek, maar dat terzijde). De onderstaande figuur brengt dit nog eens in beeld:



figuur 8: regressielijnen op de taille

Wie denkt dat we er dan nu uit zijn, heeft het mis. Want er moet natuurlijk ook nog aan de fabriek opgegeven worden *hoeveel exemplaren* er van elk jurkje (of ander kledingstuk) gemaakt moeten worden. De medewerker inkoop wil immers niet met al te veel winkeldochters blijven zitten aan het eind van het seizoen.
Het bepalen van deze aantallen is gelukkig relatief eenvoudig: dit kan gebaseerd worden op de frequentieverdeling van de taille zoals die uit het onderzoek naar voren kwam (zie fig.4).

De onderstaande figuur laat zien wat er dan uiteindelijk in de rekken komt te hangen. In principe ligt er hiermee een voorstel voor een maatsysteem: neem de taille als basis, dan zijn er minimale pompkosten.



figuur 9: assortiment gebaseerd op taille

7 Tweedimensionaal maatsysteem

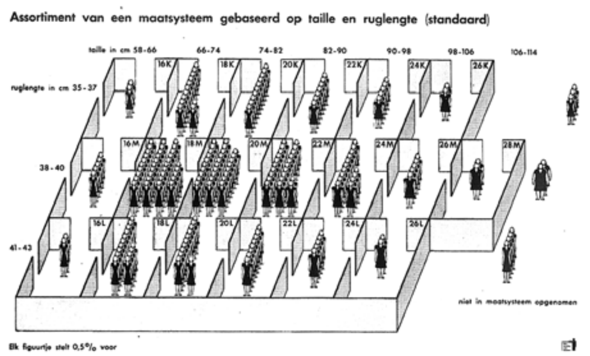
Een beperking van dit systeem is dat er maar één lichaamsmaat in verwerkt zit, waardoor de kleding toch nog vrij vaak niet goed zal passen. Fraaier is om met een tweedimensionaal maatsysteem te werken.
Vanuit deze gedachte kan de hele cyclus opnieuw doorlopen worden: ga na bij welke verklarende afmetingen de pompkosten minimaal zijn en kies die als uitgangspunt voor het systeem. Een combinatie van een lengtemaat met een breedtemaat ligt daarbij het meeste voor de hand. Zo blijkt het ook uit te pakken: de combinatie taille-ruglengte geeft de laagste pompkosten.
De berekeningen worden wel een stuk bewerkelijker. Zo moeten er regressielijnen bepaald worden op twee variabelen in plaats van op één (multipele regressie). Bijvoorbeeld de regressielijn voor de bovenwijdte (bij regressie op taille en ruglengte) luidt:

$$Bw = 0{,}84\ T + 0{,}22\ Rl + 22$$

Verder moet bepaald worden hoeveel verschillende maten men toe wil staan in het systeem.

In figuur 10 neemt de taille met sprongetjes van 8 cm toe en de ruglengte met sprongetjes van 4 cm.
Elk hokje brengt een combinatie van die twee in beeld, voorzien van een maataanduiding (linksboven 16K voor het kleinste maatje, behorend bij ruglengte 35-37 cm en taille 58-66 cm). Uitgaande van drie maten voor de ruglengte (K, M en L) en zeven maten voor de taille (16, 18, 20, 22, 24, 26 en 28) zijn er nu 21 confectiematen gedefinieerd. Dit maatsysteem wordt ‘Standaard’ genoemd.

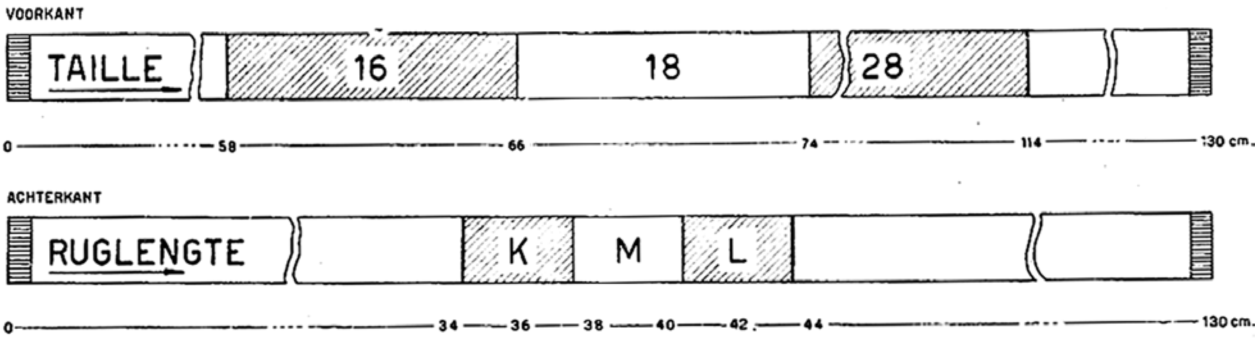
Deze figuur toont ook weer hoeveel er ingekocht moet worden van elke maat. Veel van de courante maten in het midden, weinig van de minder courante maten en helemaal niets van de exceptionele maten (vertegenwoordigd door de dames rechts die buiten de hokjes vallen; zij zullen op zoek moeten naar maatwerk voor zichzelf).



figuur 10: assortiment ‘Standaard’ gebaseerd op taille en rug

Ook deze figuur hangt zichtbaar samen met figuur 4: het kenmerkende scheef naar rechts van de tailleverdeling komt terug in deze afbeelding.

Voor de klant is er aldus heel wat keus. Een goed advies van de verkoper, opdat de klant door de bomen het bos nog ziet, lijkt daarom niet overbodig. Om het de verkoper makkelijk te maken, is ook een meetlint ontworpen (fig.11). Aan de voorkant staat de maataanduiding voor de taille, waarbij maatje 16 correspondeert met een tailleomvang van 58-66 cm. Aan de achterkant zijn de maten voor de ruglengte weergegeven.



figuur 11: meetlint voor maatsysteem ‘Standaard’

8 Ten slotte

Anno 2005 is ‘De juiste maat’ nog steeds een boek om van te smullen. Het zou verplichte, maar zeker aangename kost kunnen zijn voor elke docent statistiek (en ook voor de docent wiskunde die wel eens zijn neus ophaalt voor statistiek).
Niet alleen om het onderzoek naar de lichaamsafmetingen en alles wat daar verder mee gedaan wordt, maar ook om de vele columnachtige uitstapjes over algemene principes van statistiek en kansrekening die erin staan.

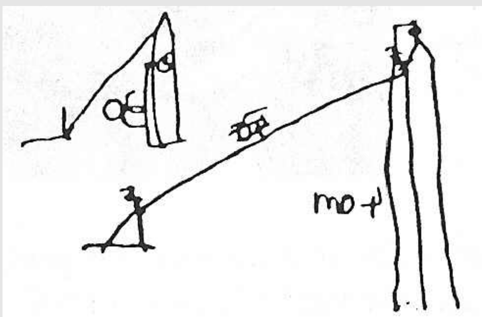
Veel ideeën waar Freudenthal later zo bekend mee is geworden, zijn in de kiem al terug te vinden in dit boek. En wie eerder aan zijn of haar leerlingen denkt dan aan zichzelf: voor praktische opdrachten bevat dit boek eveneens prachtig materiaal!

Wie meer wil weten: h.verhage@fi.uu.nl

Hans Freudenthal cooperated in the optimizing of ready-to-wear clothes sizes for a Dutch warehouse. Together with J. Sittig he wrote a book with the title ‘The perfect size’. Despite the fact that the book was published in 1951, and the optimum of the sizes has changed, the way the data of 5000 women are treated statistically is still very up-to-date according to Heleen Verhage.

Wandelingen met Bastiaan

Bastiaan (7,6). De hoogte van een kerktoren (en apart van de klok) wordt viserend gemeten: vergeleken met een stok op een muur geplaatst, op een - afgestapte - afstand van de kerk.



(*Appels en peren / wiskunde en psychologie.* Apeldoorn: Van Walraven, 71)

Twee ‘didactikids’ over de lege getallenlijn

- Freudenthals observaties als inspiratiebron -

Marja van den Heuvel-Panhuizen
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

In Nederland wordt de inbreng van kinderen bij de ontwikkeling van reken-wiskundeonderwijs als erg belangrijk gezien. Freudenthal heeft daarvoor met de observaties van zijn kinderen en kleinkinderen een basis gelegd. Zijn doel was vooral om via spontane waarnemingen grip te krijgen op de cognitieve ontwikkeling van kinderen en om zo aanwijzingen te genereren voor het onderwijs. Dit laatste is ook het doel van het onderzoek dat onderwerp is van dit artikel. De beoogde aanwijzingen worden hierbij wel op een andere manier verkregen. In plaats van de betrokken kinderen te observeren, worden ze direct op hun didactische expertise aangesproken. Ze krijgen vragen voorgelegd over hoe zij denken over bepaalde onderwijskwesties en hoe zij het onderwijs zouden aanpakken. Van deze leerlingconsultaties valt veel te leren. In dit artikel vertellen twee kinderen wat zij vinden van de lege getallenlijn. Als didactisch model zijn ze er niet erg tevreden over. De getallenlijn was voor hen duidelijk een remmende factor. Bij doorvragen blijkt dat het onderwijs hierbij een grote rol heeft gespeeld. Later stellen ze hun mening echter bij. Het voorstel waar deze ‘didactikids’ aan het eind van het interview mee komen, zou tot de didactische bagage van iedere (toekomstige) leraar moeten behoren.

1 Inleiding

Didactikids? Ja, ze bestaan echt. Het zijn kinderen die van nature een soort onderwijsaanleg hebben of die deze aanleg hebben ontwikkeld doordat ze bijvoorbeeld een vader of moeder of ander naast familielid in het onderwijs hebben. Het zijn ware didactische experts van wie leraren, onderzoekers en ontwikkelaars van reken-wiskundeonderwijs veel kunnen leren.
In dit artikel wil ik twee van deze didactikids aan het woord laten. Uit het materiaal dat ik door gesprekken met deze kinderen heb verzameld, heb ik voor dit artikel één onderwerp gekozen: het werken op de lege getallenlijn. Ik heb de kinderen over dit onderwerp geïnterviewd, omdat ik van hun vader had gehoord dat ze hierover zo hun gedachten hadden. Op z’n zachtst gezegd komt hun opvatting erop neer dat ze het door veel reken-wiskundedidactici vertolkte enthousiasme voor de lege getallenlijn als didactisch model bepaald niet delen. Het interview maakt duidelijk waarom dit zo is. Het bevat een aantal belangrijke lessen voor het gebruik van de lege getallenlijn en met name voor de implementatie ervan via methoden en de opleiding en nascholing van leraren.
Voordat ik op het interview zelf in ga, vertel ik eerst iets over de kinderen en de opzet van het onderzoek. Maar ik wil het artikel beginnen met een korte algemene beschouwing over kinderen als bron van inzicht in het leren en onderwijzen van rekenen-wiskunde. Het voorbeeld dat Freudenthal in deze heeft gegeven, krijgt in het hier beschreven onderzoek wel een andere uitwerking.

2 Kinderen als bron van inzicht

De Wiskobastraditie van het observeren van kinderen

Sinds Wiskobas hebben kinderen altijd een grote inbreng gehad bij de ontwikkeling van het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs. Het waren Freudenthals observaties van zijn kinderen en vooral zijn kleinkinderen die hiervoor een basis hebben gelegd. Zijn voorbeeld deed volgen. We kennen niet alleen Bastiaan, die liet zien hoe hoog de wolken zitten die op een zonnige dag aan de hemel staan in vergelijking tot wolken die aankondigen dat het gaat regenen, maar ook Streeflands zoon Coen, die vond dat de walvis op de poster veel te groot was afgebeeld - om maar twee van het grote aantal observaties te noemen van Freudenthal en zijn collega’s uit de Wiskobastijd. Bij de 75$^{\text{ste}}$ verjaardag van Freudenthal sprak Van den Brink (1980) dan ook over ‘onderwijzende kinderen’.
Behalve dat Freudenthal het voorbeeld heeft gegeven voor het maken van deze - zoals hij het noemt (Freudenthal, 1984a, pag.101) - ‘terloopse’ observaties, heeft hij ook aangegeven waar het bij deze waarnemingen om te doen was: ‘wat (in echte leerprocessen) telt, zijn de discontinuïteiten, de sprongen’ (ibid., pag.103). Het zijn de ontdekkingen van kinderen die de sprongen in hun ontwikkeling markeren. Om deze ontdekkingen op het spoor te komen, moeten we volgens Freudental naar het individuele kind kijken.

> Neem je het gemiddelde over zoveel kinderen, dan vlak je die sprongen uit. Het gemiddelde kind vertoont inderdaad een continue ontwikkeling. Maar kijk je scherper, naar de enkeling, dan neem je de sprongen waar, en wat mij betreft, zijn zij het enige waar het op aankomt (ibid.)

In samenhang met het voorgaande heeft Freudenthal tegen de heersende norm van het empirisch-analytisch sociaal-wetenschappelijk onderzoek in, de (bewijs)kracht van kwalitatief $n = 1$ onderzoek blootgelegd; voorbeelden hiervan zijn te vinden in zijn voordracht voor de Amerikaanse 'National Council of Teachers of Mathematics' (Freudenthal, 1979). Bovendien vond hij hiervoor bevestiging in de exacte wetenschappen: 'Eén slinger van Foucault was voldoende om de wenteling van de aarde te demonstreren' (Freudenthal, 1984a, pag.101). Elders benadrukte hij nog eens: 'Eén goede observatie kan meer waard zijn dan honderden metingen of interviews' (Freudenthal, 1984b, pag.19).

Zo hebben de hierboven beschreven observaties van Bastiaan en Coen ons de ogen geopend voor de kwalitatieve ingangen van verhoudingen, de relatie met het meten en de visuele wortels van verhoudingen; allemaal zaken die erg belangrijk zijn om het begrip verhoudingen te onderwijzen en allemaal didactische ontdekkingen die ten tijde van het mechanistische reken-wiskundeonderwijs niet zo vanzelfsprekend waren. Toch waren er echter geen herhaalde metingen voor nodig om ze toe te voegen aan het geheel van theoretische noties die in samenhang met elkaar de domeinspecifieke realistische onderwijstheorie vormen voor het vak rekenen-wiskunde.
Bij Freudenthal bestond het onderzoek vooral uit terloopse observaties. Bewust experimenteren deed hij zelden (Freudenthal, 1984a, pag.101) en van opiniepeilingen en het afnemen van vragenlijsten bij leraren en leerlingen moest hij helemaal niets hebben (Freudenthal, 1978, 1988). Ze leverden volgens hem alleen maar zinloze, onbetrouwbare of voorspelbare reacties op. Ofschoon ik van de ene kant zijn scepsis wel kan delen, denk ik toch dat Freudenthal hierover anders geoordeeld zou hebben als hij kinderen had geïnterviewd *over* onderwijs. Op dit direct aanspreken van kinderen op hun deskundigheid op het gebied van onderwijs ga ik in het volgende in.

Kinderen bevragen als didactische experts

Kinderen om raad vragen over onderwijskwesties is in onderwijsonderzoek een zeldzaamheid. Dat was in de tijd van Wiskobas zo en dat is het nu nog. Maar als we over de Nederlandse grens heengaan en ons niet beperken tot reken-wiskundeonderwijs zijn er wel voorbeelden van te geven. Deze voorbeelden gaan vooral over de zienswijzen van kinderen op wat er in de klas gebeurt. Verschillende onderzoeken laten zien dat leerlingen andere ideeën kunnen hebben over wat zich in de klas afspeelt dan leraren. Soms zijn deze verschillen nogal schrijnend. Leraren kunnen bijvoorbeeld vinden dat ze veel aan groepswerk doen en dat ze de leerlingen actief bij de lessen betrekken, terwijl de leerlingen zelf het tegendeel ervaren (Hagborg, 1994). Ook kunnen leraren en leerlingen verschillend oordelen over wat een belangrijk moment in de les is geweest (Shimizu, 2002). Verder is uit onderzoek gebleken, dat kinderen zelfs op jonge leeftijd in staat zijn de onderwijsaanpak te doorgronden. Kleuters hebben bijvoorbeeld erg goed door dat er 'gewerkt' moet worden, ook al suggereert de leraar dat ze een 'spelletje' gaan doen (Wing, 1995). Onderzoekers als Wing benadrukken dan ook dat leraren hierover een opener gesprek met hun leerlingen zouden moeten hebben en dat ze hun leerlingen meer moeten betrekken bij didactische beslissingen. Dahlberg, Moss & Pence (1999, pag.49) zeggen het als volgt:

> Children have a voice of their own, and should be listened to as a means of taking them seriously, involving them in democratic dialogue and decision-making and understanding childhood.

Spratt (1999) onderstreept bovendien dat leerlingen een belangrijke rol kunnen spelen bij het ontwerpen van lesmateriaal. Denk hierbij ook aan het werk van Van den Brink (1987), die kinderen rekenboeken liet maken, en aan het in het onderwijs gebruiken van door kinderen bedachte opgaven (zie bijvoorbeeld Van den Heuvel-Panhuizen, Middleton & Streefland, 1995).
Ofschoon deze laatste voorbeelden laten zien dat we in Nederland de kinderen hebben aangesproken op hun didactische kwaliteiten, zijn we - bij mijn weten - toch nooit zover gegaan dat we kinderen om advies hebben gevraagd. Eigenlijk is dit wel een omissie, zeker als je uitgaat van een onderwijstheorie die bij het onderwijsleerproces een grote inbreng toekent aan kinderen en die een actieve leerlingparticipatie hoog in het vaandel heeft staan. Met de nu uitgevoerde leerlingconsultatie wil ik een begin maken om iets aan dit tekort te doen.

3 Opzet van het leerlingconsultatie-onderzoek

De geraadpleegde kinderen

Zoals gezegd, beperk ik me in dit artikel tot de ideeën die kinderen hebben over het gebruik van de lege getallenlijn. Deze gegevens zijn ontleend aan een consultatieonderzoek waarbij aan twee kinderen advies is gevraagd over een aantal zaken die spelen bij reken-wiskundeonderwijs.
De kinderen zijn de tweelingzusjes Ylja en Joni. Ze zijn elf jaar oud, zitten op dezelfde school, allebei in groep 7, maar niet bij elkaar in de klas. Ze krijgen les met de

methode 'Pluspunt'. Hun trotse vader is een collega van mij op het Freudenthal Instituut.
Ofschoon Ylja en Joni een identieke tweeling zijn, is gemakkelijk te zien wie Ylja is en wie Joni is. Ylja (links) draagt het liefste blauwe kleren en Joni (rechts) heeft een voorkeur voor rood (fig.1).

figuur 1: Ylja en Joni wijzen in 'Pluspunt' aan welke opgaven ze leuk vinden en welke niet

De reden dat Ylja and Joni zijn gevraagd om mee te doen aan dit onderzoek is, dat bij een eerder onderzoek hun belangstelling voor onderwijs naar voren was gekomen. Dat eerdere onderzoek omvatte de *try-out* van een aantal opgaven waarmee onderzocht zou worden hoe goed goede rekenaars zijn in het oplossen van puzzelachtige rekenproblemen. Ylja en Joni vonden het niet alleen leuk om deze opgaven te maken en hun oplossingsstrategieën uit te leggen, ze gaven meteen ook allerlei suggesties voor hoe het onderwijs aan knappe leerlingen het beste kan worden aangepakt.

Natuurlijk zijn Ylja en Joni geen doorsneeleerlingen, maar dat betekent nog niet dat ze ongeschikt zijn voor onderzoek. Natuurlijk bestaan er legio onderwijsonderzoeken waarbij de data gezuiverd moeten worden van dit soort leerlingen, omdat men algemene patronen en mechanismen wil identificeren. Het doel van dit leerlingconsultatieonderzoek is echter niet het trekken van geldige, algemene conclusies over wat kinderen denken over reken-wiskundeonderwijs, maar het leren en onderwijzen van rekenen-wiskunde beter te doorgronden door te luisteren naar wat kinderen over de onderwijspraktijk te zeggen hebben.

In totaal zijn Ylja en Joni voor dit leerling-consultatieonderzoek twee keer geïnterviewd.
In maart 2005 heeft een oriënterend interview plaatsgevonden. In mei 2005 is dit gevolgd door een uitgebreider interview waarbij aan de tweeling een aantal prangende kwesties op het gebied van reken-wiskundeonderwijs of onderwijs in het algemeen is voorgelegd. Hieronder bevonden zich een aantal recente onderzoeksresultaten en/of nieuwsberichten over onderwijs.

Het eerste interview

Het eerste interview duurde anderhalf uur en was bedoeld ter oriëntering. Ylja en Joni konden vrij praten over hun ervaringen met reken-wiskundeonderwijs. Als introductie heb ik ze verteld dat ik een onderzoeker van onderwijs ben. Ik heb ze uitgelegd dat ik graag te weten wil komen wat de beste manier is om kinderen rekenen-wiskunde te leren en dat ik er achter wil komen hoe we het reken-wiskundeonderwijs kunnen verbeteren. Onderwijs onderzoeken houdt meestal in dat gegevens worden verzameld over leraren en leerlingen, maar bij het onderzoek waarvoor ik Ylja en Joni heb gevraagd is de aanpak wat anders. Ik ga Ylja en Joni niet vragen om een test te maken, ik ga ze ook niet in de klas observeren, maar ik ga ze interviewen als deskundigen op het gebied van onderwijs.
De manier waarop Ylja en Joni op deze introductie reageerden was al zeer opmerkelijk, maar helemaal in overeenstemming met de wijze waarop ik ze aansprak. Ze werden er niet door in verlegenheid gebracht. Er werd niet gegiecheld. Ik behandelde ze als deskundigen en zij voelden zich deskundig. Sterker nog, ze zijn het.
Het eerst interview is niet op video vastgelegd. Ik heb alleen enkele foto's genomen en aantekeningen gemaakt. Deze aantekeningen vormen echter geen woordelijk verslag. Een onderwerp dat tijdens dit eerste interview nogal centraal stond, was of Ylja en Joni rekenen-wiskunde een leuk vak vinden en waarom ze dit vinden. Het volgende geeft een indruk van wat hierbij naar voren kwam. De reacties van Ylja en Joni zijn op basis van de aantekeningen gereconstrueerd.

Rekenen-wiskunde: een leuk vak of niet

Ofschoon Ylja en Joni tamelijk goed zijn in rekenen-wiskunde, houden ze allebei niet erg van het vak.

Ylja: Wat niet leuk is in de rekenles is, dat je steeds dezelfde sommen moet doen. Bijvoorbeeld 84 × 62. Wat ook niet leuk is, is dat wanneer kinderen bepaalde sommen niet begrijpen dat de leraar dan de sommen aan de hele klas gaat uitleggen. Dan hoor je vaak de kinderen zuchten. Er zijn altijd kinderen die iets niet begrijpen. Dat is niet erg. Iedereen vindt wel bepaalde dingen moeilijk.

Joni: Er zou eigelijk een bepaalde regeling moeten zijn. Wie het snapt mag zelfstandig gaan werken. Wie het niet snapt, krijgt uitleg. Nu krijgt vaak de hele klas uitleg.

Een andere reden waarom Ylja en Joni rekenen-wiskunde niet leuk vinden is dat het voor hen niet uitdagend genoeg is. Ze hebben vooral een hekel aan het feit dat ze veel dingen moeten opschrijven.

Ylja: Ik ben blij dat er afkortingen bestaan!

Ook vinden ze het vervelend dat ze zoveel sommen moeten uitrekenen. De sommen moeten niet te lang duren. Denken over sommen vinden ze wel leuk. Als een reactie hierop komt Joni met het volgende.

Joni: De leraar zegt vaak alleen hoe je het moet doen, maar niet waarom iets zo is.
Ylja: Je kunt niet alles bewijzen. Bijvoorbeeld 1 + 1= 2. Ik heb in de ‘Rekenduivel’ hierover gelezen.
Joni: Je kunt het wel laten zien.
Ylja: De kinderen vragen vaak aan elkaar waarom een bepaalde manier niet mag of ook goed is.

Als ik vraag waarom ze dit aan elkaar vragen en niet aan de leraar, moeten ze het antwoord schuldig blijven.

Ylja: Dit is een heel moeilijke vraag.

Aan het eind van het interview maken we een afspraak voor een volgend interview. Omdat Ylja en Joni me graag hun mening over ‘Pluspunt’ willen vertellen, spreken we af dat dit een van de onderwerpen zal zijn van het volgende interview.

Het tweede interview

Het tweede interview is gehouden in mei 2005. Het was een gestructureerd interview waarbij de kinderen is gevraagd wat ze denken van een aantal zaken die momenteel in het reken-wiskundeonderwijs spelen of in het onderwijs in het algemeen spelen. De onderwerpen waren ontleend aan recente onderzoeksresultaten en nieuwsberichten over onderwijs.

1 Wat is de beste manier om zwakke rekenaars te leren rekenen?
2 Kun je iets leren terwijl je slaapt?
3 Kauwgom kauwen bij een rekentoets, helpt dat?
4 Een vakantieschool. Wat vinden jullie daarvan?
5 Hoe moet een leraar werken met ‘Pluspunt’?
6 Zelf een school beginnen. Hoe zou die er dan uit zien?
7 Is reken-wiskunde een leuk vak?
En waarom is dit zo of niet zo?
8 Hoe denk je over oefenen?
9 Helpt de lege getallenlijn bij het rekenen?
10 Hoe denk je over reken-wiskundelessen?
Wat zou je anders doen?

figuur 2: de onderwerpen die in het tweede interview aan bod zijn gekomen

In totaal omvatte de leerlingconsultatie tien onderwerpen De tien onderwerpen zijn aan de kinderen voorgelegd aan de hand van een Powerpoint-presentatie. Aan elke vraag ging een korte toelichting vooraf waarbij de kinderen een foto of tekening met wat uitleg te zien kregen. Het volledige interview duurde ongeveer twee uur en is op video opgenomen. Van deze videoregistratie is een woordelijk verslag gemaakt.

4 Ylja’s en Joni’s opvattingen over de lege getallenlijn

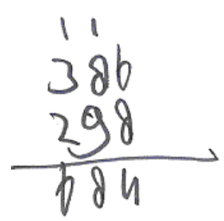
Van de tien onderwerpen die bij dit tweede interview aan bod zijn gekomen, wordt in dit artikel alleen ingegaan op de kwestie van de lege getallenlijn.

De lege getallenlijn als didactische model - een korte beschouwing vooraf

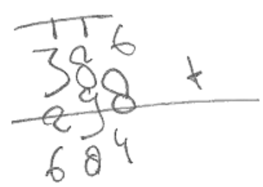
De lege getallenlijn is een van de belangrijkste didactische vindingen van realistisch reken-wiskundeonderwijs voor het rekenen tot 100 en 1000. Dit model heeft in Nederland in korte tijd in brede kring ingang gevonden. Zowel leraren als ontwikkelaars, onderzoekers en lerarenopleiders onderschrijven het belang ervan. Ook is de getallenlijn in alle nieuwe versies van de reken-wiskundemethoden terug te vinden. Wel moet hierbij opgemerkt worden dat de manier waarop de getallenlijn in de methoden wordt gebruikt niet altijd overeenkomt met de manier zoals deze bedoeld is: een flexibel denkmodel dat het optellen en aftrekken ondersteunt in plaats van een meetlijn waarop de precieze uitkomsten van bewerkingen zijn af te lezen.

Vraag 9 van het interview

Als introductie krijgen Ylja en Joni de volgende opgave te zien: 386 + 298 =. De opgave wordt in de horizontale schrijfwijze gepresenteerd. De kinderen krijgen de opdracht de som uit te rekenen. Ze krijgen geen aanwijzingen over de manier waarop ze de som moeten maken of opschrijven. Zonder aarzeling gaan ze echter allebei cijferen (fig.3a en 3b).



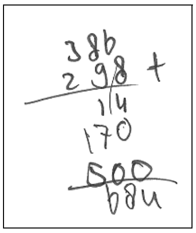
figuur 3a: het rekenwerk van Ylja



figuur 3b: het rekenwerk van Joni

Als ik daarna vraag of het ook nog op een andere manier kan, komen ze met een oplossing waarbij kolomsgewijs wordt gerekend. Dit houdt in dat ze de getallen als hele getallen verwerken in plaats van als cijfers (fig.4). Ylja en

Joni beschouwen dit als een oplossing die gemakkelijker is dan cijferen.



figuur 4: kolomsgewijze oplossing

Als ze vervolgens de vraag krijgen voorgelegd of deze som ook met de lege getallenlijn op te lossen is, barst de frustratie los. Hier volgt het woordelijke verslag. Tussen rechte haken staan mijn toevoegingen. Met '(...)' is aangegeven dat een stuk tekst is weggelaten of dat er tekst ontbreekt doordat deze onverstaanbaar was.

I(nterviewer:) Zou het helpen om hierbij de lege getallenlijn te gebruiken?

Joni: Het zal helpen, als je al die andere manieren die [in tijd gezien] ervoor zijn niet zou begrijpen.

Ylja: Van alle jaren eigenlijk, qua rekenen vind ik het stomste jaar eigenlijk groep 4, want dan blijf je altijd maar die getallenlijn ...

Joni: Alles moet je met de getallenlijn doen zo'n beetje.

Ylja: Je mag geen andere manier gebruiken. Het moet per se met de getallenlijn.

Joni: Terwijl de getallenlijn volgens mij juist bedoeld is voor de kinderen die het niet zo goed kunnen.

Ylja: Kijk, voor die is het heel makkelijk, zo'n getallenlijn, om stap voor stap iets uit te rekenen.

Joni: (...) Maar (...) voor sommige kinderen gaat de getallenlijn sneller als het onder elkaar uitrekenen, simpelweg omdat ze het onder elkaar uitrekenen gewoon niet snappen. (...)

I: Maar kijk eens naar die twee getallen.

De poging om ze op het idee te brengen een handige strategie toe te passen werkt niet. Joni en Ylja gaan uitleggen hoe het leertraject er globaal uitziet.

Joni: (...) wij leren zeg maar eerst de getallenlijn. In groep 5 leren we tussen streepjes. [Bedoeld wordt het werken met positielijnen waarbij de eenheden, de tientallen en de honderdtallen van elkaar gescheiden worden.] In groep 6 leren we op deze manier onder elkaar. [Bedoeld wordt het kolomsgewijs rekenen.] In groep 7 leren we op deze manier onder elkaar. (Bedoeld wordt het cijferen.) Dat zou voor mij best sneller kunnen (...).

Ylja: In groep 5 moet je dus per se of tussen streepjes - ik weet niet meer hoe het gaat; ik kan het dus niet laten zien - of met zo'n getallenlijn doen (...).

Vervolgens wordt nog een poging gewaagd om ze op het spoor van een handige strategie te zetten.

I: (...) Kijk eens naar die twee getallen. Wat is er bijzonder aan die twee getallen? (...) Als je nou een schatting zou moeten maken van de uitkomst van deze optelling ...

Joni: Dan zou ik driehonderd plus driehonderd ...

I: Maar je mag ook die 386 ook heel laten en dan zeggen van nou ...

Joni: Dat doe ik ook, dat doe ik ook, maar dan wordt het opeens veel makkelijker, dan wordt het gewoon 686 min 2.

Joni: (...) in groep 6, als kinderen willen gaan goochelen met nullen, bijvoorbeeld met optelsommen, nee met keersommen, of met gedeeld-door sommen, [dan zegt de juffrouw] 'nu leer je hoe het moet' (...) en in groep 7 leer je trucjes om het kloppend te krijgen.

(...)

Joni: En dit is bijvoorbeeld zo'n trucje.

(...)

I: Is dat een trucje?

Ylja: Ja, nou, je kunt het makkelijker uitrekenen met een trucje eigenlijk.

Joni: Makkelijker uitrekentrucje. Alleen wij leren - dit trucje dat hebben sommige kinderen al wel bedacht, dat gebruiken ze ook al wel in hun hoofd - maar wij leren eerst andere dingen.

Ylja: Wij leren dit niet echt op school.

I: Jullie leren dit niet.

Ylja: De kinderen, veel kinderen gebruiken het wel, maar het wordt niet uitgelegd. Dus de kinderen die, waarbij het niet in hun opkomt, kunnen deze snelle, makkelijke manier niet gebruiken (...).

I: Dus als ik jullie vraag 'reken het sommetje uit' dan gaan jullie bijna automatisch het onder elkaar zetten en uitrekenen?

(...)

Ylja: Ja, maar ik had nou niet goed naar de som gekeken. Maar meestal kijk ik wel even: 'Oh wacht, zo gaat het sneller.'

Joni: Vaak staat er een ... Soms staat er 'reken uit' en soms staat er 'reken handig uit'.

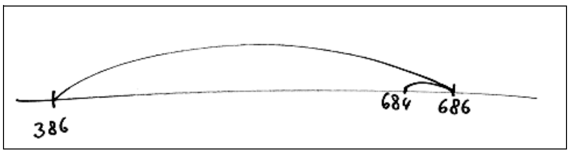
(...)

Ylja: En dan zet je toch een knopje om, als er staat 'reken handig uit' dan ga je meteen kijken hoe kan ik het het makkelijkste doen.

Maar Joni is nog niet overtuigd van de handigheid om de getallenlijn te gebruiken.

Joni: Hij kan best helpen, hij kan zelfs heel goed helpen, maar voor de kinderen die andere dingen ook goed kunnen, is een getallenlijn alleen maar tijd rekken, onhandigheid.

Dan laat de interviewer de volgende oplossing met de getallenlijn zien (fig.5).



figuur 5: oplossing op de lege getallenlijn

I: (...) je maakt een grote stap van driehonderd, en twee terug.

Ylja: Ja, maar zo hebben wij de getallenlijn niet geleerd. Wij hebben echt geleerd van dan doe je eerst tweehonderd erbij, dan negentig erbij en dan acht.
Joni: Wij hebben niet ...
Ylja: Deze manier ...
Joni: Die hebben wij echt niet veel doen, gebruikt. Heel af en toe misschien.
Ylja: Tegen de tijd dat wij dit, deze manier, zeg maar, doorkregen, deden wij deze stappen al uit ons hoofd.

Er wordt nog eens teruggekomen op de frustraties die Ylja en Joni met de getallenlijn hebben opgelopen.

I: Maar jullie hebben er niet zo'n beste herinnering aan?
Beide kinderen: Nee.
I: Kun je mij uitleggen, eh, waardoor dat komt?
Ylja: Omdat je het altijd moest doen, altijd maar (...). Dan zag je een som voor je, en dan werd er gezegd: 'Je *moet* het met de getallenlijn doen.'
Joni: En er zat zo weinig afwisseling in. Het wordt gewoon bijna, altijd als we een plussom of een minsom, gewoon rijtjes hadden, moesten we het altijd.
(...)
I: Dus dat zouden jullie liever anders gehad hebben?
Ylja: Ja.
(...)
Ylja: (...) Want die getallenlijn is op zich heel handig. Die getallenlijn is voor sommige kinderen heel duidelijk, (...) maar zo gauw jij een andere manier kent om die getallen, om zulke sommen uit te rekenen, is die getallenlijn niet meer nodig. Want er zijn zoveel andere manieren om dat te doen ...
Joni: En die sneller gaan.
I: ... snel is ook, als je de getallenlijn niet meer hoeft te tekenen, maar dat als je hem als het ware in je hoofd hebt.
Beide kinderen: Jaaa ...
Joni: Maar dan gebruik je hem nog steeds.
(...)
Ylja: Dus, zeg maar, eerst de getallenlijn leren. Dan het uit je hoofd leren, en dan, zeg maar, kunnen gaan uitleggen van wat je nu uit je hoofd hebt gedaan. Is eigenlijk hetzelfde als de getallenlijn. En zo gauw kinderen dat snappen, dan wordt er ergens een knop omgezet: 'hé, ik ken de getallenlijn uit mijn hoofd', en zo gauw ze weten van: 'hé ik ken de getallenlijn uit mijn hoofd' gebruiken ze die getallenlijn in het hoofd.

Een terugblik op vraag 9 van het interview

Het eerste wat opvalt bij de vraag over de lege getallenlijn is hoe professioneel Ylja en Joni over reken-wiskundedidactiek kunnen praten. Soms denk je gewoon met volleerde leraren van doen te hebben. Alsof het niets is, kunnen de twee kinderen zomaar even het leertraject schetsen voor het rekenen met hele getallen. Leraren in functie gaat dit niet altijd zo gemakkelijk af. Bij de laatste PPON medio-peiling gaf zo'n 20 procent van de ondervraagde leraren van groep 4 en 5 aan niet te weten wanneer het kolomsgewijs rekenen of het cijferen wordt aangeleerd (zie Kraemer et al., 2005).

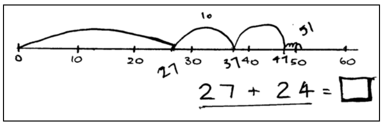
Het antwoord op interviewvraag 9 is ook erg onthullend over het handig rekenen: dit valt kennelijk onder de categorie 'trucjes', het lijkt op school niet te worden geleerd en er wordt alleen handig gerekend als het vermeld staat bij de opgave. Om handig te gaan rekenen is het nodig dat de kinderen even op het spoor van handig rekenen worden gezet. Bij dit laatste dient men zich dan ook nog te realiseren dat het hier om twee knappe rekenaars gaat, die best zoveel getalkennis en inzicht in operaties hebben dat ze handig kunnen rekenen, maar die deze vaardigheid in het onderwijs kennelijk niet ontwikkeld hebben. Het doet me denken aan de resultaten van het al eerder genoemde onderzoek naar het oplossen van puzzelachtige problemen door leerlingen van groep 6 die op een leerlingvolgsysteem hoge scores halen bij het onderdeel rekenen. Ook bij dit onderzoek kwam naar voren dat onze goede rekenaars niet op alle punten zo goed zijn als we denken dat ze zijn (Van den Heuvel-Panhuizen & Bodin-Baarends, 2004). We weten natuurlijk niet welke rol het onderwijs speelt bij het niet spontaan toepassen van handige rekenstrategieën, maar Ylja's en Joni's visie op de getallenlijn geeft daarover wel enige aanwijzingen.

Uit de reactie van Ylja en Joni wordt duidelijk hoe knellend de lege getallenlijn voor hen was. Dit is nogal opmerkelijk omdat de lege getallenlijn toch bedoeld is als een flexibel model dat leerlingen juist veel vrijheid geeft - en dit geldt zowel voor de manier van noteren als voor de sprongen die ze maken om opgaven op te lossen. Ylja en Joni hebben deze vrijheid echter niet ondervonden. In groep 4 moesten ze per se de getallenlijn gebruiken. Daar hadden ze een hartgrondige hekel aan. Het rekenen op de getallenlijn betekende dat er stap-voor-stap gerekend moest worden, verkortingen waren niet toegestaan. Frappant is ook dat Ylja en Joni helemaal niet beseften dat die verkortingen op de getallenlijn mogelijk waren. Ze weken uit naar het cijferend rekenen onder elkaar, want dat ging sneller. Dat het vinden van de oplossing nog sneller gaat door een grote sprong voorwaarts te maken en een klein stapje terug, kwam in eerste instantie niet bij hen op. Ook hier kan weer de vraag naar de invloed van het onderwijs worden gesteld.

Sinds de getallenlijn aan het eind van de jaren tachtig in het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs zijn intrede heeft gedaan, werd dit model zowel voorschrijvend als niet-voorschrijvend onderwezen (Menne, 2001). Treffers is - in navolging van Whitney (1985) - een voorstander van het laatste, hetgeen ook de aanpak is die door de meeste reken-wiskundedidactici wordt onderschreven. Van 'Pluspunt' is bekend dat de eerste versie van deze methode de voorkeur gaf aan de decimale splitsmethode in plaats van aan de aan de getallenlijn gelieerde rijgmethode (Menne, 2001). Dit is ook precies herkenbaar in de cijferende manier waarop Ylja en Joni de opgave 386 + 298 oplosten. Daar staat echter weer tegenover dat in de nieuwe versie van 'Pluspunt' de didactische positie van de lege getallenlijn is versterkt (ibid.). Voor Ylja en Joni heeft dit niet erg geholpen.

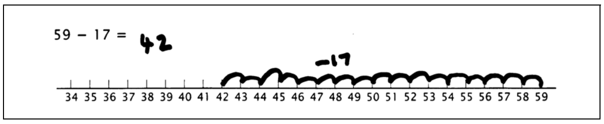
5 Een Australische ervaring

Dat niet alleen Nederland zijn didactikids heeft, maar ook Australië, leerde ik toen ik onlangs in Melbourne was voor de MERGA- en PME-conferentie. Janette Bobis vertelde me over het artikel dat ze had geschreven... samen met haar dochter Emily (Bobis & Bobis, 2005). Bovendien ging dit artikel ook nog over de lege getallenlijn. Evenals Ylja en Joni vertelde Emily over haar negatieve ervaringen met het werken op de lege getallenlijn. In Year 3, vergelijkbaar met onze groep 4, moest Emily werken op voorgestructureerde getallenlijnen waarop de nul en de tientallen waren aangegeven. Deze aanpak leidde ertoe dat Emily dacht dat haar leraar wilde dat ze bij de nul moest beginnen, het eerste getal dat op de lijn gemarkeerd was (fig. 6).



figuur 6: bij de nul beginnen

In Year 4 kwamen nog meer verwarrende situaties voor. Voorgestructureerde getallenlijnen in de methode met intervallen van 1 zorgden ervoor dat Emily terugviel op een telstrategie (fig. 7).



figuur 7: een voorgestructureerde getallenlijn die een telstrategie uitlokt

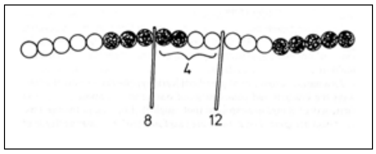
De conclusie van Bobis en Bobis (2005) was dat een rigide en fout begrepen didactisch model schadelijk kan zijn voor de ontwikkeling van de rekenvaardigheid van kinderen.

6 Tot besluit

Nogmaals de lege getallenlijn

De inzet van didactische modellen in het onderwijs luistert nauw. Een fout gebruik ervan kan een averechts gevolg hebben en in de ware zin van het woord ‘anti-didactisch’ zijn. Ook Freudenthal (1973) gebruikte met recht dit woord toen hij zo’n dertig jaar geleden de omkering aan de kaak stelde van een wiskundeonderwijs dat zich liet leiden door de wetenschappelijk structuur van de discipline en kinderen confronteerde met kant-en-klare wiskunde in plaats van hun de mogelijkheid te geven om zelf wiskundige begrippen en middelen te ontwikkelen. Maar anti-didactische inversies bedreigen niet alleen het reken-wiskundeonderwijs op macroniveau, ze doen dit ook op micro-niveau. Van dit laatste is bijvoorbeeld sprake als een reken-wiskundemethode eerst het decimaal splitsen ‘aanleert’ als basis voor het optellen en aftrekken, en vervolgens de kinderen laat werken op de getallenlijn. Een dergelijke volgorde druist in tegen de didactische structuur voor het rekenen tot honderd waarin de lege getallenlijn als didactisch model is ingebed.
Kenmerkend voor deze didactische structuur is dat er een onderscheid wordt gemaakt in drie basisstrategieën: de rijg-, splits- en variamethode (zoals beschreven in de TAL-leerlijnen; zie Treffers et al., 1999; Van den Heuvel-Panhuizen et al., 2001). Behalve dat deze strategieën samenhangen met de getallen waarmee gerekend moet worden, hebben ze ook een zekere sequencering in zich. Het rijgen ontstaat vanuit het tellen en gaat vooraf aan het splitsen en het toepassen van een handige compensatiestrategie. Wie de lege getallenlijn als didactisch model gebruikt los van de bijbehorende didactische structuur kan gemakkelijk didactisch in de fout gaan.

Didactische fouten en verwarring voor de kinderen liggen ook op de loer als leraren geen duidelijk onderscheid maken tussen een meetlijn (met continue grootheden) en een tellijn (met discrete grootheden). Het bijzondere van de door Treffers overgenomen ontdekking van Whitney (1985) die beide met elkaar verbond (fig. 8), lijkt aan hen te zijn voorbijgegaan.



figuur 8: Whithey's kralenketting met de tandenstokers (Whitney, 1985, pag.134)

Ten slotte kan door het los van de didactische structuur gebruiken van de lege getallenlijn nog gemakkelijk een ‘vermethodieking’ optreden: het rekenen met behulp van de lege getallenlijn is dan aan allerlei strikte voorschriften gebonden variërend van hoe de lijn getekend moet worden tot hoe de getallen, pijlen en boogjes moeten worden geplaatst. Het aanleren van deze ‘didactische ballast’ (Van den Heuvel-Panhuizen, 1986) is behalve erg tijdroverend vooral anti-didactisch, omdat het kinderen elke mogelijkheid ontneemt om te mathematiseren en ze hindert om zelf verkortingen toe te passen.

Nogmaals de didactische expertise van kinderen

Ofschoon andere onderzoekers al eerder tot de conclusie zijn gekomen dat bij ontwikkeling en onderzoek van onderwijs de expertise van kinderen serieus moet worden genomen, was dit leerlingconsultatieonderzoek in menig opzicht verrassend. Het interview met Ylja en Joni maakte duidelijk, dat we bij onderwijsonderzoek vaker en explicieter van de didactische kwaliteiten van kinderen gebruik moeten maken. Vooral kinderen die het onderwijs niet simpelweg ondergaan, maar oog hebben voor hoe een leraar iets uitlegt, de leerstof opbouwt, de klas organiseert, omgaat met verschillen, hulp biedt aan zwakke leerlingen en gebruik maakt van de methode, kunnen voor onderzoekers en ontwikkelaars van grote waarde zijn. Het extra perspectief dat kinderen bieden, kan ons inzicht vergroten in wat er in de klas gebeurt en ons helpen om het onderwijs te verbeteren. Wat Freudenthal (1984a, pag.106) ons voorhield ten aanzien van het observeren van de ontwikkeling van kinderen, geldt volgens mij evenzeer voor het consulteren van kinderen. Van de kennis die we hierbij opdoen kunnen we eveneens 'profiteren' bij de ontwikkeling van onderwijs. Bovendien - en ook hierin trek ik de parallel met het observeren.

> Het is niet iets dat we voor de ontwikkelaar en onderzoeker willen reserveren. We propageren dit [consulteren van kinderen, *toevoeging MvdHP*] bij anderen, bij onderwijsgevenden, bij opleiders en bij hen die opgeleid worden en we bieden hun materiaal aan, dat deze mentaliteit moet bevorderen.

Ik hoop dat ik dit met dit artikel heb gedaan.

Literatuur

Brink, J. van den (1980). Onderwijzende kinderen. In: IOWO. *Kijk op Hans*. Utrecht, 6-8.

Brink, J. van den (1987). Children as arithmetic book authors. *For the Learning of mathematics, 7*, 44-48.

Bobis, J. & E. Bobis (2005). The empty numberline: Making children's thinking visible. In: M. Coupland, J. Anderson & T. Spencer (eds.). *Making mathematics vital: Proceedings of the 20th biennial conference of the Australian Association of Mathematics Teachers*. Sydney: AAMT, 66-72.

Dahlberg, G., P. Moss & A. Pence (1999). *Beyond quality in early childhood education and care: postmodern perspectives*. London: Falmer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1979). *Learning processes*. Lecture at Presession of the NCTM meeting in Boston, 18 April (niet gepubliceerd).

Freudenthal, H. (1984a). *Appels en peren / wiskunde en psychologie*. Apeldoorn: Van Walraven.

Freudenthal, H.F. (1984b). Onderzoek van onderwijs - voorbeelden en voorwaarden. In: P.G. Vos, K. Koster & J. Kingma (red.). *Rekenen. Balans van standpunten in theorievorming en empirisch onderzoek*. Lisse: Swets & Zeitlinger.

Freudenthal, H. (1988). Ontwikkelingsonderzoek. In: K. Gravemeijer & K. Koster (red.). *Onderzoek, ontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek*. Utrecht: Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs & Onderwijs Computercentrum, Rijksuniversiteit Utrecht.

Hagborg, W.J. (1994). Student and teacher perceptions of classroom instructional methods and evaluation procedures. *Evaluation and Program Planning, 17*(3), 257-260.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1986). Het rekenonderwijs op de lom-school opnieuw ter discussie. *Tijdschrift voor orthopedagogiek, 25*(3), 137-145.

Heuvel-Panhuizen, M. van den, J.A. Middleton & L. Streefland (1995). Student-generated problems: easy and difficult problems on percentage. *For the learning of mathematics, 15*(3), 21-27.

Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buys & A. Treffers (red.) (2001). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen annex leerlijnen. Hele getallen bovenbouw basisschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Heuvel-Panhuizen, M. van den & C. Bodin-Baarends (2004). Alles of niets. Probleem oplossen door goede rekenaars. *Volgens Bartjens..., 24*(2), 12-14.

Menne, J.J.M. (2001). *Met sprongen vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100 - een onderwijsexperiment*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Kraemer, J-M., J. Janssen, F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *Balans [31] van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 4*. Arnhem: Cito.

Shimizu, Y. (2002). *Discrepancies in perceptions of lesson sturucture between the teacher and the students in the mathematics classroom*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, April 1-5.

Spratt, M. (1999). How good are we at knowing what learners like? *System, 27*, 141-155.

Treffers, A., M. van den Heuvel-Panhuizen & K. Buys (red.) (1999). *Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen annex leerlijnen. Hele getallen onderbouw basisschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Whitney, H. (1985). Taking responsibility in school mathematics education. In: L. Streefland (ed.). *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II. Utrecht: OW&OC, Utrecht University, 123-141.

Wing, L.A. (1995). Play is Not the Work of fhe Child: Young Children's Perceptions of Work and Play. *Early Childhood Research Quarterly, 10*, 223-247.

In the Netherlands, children's contributions to the development of mathematics education are highly valued. Through his observations of his grandchildren Freudenthal has laid the foundation for this appreciation. His goal was to build up knowledge about children's cognitive development and generate indications for education through spontaneous observations of children. Creating didactical knowledge is also the aim of the study that is the topic of this article. However, the intended indications on how to teach mathematics are acquired in a different way now. Instead of observing children, they are questioned directly about their didactical expertise. The two children involved in this study are asked how they think about particular teaching issues and which approach they would choose when teaching children. Much can be learned from these student consultants. In the article, the children explain their ideas about the empty number line. They are not very satisfied with it as a didactical model. For them the number line was clearly a restraining factor. After further questioning it turned out that the way in which the number line was taught to these children might have caused their negative ideas about the usefulness of the number line. Later, these 'didactikids' revised their opinion. The children's proposal at the end of the interview should belong to the didactical baggage of each (future) teacher.

Over memoriseren[1]

- ontwikkelingen in het onderwijs in vermenigvuldigen -

Hans ter Heege
SLO, Enschede / Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Dit artikel gaat over het memoriseren van elementaire vermenigvuldigfeiten, ook wel 'de tafels' genoemd. Aan de opzet van een didactische aanpak die tot vernieuwing van de aloude tafeldidactiek leidde, hebben velen bijgedragen. Onder hen ook Hans Freudenthal.
Ik zal in dit artikel een poging doen de ontwikkeling in het denken over memoriseerprocessen in beeld te brengen en daarbij Freudenthals invloeden te achterhalen. Het verrassende punt is dat hij aanvankelijk weinig aandacht schonk aan memoriseerprocessen in het reken-wiskundeonderwijs. Wellicht vond hij de betekenis van feitenkennis in het rekenen van ondergeschikt belang. Maar allengs zag hij in hoe cruciaal deze processen zijn voor (de start van) een effectieve mathematische kennisontwikkeling.

1 ICME 1972

Ik begin dit artikel over de betekenis van het memoriseren in het (aanvankelijke) reken-wiskundeonderwijs met twee gebeurtenissen die zich in het begin van de jaren zeventig van de vorige eeuw afspeelden.

In de jaren zestig was op initiatief van Freudenthal de ICME[2] opgericht, die in 1969 haar eerste internationale conferentie voor wiskundeonderwijs in Lyon organiseerde. Op de tweede ICME-conferentie te Exeter in 1972, speelde de lezing van een prominente deelnemer een belangrijke rol, namelijk die van de al op leeftijd zijnde G. Polya. De titel luidde 'As I read them'.[3] Freudenthal was bereid gevonden zitting te nemen in de programmacommissie van deze conferentie en oefende daarmee zijn invloed uit op de invitatie van deze spreker. Polya's boek 'How to solve it'[4] was kort voor de conferentie verschenen. Het bevatte een, volgens velen, centraal thema van het wiskundeonderwijs: hoe je problemen kunt (leren) oplossen. Hij beschreef er regels in die ten grondslag zouden liggen aan de 'ontdekking en uitvinding' van heuristieken in het wiskundig denken, veelal aan de hand van voorbeelden uit de meetkunde.
Dit was een onderwerp dat Freudenthal sterk aansprak. Enkele stellingen die Polya in het verslag van de conferentie liet opnemen zijn geheel in lijn met Freudenthals denken over het leren van wiskunde, zoals:

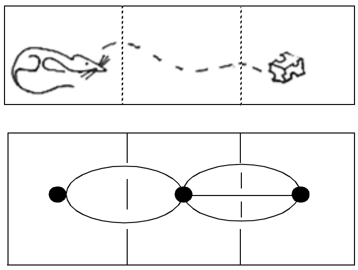
> The ideas should be born in the student's mind and the teacher should act only as midwife (naar Socrates).

> Intuition is the conception of an attentive mind, so clear, so distinct, and so effortless that we cannot doubt what we have so conceived (naar Descartes).

> Nothing is more important than to see the sources of invention which are, in my opinion, more interesting than the inventions themselves (naar Leibnitz).

> What is good teaching? Giving opportunity to the student to discover things by himself (naar Herbert Spencer).

Rond diezelfde tijd kwam Freudenthal op een gegeven moment in een bijeenkomst van de Wiskobasgroep,[5] waar gewoonlijk nieuwe ideeën besproken werden, met een verrassend en interessant voorbeeld. Hij toonde de groep een tekening.



figuur 1: de muis en de kaas

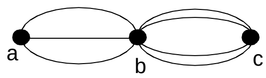
De vraag die erbij werd gesteld luidde: op hoeveel manieren kan de muis naar de kaas toe? Of, wellicht op meer kinderlijk niveau: hoeveel weggetjes zijn er voor de muis naar de kaas? Het is geen makkelijk probleempje voor leerlingen van groep 3 of 4. Het zal niemand verbazen dat zij hierop vaak met '5' antwoorden, zelfs als hen wordt gevraagd de mogelijke weggetjes op het werkblad te tekenen.
Hoe komt dat? Wel, ze tellen gewoon het aantal poortjes en gebruiken hun kennis van het tellen of van 'groepjes bij elkaar nemen' om het antwoord te geven (Van den Brink e.a., 1973).

Veel meer dan dit hebben ze op zo'n moment immers nog niet in huis. Additieve wiskundige structuren zijn dan nog zo dominant in hun wiskundige kennisbezit, dat veel leerlingen bij het zien van vijf poortjes denken dat er voor de muis slechts vijf weggetjes mogelijk zijn om de kaas te bereiken.

Het was daarentegen Freudenthals bedoeling leerlingen van deze leeftijd door middel van dit probleem in de gelegenheid te stellen de bewerking 'vermenigvuldigen' te ontdekken. Want de vermenigvuldiging 2×3 is de geëigende oplossing voor het probleem. Zo wordt leerlingen de gelegenheid geboden om een volgende stap in hun wiskundige ontwikkeling te nemen. Het gaat dus niet alleen om de oplossing van het probleem van 'de muis en de kaas', maar om de ontdekking van de multiplicatieve structuur, die in dit voorbeeld op een ietwat verdekte manier aanwezig is.
De relatie met Polya's ideeën over wiskunde als activiteit waarmee men problemen zou kunnen oplossen, ligt voor de hand. Hoewel Freudenthal in die tijd bijzondere interesse had in het wiskundig denken dat zich richtte op het oplossen van problemen, voegde hij er nu een belangrijk element aan toe: leerlingen kunnen met het muis-en-kaasprobleem een belangrijke stap maken in hun wiskundige ontwikkeling. Zij worden zo in staat gesteld de multiplicatieve structuur van problemen te ontdekken. Het probleem van 'de muis en de kaas' staat als het ware model voor een pril begrip van de bewerking vermenigvuldigen.

2 Didactisch onderzoek naar vermenigvuldigen

Het geschetste probleem vormt een aanleiding om multiplicatieve structuren in de wiskunde nader te doordenken. Medewerkers van Wiskobas gaan met dit gegeven aan de slag. Van den Brink, met speciale aandacht voor de groepen 3 en 4, interviewt leerlingen van de basisschool om meer grip te krijgen op de vraag hoe kinderen zich de bewerking vermenigvuldigen, met inzicht eigen maken. Zijn collega Van Bruggen en ikzelf bezinnen ons op een meer effectieve aanpak van het cijferend vermenigvuldigen en delen dan tot op dat moment in het onderwijs gebruikelijk was. Daarbij is het kunnen vermenigvuldigen uiteraard een onmisbare voorwaarde.
In een zogenoemde leerplanpublicatie, een speciale uitgave van het Wiskobas-Bulletin (Treffers (ed.), 1979), zoals die door Wiskobas met enige regelmaat werd uitgebracht, legt de Wiskobasgroep haar vernieuwende ideeën over het vermenigvuldigen aan het onderwijs voor.
In publicatie nummer 10 uit 1979, is een hoofdstuk opgenomen, dat werd geschreven door Treffers, onder de titel 'wijder verband', waarin wordt ingegaan op de achtergrond van de bewerking vermenigvuldigen.
In de paragraaf 'modellen en schema's' wordt een opsomming gegeven van een twaalftal modellen voor vermenigvuldigen die in didactisch opzicht van belang zijn, alles aan de hand van de voorbeeld-vermenigvuldiging 3×4. In hun totaliteit weerspiegelen de twaalf modellen de vermenigvuldigstructuren die in diverse situaties voorkomen. Een van de twaalf modellen is isomorf met dat van het muis- en kaasprobleem en wordt hier het 'wegenmodel' genoemd (fig.2).



figuur 2: het wegenmodel uit leerplandeel 6 van Wiskobas

Zo wordt voortgeborduurd op het initiatief dat Freudenthal nam met de introductie van het muis- en kaasprobleem, en tevens op diens aanpak om wiskundige fenomenen in een didactische context te beschrijven, volgens een didactische fenomenologie.

Over de rol van modellen schrijft Treffers dat deze een belangrijke functie kunnen vervullen bij het oplossen van toepassingsproblemen. 'Zo staan modellen van het reken-wiskundeonderwijs tussen de concrete werkelijkheid enerzijds en het abstracte rekenen anderzijds', voegt Goffree daar later in zijn boek voor de opleidingen aan toe (Goffree, 1974). De nadruk in de ontwikkeling van het vermenigvuldigen als basisvaardigheid, zoals door Wiskobas werd aangegeven, lag tot het midden van de jaren zeventig op twee zaken:

1. Leerlingen tot het inzicht brengen welke problemen je met behulp van de bewerking vermenigvuldigen effectief zou kunnen oplossen.
2. Nagaan hoe leerlingen in de middenbouw het cijferend vermenigvuldigen konden leren.

In het eerste punt paste de aandacht voor modellen en schema's, alsmede de wens om het vermenigvuldigen met inzicht te leren, onder meer in onderscheid met het optellen. Ofwel, het vermenigvuldigen leren begrijpen als de geëigende bewerking bij problemen met een multiplicatieve structuur. Parallel hieraan werd een waaier aan zogenoemde telproblemen bedacht en uitgewerkt die effectief door een vermenigvuldiging konden worden opgelost. Een voorbeeld daarvan is het volgende probleempje:

> Een gezelschap van zeven mensen ontmoet elkaar na jaren weer. Iedereen geeft de ander een hand. Hoeveel handdrukken worden er op de reünie gegeven?

Het antwoord 21 kan via de vermenigvuldiging $7 \times 6 = 42$ worden gevonden. Dit tussenresultaat moet door 2 worden gedeeld omdat als persoon *A* persoon *B* een hand geeft, *B* vanzelfsprekend ook *A* een hand geeft. In het tweede moeten toepassingen van feitenkennis van het vermenigvuldigen onmisbaar worden geacht. De nadruk lag, wat het vermenigvuldigen als elementaire rekenvaardigheid betreft, aanvankelijk dus op het oplossen van problemen, ofwel op het toepassen van eerder verworven kennis van vermenigvuldigingen.

3 Realiteit van het rekenonderwijs in de jaren na WO-II

Als we ons realiseren hoe het rekenonderwijs er anno 1970 in Nederland uitzag, wordt het duidelijk hoe ingrijpend de vernieuwing was die Wiskobas, met Freudenthal als teamlid met een speciale rol, in dit opzicht voorstelde. De dominante rekenmethode uit die tijd was 'Naar Zelfstandig Rekenen',[6] een methode waarin de introductie van het vermenigvuldigbegrip ronduit 'arm' kon worden genoemd. Dit begrip wordt in de methode via rijen tafels aangeboden, modellen voor vermenigvuldigen komen niet voor. Freudenthal wilde dat kinderen met inzicht leerden vermenigvuldigen. 'Naar Zelfstandig Rekenen' kwam niet veel verder dan kinderen voor te bereiden op het maken van sommen. Het lag dus voor de hand dat Freudenthal huiverig stond ten opzichte van de traditionele aanpak zoals die in de methode 'Naar Zelfstandig Rekenen' werd gepraktiseerd.
Er was in die tijd, in het begin van de jaren zeventig, aandacht voor vernieuwing van het rekenonderwijs, maar men meende die te moeten vinden in een andere organisatievorm van dit onderwijs. Leerlingen werden in zogenoemde niveaugroepen ingedeeld en werkten grotendeels zelfstandig aan taken uit de methode. De methode die dit organisatorische model in de meest uitgesproken zin hanteerde, was 'Niveaucursus Rekenen'. Kenmerkend voor de didactiek was de eenzijdige nadruk op het oefenen van rekenfeiten en -procedures, wat mede een gevolg was van het werken in niveaugroepen, die in methoden als 'Naar Zelfstandig Rekenen' en 'Niveaucursus Rekenen' werd nagestreefd. Het idee was dat kinderen de beoogde rekenkennis zouden verwerven door veel schriftelijk te oefenen.
Zowel de organisatievorm waarin het rekenen volgens de vernieuwers van het midden van de jaren zestig plaats zou moeten vinden, als de nadruk op het veelal schriftelijke oefenen, ondervonden veel kritiek in het onderwijsveld. Wiskobas sloot zich daarbij van harte aan en onderbouwde haar mening met veel voorbeelden uit de onderwijspraktijk, die openingen vormden voor een andere aanpak.

Het automatiseren van rekenprocedures en het memoriseren van feitenkennis in het reken-wiskundeonderwijs is niettemin van groot belang voor de voortgang in het rekenen. Leraren in het basisonderwijs waren zich daar terdege van bewust.
In de jaren zestig en zeventig meenden veel leraren echter, daarin gesteund door traditionele, later 'mechanistisch' genoemde methoden uit die tijd, dat het leren rekenen grotendeels op memoriseren van feiten en automatiseren van procedures neerkwam. Inzicht in de wiskunde werd destijds vooral geïnterpreteerd als inzicht in van tevoren door deskundigen bepaalde procedures en werd nauwelijks een element geacht in het kindeigen proces van verwerving van de wiskunde.
Dit was Freudenthal een doorn in het oog. Hij was sterk gekant tegen overmatig oefenen om te memoriseren en tegen het vroegtijdig verwoorden van abstracte rekenregels. Ook Wiskobas zou daar aandacht aan besteden en er vernieuwende voorstellen voor doen. De omslag die in dit opzicht door Wiskobas en Freudenthal werd bepleit, werd in een *one-liner* geformuleerd: 'Wiskunde is een menselijke activiteit, dus ook een activiteit van kinderen (zelf)'.

4 Appels en peren

Freudenthal had in vele geschriften stelling genomen tegen de vernieuwing die het structuralisme in het rekenonderwijs van na de Tweede Wereldoorlog wilde doorvoeren. In een bundel met enkele opstellen die hij in de loop van de jaren had geschreven komt zijn stellingname duidelijk naar voren (Freudenthal, 1984a).

> Dankzij IOWO en Wiskobas is Nederland de vloedgolf van averechtse vernieuwing bespaard gebleven die in de jaren zestig en zeventig de onderwijswereld overspoelde,

schrijft Freudenthal in het hoofdstuk 'Wiskundig-didactische principes - vanuit rekenonderwijs gezien'. Een van die principes gaat in op de vanouds bekende tafeldidactiek. Hij schrijft daarover:

> Volgens de aloude rekendidactiek worden de tafels gememoriseerd door ze rij na rij op te zeggen. Kinderen wordt wijsgemaakt dat ze om 7×8 te beantwoorden de tafel van 8 binnensmonds moeten opzeggen om bij 7×8 te stoppen, hetgeen dan hoorbaar wordt geuit.
> Maar onderzoekers hebben vastgesteld dat kinderen die men hun gang laat gaan, hun eigen flexibeler methoden ontwikkelen: commutativiteit, verdubbelen, halveren, met 10 vermenigvuldigen, op- en afstappen van bekende produkten, en dit al met elkaar gecombineerd, bijvoorbeeld om 7×8 te berekenen; $2 \times 8 = 16$, $2 \times 16 = 32$, $2 \times 32 = 64$, $64 - 8 = 56$.
>
> De slimmen doen het slim. Neen, niet de slimmen, maar de moedigen die grote stappen aandurven. Het is de taak van de onderwijzer dit te bemoedigen.

Dit voorbeeld haalt hij aan om een van zijn wiskundig-didactische principes te verduidelijken. Die luidt in dit geval:

> Vooruitwijzend leren verdient de voorkeur boven het keurslijf van systematisme.

Hij zegt verder:

> Ik heb dit voorbeeld aangehaald omdat het verdubbelen en halveren zich vroegtijdig aanbiedt als vooruitwijzend leren van vermenigvuldigen en delen. Maar we zagen al dat ook het memoriseren van de tafels vooruitwijzend leren is, want pas bij het cijferen komt de kennis van de tafels echt te pas. Pas door de behoefte bij het cijferen wordt het van buiten kennen goed gemotiveerd en het van buiten leren echt bevorderd. Daarmee zou men rekening kunnen houden door het stimuleren van vooruitwijzend cijferen waar nu het mondeling rekenen overheerst.

De rekenkennis die een leerling op een gegeven moment verwerft, staat dus niet op zichzelf. Zo is het ook met de kennis van het vermenigvuldigen. Met die kennis kun je nieuwe kennisvelden aanboren. Ze werpt als het ware haar schaduw vooruit. Maar hoe je de elementaire vermenigvuldigfeiten kunt memoriseren, wordt uit Freudenthals beschouwing nog niet duidelijk.

5 Ervaringen met kinderen over tafels leren

Aan het eind van de jaren zeventig deed ik, als teamlid van Wiskobas, in een kleine basisschool te Est bij Geldermalsen ervaring op met de manier waarop kinderen zelf, zonder dwang van een door de traditionele didactiek voorgeschreven aanpak, de tafels van vermenigvuldiging probeerden te verwerven.[7] De school hanteerde de methode 'Naar Zelfstandig Rekenen', met haar begindeeltjes 'Jongleren met Getallen', waarin de vanouds bekende tafeldidactiek werd gevolgd. Deze didactiek kan worden gekarakteriseerd met de volgende punten: (1) de bewerking vermenigvuldigen wordt nauwelijks inzichtelijk aangeboden; modellen, bedoeld om het denken te ondersteunen, komen in deze aanpak niet voor; (2) er wordt weinig tot geen gelegenheid geboden tot het leren uitrekenen van basisvermenigvuldigingen; (3) wat het memoriseren van vermenigvuldigfeiten betreft ligt de nadruk op het eenzijdig en blind uit het hoofd leren van de tafels. De school hanteerde deze didactiek uiteraard ook, hier en daar aangevuld met enige stimulerende maatregelen, zoals een tafelrapport per kind; er was immers niets anders waarop men zich kon baseren.
In de school in Est sprak ik met een groot aantal leerlingen, uit alle groepen vanaf groep 4, diepgaand over hun tafelkennis. Daaruit bleek al snel dat sommigen van hen grote problemen hadden met deze leerstof. Er waren leerlingen van de hoogste leerjaren die de tafels nog steeds niet op een adequate wijze, zoals die door de traditionele didactiek werd beoogd, kenden. Anders gezegd, deze leerlingen bezaten als feitenkennis slechts flarden van het totale tafeldomein. Daarnaast kon men ook leerlingen van groep 5 aantreffen die erin geslaagd waren zich de tafels op de gevraagde manier eigen te maken, door opzeggen en veelvuldig oefenen. Het gaat te ver om te zeggen dat de kennis van de tafels die leerlingen toonden geheel onafhankelijk was van het leerjaar waarin ze zich bevonden, maar een eenduidige relatie was er ook niet. Dit is een belangrijk punt, want in wezen wordt hier gewezen op een deficit in de traditionele tafeldidactiek.
De vraag was daarom: zou het ook anders kunnen? Ook het antwoord op die vraag gaven de leerlingen van deze school in Est. Vroeg ik ze bijvoorbeeld naar het antwoord op 9×6, dan gaven veel leerlingen daar een correct en sommigen een incorrect antwoord op, maar dat was niet mijn hoofddoel in de interviews. Het hoofddoel was te achterhalen hoe ze tot de oplossing kwamen. Natuurlijk probeerden veel leerlingen mij te antwoorden door, in het geval van 9×6, de tafel van zes op te zeggen. Door de vraag die ik hen stelde, 'vlogen ze direct in de netten' van het geijkte patroon van de traditionele didactiek. Om het anders te doen, vereist natuurlijk vertrouwen in mij als hun gesprekspartner. Als ze eigenlijk anders dachten dan ze in hun antwoorden toonden, zou ik de situatie wel eens misprijzend kunnen beoordelen. Dat merken leerlingen direct, onder meer omdat ze gewend zijn te reageren zoals hun leraar wil. Een standje of het misprijzen van de leraar probeert iedere leerling natuurlijk te voorkomen.

Het interessantste waren daarom de antwoorden van de leerlingen die de vrijheid namen om mij te vertellen wat ze werkelijk dachten. Slechts een deel van de leerlingen bleek hiertoe in staat. Met hen ging ik in eerste instantie verder. Toen bleek dat sommigen een geheel eigen, in de zin van niet-onderwezen, dus 'informele' oplossing hadden bedacht. Zoals voor 9×6: eerst $10 \times 6 = 60$, dan 6 eraf, met het antwoord 54. Deze aanpak van de kinderen uit Est werd in de jaren tachtig in enkele publicaties beschreven en bijvoorbeeld ook verwoord in de afscheidsbundel van het IOWO, 'De achterkant van de Möbiusband', uit 1980.[8] Het was verrassend om te zien dat er een waaier aan oplossingen voor de dag kwam, die echter geïnterpreteerd moest worden als 'niet van buiten gekend'. 'Maar', vroeg ik me af, 'waren ze slechts berekend of toch van buiten gekend?' Ik ontdekte dat leerlingen voorkeuren hadden voor bepaalde oplossingen, bijvoorbeeld om $9 \times A$ te berekenen via $10 \times A$, maar dat zij de oplossing die hun voorkeur had uiterst snel konden reproduceren. Zo snel dat het verschil tussen 'even uitrekenen' en 'van buiten kennen' voor de meesten van ons niet eens te merken zou zijn geweest. Tafels van buiten kennen en tafelproducten uiterst snel kunnen berekenen kan men als twee 'toestanden' van vermenigvuldigkennis onderscheiden, maar ik gaf er weldra de voorkeur aan ze als vrijwel identiek te zien.
Er ging, dankzij de leerlingen in Est, een nieuwe wereld voor me open: we dachten dat de aloude didactiek van de tafels 'rigide' was en wellicht ook moest zijn. We ontdekten echter dat leerlingen zelf veel flexibeler waren en gebruikmaakten van de relaties in het rekenen die ze min

of meer zelf tussen allerlei vermenigvuldigingen hadden ontdekt, zoals het verdubbelen en halveren. Zo werden nieuwe vermenigvuldigingen verkregen. De een bleek daar overigens vaardiger in te zijn dan de ander.

Met deze gegevens die de leerlingen mij hadden aangereikt op zak, interviewde ik daarna ook leerlingen die geen eigen, informele oplossingen voor vermenigvuldigingen hadden. Zij vertelden mij vaak standaardoplossingen. Dit wil zeggen dat zij geneigd waren de tafels simpelweg op te zeggen. Het gros van deze leerlingen was niet in staat om de flexibele oplossingen van hun leeftijdgenoten over te nemen, maar een deel van hen begreep heel goed welke voordelen het gebruik van een flexibele oplossing had. Dat nog relatief veel leerlingen de weg volgden die hen door de traditionele didactiek was aangereikt, is te begrijpen en te billijken. Het is nu eenmaal moeilijk afstand te nemen van een oplossing die je geleerd hebt, die je inmiddels vertrouwd geworden is en waarmee je hebt aangetoond succesvol te kunnen rekenen.

Theoretisch bezien was het onderzoek dat ik in Est deed interessant, omdat de flexibele aanpak van de tafels laat zien dat leerlingen de kennis die ze hebben verworven kunnen inzetten ten behoeve van nieuwe kennis (Ter Heege, 1985). Wil je bijvoorbeeld de verdubbeling kunnen inzetten bij 4×6, dan moet je weten dat 2×6 (ofwel $6 + 6) = 12$ en je moet deze kennis kunnen inzetten bij de verdubbeling $12 + 12 = 24$. Maar het gaat ook verder: 14×9 kan immers met inzicht worden berekend door 14 van 10×14 af te trekken: $140 – 14 = 126$. Dit met strategieën uit het hoofd uit te rekenen, lag in de oude didactiek niet voor de hand, maar kwam met de flexibele aanpak opeens binnen handbereik.
Zo werpt deze haar schaduw vooruit. Als leraren een flexibele rekenwijze stimuleren, gaan kinderen die ook toepassen op aanpalende terreinen. Terreinen die strikt genomen verdergaan dan de tafels alleen. Verder was het voor mij en de Wiskobasgroep van belang ons te realiseren dat de traditionele standaarddidactiek voor de tafels voor een deel van de leerlingen geen soelaas bood. De zwakke leerlingen leken meer profijt te hebben bij de nieuwe aanpak die zich richtte op inzichtelijke oplossingen van de tafels, omdat er daarbij beter werd aangesloten bij wat ze al eerder aan rekenkennis hadden verworven. En dan - ten slotte de kern van dit betoog - werd er een nieuwe 'definitie' gegeven voor het memoriseren van tafels van vermenigvuldiging. 'Blind memoriseren' van de tafels bleek voor een deel van de leerlingen niet effectief, misschien zelfs anti-productief. Memoriseren van tafels vloeit voort uit het met inzicht gebruiken van eerder opgedane rekenkennis.[9]
Deze conclusie strookt helaas niet met wat het merendeel van de leraren basisschool toen en ook nu nog van mening is: tafels leren moet je doen door stampen. De spanning die er zo ontstaat tussen wat leraren menen en wat er na diepgaand didactisch onderzoek als meest wenselijke aanpak voor het leren van tafels van vermenigvuldiging naar voren komt, blijkt in het onderwijs decennia later nog steeds voelbaar.

6 HF's artikel 'Memoriseren' in 'Willem Bartjens'

Hoewel Freudenthal het leren van wiskunde in het begin van de jaren zeventig, de beginperiode van Wiskobas, vooral koppelde aan het leren oplossen van problemen, betekende dit niet dat hij geen oog had voor de rol die het geheugen en het onthouden speelde in het leren rekenen. Er waren in die begintijd veel tegenstanders van de vernieuwing die door Wiskobas, en dus door Freudenthal, werd bepleit. Die meenden dat het memoriseren en automatiseren in het vernieuwde reken-wiskundeonderwijs een (te) ondergeschikte plaats zou krijgen. Uit het hoofd leren zou in het reken-wiskundeonderwijs in ieder geval veel minder dominant zijn dan zij voor wenselijk hielden. Zij leidden dit af aan het vigerende rekenonderwijs van die tijd, waarin de memoriseer- en automatiseerprocessen juist veel nadruk kregen.

Het lag bij Wiskobas in werkelijkheid echter heel anders dan zij vermoedden. Wiskobas keerde zich niet tegen het memoriseren en automatiseren op zich, maar wel tegen het betekenisloze memoriseren, dat in het oude rekenonderwijs veelal gekoppeld was aan het excessieve oefenen van blinde reken-wiskundige feiten en procedures. Dit oefenen zou aan banden moeten worden gelegd, ten faveure van het leren-met-inzicht. Oefenen was dus ook een gewenst aspect van het nieuwe reken-wiskundeonderwijs. Het zou in het kader van 'leren met inzicht' moeten worden gezien, meende het Wiskobasteam.

Deze opvatting verwoordde Freudenthal (1984b) in een artikel met de veelzeggende titel 'Memoriseren'. Na de lezer enige voorbeelden te hebben gegeven van wat hij zelf uit het hoofd weet - en daarin vergelijkingen trekt met het leren van taal - zegt Freudenthal dat er twee manieren van uit het hoofd leren bestaan: het bewust memoriseren (dat hij 'akoestisch memoriseren' noemt) en het met steuntjes onthouden. De eerste vorm van memoriseren is kenmerkend voor het leren van basisvaardigheden in het traditionele rekenonderwijs. Het laatste, bijvoorbeeld tafels leren met behulp van 'kapstokken' als steun bij het onthouden, heeft in de huidige, moderne aanpak de nadruk gekregen. Hierin is eigenlijk sprake van snel, uiterst snel rekenen. Freudenthal schrijft daar in zijn artikel over: 'De grens tussen parate en snel geproduceerde kennis is niet scherp.' Beide manieren, het akoestische en het met steuntjes memoriseren, hebben een functie voor de kennis die ermee wordt beoogd.
En, zegt hij:

> ... laten we het erover eens zijn dat ondanks rekendoosjes en computers gememoriseerde kennis in rekenen en wiskunde nog steeds onmisbaar is.

Het artikel gaat vervolgens vooral over de vraag hoe je parate kennis het beste kunt verwerven. Kan dat misschien ook met behulp van oefeningen op de computer? Het antwoord dat Freudenthal geeft luidt bevestigend. Hij betoogt dat het mogelijk moet zijn 'familiesommen' met de computer te oefenen. 8 + 7 = , 15 – 7 of 15 – 8 = en, voor vermenigvuldigen, 7 × 3 = en 21 : 3 = of 21 : 7 = vormen zo'n 'familie'. Freudenthal sluit het artikel af met de volgende woorden:

> Let wel: de computer gaat alleen de juistheid van de tussenuitkomsten na, niet de gemotiveerdheid van de procedure. Zoiets te programmeren, evenals foutenanalyse, lijkt me te hoog gegrepen.

Op dit punt had hij het echter mis. Klep, werkzaam bij de SLO,[10] werd mede door Freudenthals woorden geïnspireerd om het tegendeel te bewijzen, wat hem enkele jaren later inderdaad op voorbeeldige wijze lukte. Met zijn computerprogramma, dat hij samen met Gilissen ontwikkelde, konden leerlingen tafels oefenen, tafels 'in hun context'. Centraal in dit programma staat het idee van een leeromgeving waarin de leerling zelf zijn strategie kan kiezen, geholpen door de computer die aangeeft welke 'buursommen' de leerling kent.
Dit computerprogramma[11] dat de titel 'Een wereld rond tafels' had gekregen, bood dus oplossingen op punten die Freudenthal kort daarvoor nog als 'te hoog gegrepen' had beoordeeld. In de aanloop naar het pakket 'De wereld rond tafels' had Klep de gedachte van 'familiesommen' al uitgewerkt en daarvoor hadden hij en Gilissen in hun artikelen met de titel 'Voorwerk voor een computerprogramma' laten zien waar zij bij de ontwikkeling van een computerprogramma aan dachten: een programma, zoals door Freudenthal was bedoeld. Klep schrijft hier in 1984 over:

> Computers kunnen wél individuele gegevens onthouden en in beslissingsprocedures betrekken. In het deelproject 'Basisvaardigheden leren en computers' zoeken we naar een manier om een computer redelijke beslissingen te laten nemen over het feit of een leerling al dan niet iets kent.

Eigenlijk dus iets dat op een voortgangsanalyse lijkt, en misschien wel is. Enige jaren later blijkt uit het promotieonderzoek van Klep dat de computer ook in staat is zowel het met inzicht oefenen van tafelproducten te organiseren, als van het oefenwerk van iedere leerling een analyse te maken. Die analyse werd ingezet om de volgende stappen in het proces te bepalen die de leerling in het computerprogramma zou zetten.

Het centrale punt in het denken van Klep, in zijn pogingen om een geschikt oefenprogramma voor vermenigvuldigen met de computer te ontwikkelen, is dat het leren vermenigvuldigen met strategietjes verweven is met het memoriseren van tafels, dat het leren uitrekenen en het memoriseren beide voortvloeien uit contexten (zoals 'de muis en de kaas') en dat modellen voor vermenigvuldigen (zoals die eerder door Treffers werden beschreven) daarin een belangrijke functie hebben. De rol van modellen was in het ontwikkelde computerprogramma groot, wat in lijn was met de opvattingen van Freudenthal. In bovengenoemd artikel schrijft Klep:

> De bevrediging flexibel te kunnen rekenen is een intrinsiek motief om verder te memoriseren. De didactiek van het uitgaan van de strategietjes van de leerlingen kan aangevuld worden met interesse voor geheugenkennis, zodat de leerlingen zich ook bewust wensen bezig te houden met het memoriseren.
>
> ... het leren toepassen van de verworven geheugenkennis is dus niet iets dat pas na het tafels leren komt, maar iets dat natuurlijk verweven is met de inzicht-verwerving en het oefenen.

7 De huidige situatie

In de huidige, moderne reken-wiskundemethoden is de ontwikkeling van de tafeldidactiek die in dit artikel werd geschetst, duidelijk terug te vinden. Er zijn verschillen tussen de diverse methoden, maar alle baseren zich in enige vorm op de 'strategie- en steunpuntenmethode', waarin ruime aandacht wordt geschonken aan (1) de introductie van het vermenigvuldigbegrip (en verder: het multiplicatieve denken), (2) modellen ter ondersteuning en houvast, (3) het leren uitrekenen van vermenigvuldigingen met behulp van rekenstrategieën en de flexibiliteit in het oplossen van vermenigvuldigingen, dat veelal maar niet altijd, in interactieve onderwijssettingen gestimuleerd wordt. Bovendien wordt (4) in de strategie- en steunpuntmethode toegewerkt naar uitbreiding van het aantal steunpunten in de vorm van rekenfeiten, alles met het oog op de toepasbaarheid van de tafelkennis ('het vooruitwijzend leren').

Belangrijke bakens in deze ontwikkeling zijn de volgende twee publicaties geweest. In de eerste plaats de 'Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool', met name het tweede deel over basisvaardigheden en cijferen (Treffers & De Moor, 1990). In deze publicatie wordt de vernieuwde tafeldidactiek (daar de reconstructiedidactiek genoemd) afgezet tegen de aloude reproductiemethodiek. Over de reconstructiedidactiek schrijven de auteurs:

> Deze stuurt niet uitsluitend en direct op reproductie van kennis aan, maar probeert dit doel mede via een proces van reconstructie, van kennisopbouw via vaardig rekenen, te realiseren. Kennis van de tafels is hier het resultaat van een proces van steeds verdergaande verkorting van handig rekenen, met als laatste stap het volledig inprenten.

Die verkorting geschiedt onder meer door: efficient gebruiken van eigenschappen, benutten van reeds gememoriseerde tafelkennis, uitbuiten van bepaalde structuren in het getalsysteem en ... gericht oefenen.

Deze publicatie kende een ruime oplage en heeft zo sterk bijgedragen aan de verspreiding van de geschetste vernieuwing. In de tweede plaats noemen we de nascholingsmodule die in 1991 in het kader van de zorgverbreding 'speerpunt rekenen' werd uitgebracht. Hoewel deze nascholing een vroege dood is gestorven, werd in het deel 'tafels' een interessante poging gedaan de nieuwe didactiek in het onderwijs te introduceren en leraren basisonderwijs ermee vertrouwd te maken. Achteraf bezien is dit doel maar in beperkte mate bereikt. Het neveneffect was echter dat vanaf dat moment in de te verschijnen rekenwiskundemethoden van realistische signatuur de aanpak voor het leren van tafels door middel van de strategie- en steunpuntenmethode werd ingevoerd en dat op die wijze de vernieuwingsvoorstellen van Wiskobas en haar navolgers over het leren van de tafels in methoden voor het basisonderwijs konden worden herkend.

Het geheel overziende meen ik, in het kort, de volgende lijn te zien. Aanvankelijk was Freudenthal, rond 1970, sterk geïnteresseerd in het probleemoplossend denken in de wiskunde. Hij hechtte veel betekenis aan leerprocessen die tot kennis met inzicht leidde. Dit voedde de misvatting bij velen in en rond het onderwijs dat hij geen belangstelling had voor de rol die het leren van feitenkennis (het memoriseren) in het leren rekenen speelt.[12] Hetzelfde werd door sommigen, ten onrechte, tegen de vernieuwingsvoorstellen van Wiskobas ingebracht. De elementaire rekenvaardigheden (of: 'basisvaardigheden') worden door leerlingen van de aanvangsklassen in het basisonderwijs nu evenals vroeger 'van buiten geleerd', alleen niet op dezelfde manier als toen. Nu worden de rekenfeiten niet geïsoleerd, maar in samenhang geleerd. Mede op grond van het ontwikkelingsonderzoek van Wiskobas en de door haar ontwikkelde leergangen werd Freudenthal zich meer en meer bewust van de betekenis van memoriseerprocessen voor het leren van rekenenwiskunde.

Noten

1 Met dank aan A. Treffers en J. Klep voor hun commentaar op de eerste versie van dit artikel.

2 ICME staat voor International Congress for Mathematics Education.

3 Zie: A.G. Howson (ed.) (1973). Developments in Mathematical Education. *Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education.* Cambridge: University Press. De psycholoog Piaget had eveneens toegezegd een lezing te geven, onder de titel 'Comments on mathematical education', maar moest de conferentie wegens ziekte afzeggen.

4 G. Polya (1971). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press. Dit boek is in 1974 in het Nederlands vertaald onder de titel: *Heuristiek en wiskunde; een andere kijk op de werkwijze van de wiskunde*. Den Bosch: Malmberg.

5 Wiskobas staat voor WISKunde Op de BASisschool. Wiskobas was een project van het IOWO (1971-1980). Het project richtte zich op de ontwikkeling van een nieuwe visie op reken-wiskundeonderwijs voor de basisschool, de opleidingen en de nascholing van leraren basisonderwijs. Het bood bovendien steun aan schoolbegeleidingsdiensten.

6 Zie voor een beschouwing over het leren vermenigvuldigen in traditionele methoden na de Tweede Wereldoorlog ook de analyse van H. ter Heege in *Willem Bartjens, 3*(2), 115 - 123, 'Naar Zelfstandig Rekenen'. In *Willem Bartjens, 3*(4) werd de methode 'Taltaal', een realistische methode 'van de eerste lichting' eveneens geanalyseerd met betrekking tot het leren vermenigvuldigen. Ook in de laatste methode, 'een rekenmethode voor de jaren '80', berust het memoriseren nog te veel op het schriftelijk oefenen, luidt een van de conclusies.

7 Dit is een ander principe van professor Freudenthal dat hij aanhaalt in het eerdergenoemde hoofdstuk van het vermelde boek (Freudenthal, 1984a) en dat door de Wiskobasgroep in haar ontwikkelingsonderzoeken voor reken-wiskundeonderwijs veelvuldig wordt gepraktiseerd: 'Van de informele strategieën van kinderen om problemen op te lossen zou men profiteren om ze meer formele strategieën te laten leren en gebruiken.'

8 Zie: Pieters, S. (eindred.) (1980). *De Achterkant van de Möbiusband*. Utrecht: Instituut Ontwikkeling Wiskunde-Onderwijs), 77-83. Later worden de resultaten van het ontwikkelingsonderzoek over het leren vermenigvuldigen in enkele, ook in interne SLO- en IOWO-publicaties, beschreven. Zie bijvoorbeeld:
(1) Heege, H. ter (1987). Een goed product, onderzoek en ontwikkeling ten behoeve van een leergang vermenigvuldigen. *Studies in Leerplanontwikkeling, 9.* Enschede: SLO.
(2) Heege, H. ter (1983). Het leren van tafels van vermenigvuldiging. *Willem Bartjens, 3*(1), 18-22.

9 Uit onderzoek van Brownell c.s., dat werd gedaan aan het eind van de jaren dertig in de Verenigde Staten, was hetzelfde geconcludeerd.
Zie bijvoorbeeld: Brownell, W.A. & C.B. Chazal (1935). The effect of premature drill in thirdgrade arithmetic. *Journal of Educational Research, 29*, 17-32.

10 J. Klep en L. Gilissen werkten in het midden van de jaren tachtig aan het deelproject 'Basisvaardigheden leren en computers', in de SLO aan 'Wiskunde 4-12'. Dit deelproject had als oogmerk een computerprogramma te ontwikkelen waarmee kinderen de tafels van vermenigvuldiging konden (be)oefenen aan de hand van zowel kale sommen als van modellen en in reële contexten.
Zie: Klep, J. (1984). Voorwerk voor een computerprogramma. *Willem Bartjens*, *4*(1), 30-40.
Gilissen, L. (1986). Voorwerk voor een computerprogramma. *Willem Bartjens*, *5*(2), 80-87.

11 Zie: Klep, J. & L. Gilissen (1987): *Een wereld rond tafels*. Enschede: SLO. Leerlingen worden door het programma in de gelegenheid gesteld om 'hulp' te vragen die aansluit bij hun eigen manier en niveau van denken. De computer legt de resultaten van de leerlingen vast en bepaalt op grond van die resultaten welke nieuwe oefenopgaven aan de leerling wordt aangeboden. Dit programma, dat met een floppy en een handleiding voor de leraar werd uitgebracht, stond aan de basis van Kleps dissertatie ('Arithmeticus; simulatie van

wiskundige bekwaamheid') uit 1998, waarin hij de didactische mogelijkheden van de computer voor het rekenwiskundeonderwijs in ruime zin onderzocht. De ondertitel van het proefschrift luidt dan ook: Computerprogramma's voor het generatief en adaptief plannen van inzichtelijk oefenen in het reken-wiskundeonderwijs'.

12 In 'Revisting Mathematics Education' (1991) schrijft Freudenthal op pagina 49 als het over het leren van betekenisvolle leerstof handelt: 'Multiplication tables are a striking example - at least as long as they are considered worth learning and memorising, which I still think they are'. Vervolgens zet hij de traditionele didactiek tegenover de nieuwe aanpak, zoals die in dit artikel is beschreven.

Literatuur

Brink, J. van den, H. ter Heege, L. Streefland & A.Treffers. Leerplanontwikkeling: ordenend tellen. *Wiskobas-Bulletin, 2*(6), 1042 - 1058.

Freudenthal, H. (1984a). *Appels en peren / wiskunde en psychologie.* Apeldoorn: Van Walraven.

Freudenthal, H. (1984b). Memoriseren. *Willem Bartjens, 3*(2), 124-126.

Goffree, F. (1982). *Wiskunde & Didactiek 1*. Groningen: Wolters Noordhoff, 178-193.

Heege, H. ter (1985). The Aquisition of Basic Multiplication Skills. *Educational Studies in Mathematics, 16,* 375- 388.

Ontwikkelgroep Speerpunt Rekenen. Bokhove, J., S. Huitema & A. Noteboom (ed.) (1991). *Tafels* (cursistenboek en handleiding). 's-Hertogenbosch: KPC.

Treffers, A. (ed.) (1979). Cijferend vermenigvuldigen en delen (1). Overzicht en achtergronden. *Leerplanpublikatie 10,* Utrecht: IOWO.

Treffers, A. & E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2: basisvaardigheden en cijferen.* Tilburg: Zwijsen.

In the early seventies Freudenthal and his colleagues of the Wiskobas-project seemed to be not particularly interested in processes of automatization of mathematical procedures and of memorization of factual knowledge. The accent in the developmental work was on problem solving. In this article the development of thinking on the learning and teaching of the multiplication facts is described. It is interesting to realise how the scope changed as a result of educational research. Freudenthal advocated the research findings of the Wiskobas-group which say that memorizing the tables is not purely a result of rote learning, but is influenced by strategies children develop.

Wiskunde leren

- een kwestie van steeds gezonder verstand -

Kees Buijs
SLO, Enschede

In dit artikel vindt een bezinning plaats op de bijdrage aan de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs die toegedicht kan worden aan wat wel als Freudenthal's belangrijkste werk wordt gezien: het in 1991 verschenen 'Revisiting Mathematics Education'. In het eerste deel van het artikel wordt een overzicht gegeven van een aantal van de voornaamste denkbeelden betreffende wiskunde en wiskunde leren uit dit werk. Vervolgens wordt aan de hand van een drietal praktijkvoorbeelden van onderwijsleeractiviteiten stilgestaan bij de vraag in hoeverre deze denkbeelden in de achter ons liggende veertien jaar in theorie en praktijk van het reken-wiskundeonderwijs een nadere uitwerking en concretisering hebben gekregen. De aandacht gaat daarbij speciaal uit naar een van de centrale thema's in het denken van Freudenthal, te weten het niveaukarakter van het wiskundige leerproces. Betoogd zal worden dat er aan de ene kant, mede onder invloed van het werk van de TAL-groep, belangrijke vooruitgang is geboekt bij het streven om het niveaukarakter van het leerproces voor verschillende leerstofdomeinen nader te duiden. Aan de andere kant blijft er evenwel nog het nodige te wensen over, omdat het accent bij dit streven wellicht iets te sterk op het handelingsaspect en wat te weinig op het begripsaspect van de niveauverhoging heeft gelegen

1 Inleiding

Het is nu bijna veertien jaar geleden dat ik het voorrecht had de Panama-najaarsconferentie te openen met een lezing die gewijd was aan het laatste werk van professor Freudenthal 'Revisiting Mathematics Education', het boek dat destijds juist was uitgekomen en waarin hij een groot deel van z'n denkbeelden over wiskunde en wiskunde-onderwijs nog eens de revue liet passeren (Freudenthal, 1991). In de lezing werden een aantal van deze denkbeelden besproken en geïllustreerd aan de hand van praktijkvoorbeelden. Tevens werd ingegaan op de vraag op welke wijze deze ideeën in de praktijk van het onderwijs gerealiseerd zouden kunnen worden.
Inmiddels zijn we zo'n anderhalf decennium verder en vieren we de honderdste geboortedag van Freudenthal. Dat moment biedt tevens een mooie gelegenheid om nog eens terug te komen op de in 'Revisiting Mathematics Education' ontvouwen ideeën. Hoe actueel zijn deze anno 2005 eigenlijk nog? In hoeverre zijn wij er de afgelopen jaren in geslaagd om deze ideeën gemeengoed te laten worden in de praktijk van het basisonderwijs? In deze bijdrage ga ik nader in op deze vragen. Ik beperk me daarbij tot een aantal van de belangrijkste denkbeelden uit de eerste twee hoofdstukken van het boek - de hoofdstukken waarin Freudenthal onder meer zijn opvattingen over wiskunde en over wiskunde leren beschrijft. Ik hoop enerzijds te laten zien dat er de nodige vooruitgang is geboekt bij het verder ontwikkelen en concretiseren van de genoemde denkbeelden, maar dat er anderzijds nog wel het nodige te wensen overblijft. Ik ga daarbij speciaal in op een van de centrale thema's in het denken van Freudenthal: het niveaukarakter van het wiskundige leerproces.

2 Enkele kernideeën uit 'Revisiting Mathematics Education'

Hoewel Freudenthal zich in de inleiding van zijn boek al op voorhand verontschuldigt voor het feit dat dit eigenlijk weinig nieuws bevat en voornamelijk een aanscherping en heroverweging van reeds eerder geformuleerde ideeën betreft, is dat toch niet helemaal waar. Betrekkelijk nieuw was namelijk het idee van *wiskunde als gezond verstand*: het idee dat wiskundige activiteiten, zoals die door jonge kinderen spontaan bedreven worden, vooral een kwestie zijn van het gebruiken van gezond verstand. Ter toelichting omschrijft hij wiskunde in navolging van Simon Stevin als de kunde of kunst van wat 'wis en zeker' is, en hij merkt daarbij gezond verstand aan als de meest overvloedige en meest oorspronkelijke bron van zekerheid. Nu is gezond verstand weliswaar een rijke maar lang niet altijd even betrouwbare bron van zekerheid (aldus Freudenthal), en daarom dient het onderwijs erop gericht te zijn om datgene wat ingegeven wordt door het gezond verstand, ter discussie te stellen, in twijfel te trekken en zodanig te onderzoeken of te bewerken dat er een meer

beredeneerde, meer wiskundige vorm van zekerheid ontstaat. Kortom, het gezond verstand dient zich te ontwikkelen tot 'steeds gezonder verstand'.
Om het leerproces nader te karakteriseren, trekt Freudenthal een parallel met de historische ontwikkeling van wiskundige kennis zoals die door de mensheid is doorlopen. In het leerproces dat kinderen doormaken, dient zich deze historische ontwikkeling op hoofdlijnen, en dus zonder de talrijke dwaalwegen en vergissingen die zich hebben voorgedaan, opnieuw te voltrekken. Hieruit vloeit onmiddellijk de centrale rol van de alledaagse realiteit voort als bron van wiskundige activiteiten: het proces van 'steeds gezonder verstand' heeft als belangrijkste aangrijpingspunt de door kinderen beleefde alledaagse werkelijkheid en de wens om beter wijs te worden uit verschijnselen en situaties die zich in die werkelijkheid voordoen. Freudenthal gebruikt in dit verband de term 'mathematiseren' om aan te geven dat het in het leerproces gaat om het 'verwiskundigen' van de door kinderen beleefde realiteit.
Om het onderwijsleerproces waarbinnen het mathematiseren plaatsvindt, nader te karakteriseren gebruikt hij vervolgens de term *guided reinvention*, geleid heruitvinden. In samenhang met het voorgaande gaat het er, aldus Freudenthal, niet om de leerlingen wiskunde te leren als een verzameling vaststaande regels, procedures en eigenschappen waarvan de juistheid maar voor kennisgeving moet worden aangenomen, maar als iets dat door de leerlingen zelf heruitgevonden dient te worden en waarvan de juistheid door hen bewust beleefd en doordacht dient te worden. De term heruitvinden verwijst hierbij naar de eigen, constructieve stappen die een leerling in het leerproces doet, terwijl 'geleid' naar de onderwijsomgeving verwijst waarin dat proces plaatsvindt: onder begeleiding van de leraar en in samenspraak met medeleerlingen. Een groot voordeel van een dergelijke benadering van onderwijsleerprocessen (voegt Freudenthal eraan toe) is dat kennis die het resultaat is van de eigen constructieve activiteit van leerlingen, veel beter beklijft. Bovendien kunnen eigen 'uitvindingen' in de vorm van zelf ontwikkelde strategieën en zelf verworven inzichten het plezier in het leren aanmerkelijk vergroten.

Kenmerkend voor het leerproces waarin die wiskundige kennis door de leerlingen heruitgevonden wordt, is het 'niveaukarakter' ervan.[1] Bij niveaus moet dan niet aan absolute niveaus gedacht worden, maar aan relatieve waarbij de organiserende, structurerende activiteit van het lagere niveau object van denken wordt op het hogere niveau. Door stil te staan bij de eigen handelingen van dat lagere niveau, deze te overdenken en (zo mogelijk) in verband te brengen met de handelingen van medeleerlingen, kan het inzicht doorbreken om deze handelingen op een andere, verkorte of meer geavanceerde manier uit te voeren. Daarmee kan een niveauverhoging tot stand komen die cruciaal is voor de verdere ontwikkeling van het wiskundig denken en handelen. Over de specifieke hoedanigheid van de verschillende niveaus die door leerlingen binnen allerlei leerstofdomeinen doorlopen kunnen worden, laat Freudenthal zich verder niet uit. Het belang van een nadere uitwerking van het niveaukarakter van het leerproces werd door hem echter nadrukkelijk onderkend. Zo presenteerde hij als een van de 'major problems of mathematics education' op de ICME in 1981 te Berkeley reeds de vraag 'hoe het wiskundig leerproces volgens niveaus gestructureerd kan worden en hoe deze structurering gebruikt kan worden voor differentiatie' (Freudenthal, 1981). Veel ontwikkelactiviteiten rond het reken-wiskundeonderwijs van de afgelopen jaren hebben zich dan ook gericht op het nader in kaart brengen en afbakenen van deze niveaus voor verschillende domeinen - verderop in dit artikel kom ik daar nog uitgebreid op terug.
Van cruciaal belang bij het bedrijven van wiskunde als gezond verstand acht Freudenthal verder wat hij noemt de 'banden met de realiteit'. Daarbij moet het begrip realiteit breed worden opgevat. Zoals hiervoor reeds is uiteengezet, spruiten wiskundige activiteiten van mensen historisch gezien weliswaar primair voort uit de alledaagse realiteit, dat wil zeggen uit de algemeen-menselijke behoefte om verschijnselen en situaties uit de alledaagse realiteit beter te begrijpen en hanteerbaar te maken. Maar naarmate de wiskundige kennis die het resultaat is van die mathematiserende activiteit gedifferentieerder wordt en uitgroeit tot een coherent geheel, wordt deze kennis zelf steeds meer punt van overdenking en reorganisatie. Daarmee gaat ook de mentale realiteit van de reeds verworven wiskundige kennis deel uitmaken van het werkveld waarop de wiskundige activiteit betrekking heeft. In de woorden van Freudenthal: realiteit omvat al datgene dat het gezond verstand in een zeker stadium als reëel ervaart.
Zou men nu kunnen zeggen dat de hierboven kort getypeerde ideeën in de afgelopen vijftien jaar geleidelijk aan steeds verder ingeburgerd zijn geraakt in de praktijk van ons basisonderwijs? En dat deze ideeën gaandeweg een steeds nadere uitwerking in theorie en praktijk van het realistisch reken-wiskundeonderwijs hebben gekregen? Of blijft er wat dat betreft nog veel te wensen over?

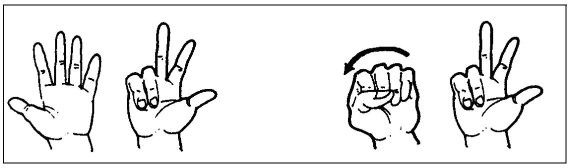
3 Het voorbeeld van Marleen

Het handelings- en begripsaspect van niveauverhoging

Om over deze vragen iets meer te kunnen zeggen, ga ik om te beginnen nog even terug naar een van de praktijkvoorbeelden die in bovengenoemde lezing ten tonele werden gevoerd. Het gaat om het voorbeeld van Marleen, die werd opgevoerd als een voorbeeld van hoe kinderen op basis van het gebruiken van hun gezond verstand een cruciale stap verder kunnen komen in het leerproces rond het optellen en aftrekken tot 10 (Buijs, 1992). Het betrof hier een interactieve onderwijssituatie in groep 3, waarbij de kinderen een op dat moment nog tamelijk complexe opgave kregen voorgelegd:

> Er hangen 8 appels aan de boom.
> Iemand plukt er 5.
> Hoeveel appels zijn er nog over?

Vertrekpunt voor deze opgave vormde een bordtekening van een appelboom waar duidelijk zichtbaar acht appels aanhingen. Nadat de leerkracht de opgave had gelanceerd, klapte zij het bord dicht, zodat de appels niet langer zichtbaar waren. Hoe kwam Marleen tot een oplossing? Zij gaf de situatie in eerste instantie symbolisch op haar vingers weer door van elke hand vier vingers op te steken en door te proberen daar een voor een vijf vingers vanaf te halen. Dit ging, ook om motorische redeneren, nogal moeizaam. Plotseling drong een andere mogelijkheid tot haar door. Zij veranderde het beeld van de opgestoken vingers door van de ene hand alle vingers op te steken en van de andere hand nog drie. In een beweging haalde ze vervolgens de volle hand weg en constateerde triomfantelijk: drie over! (fig.1)



figuur 1

In de nabespreking kreeg Marleen van de leerkracht gelegenheid haar ontdekking te demonstreren. De leerkracht wees hierbij nadrukkelijk op de handige oplossing van Marleen en liet de overige kinderen deze zelf ook even uitproberen. Met als gevolg, dat nogal wat kinderen zich eveneens begonnen te realiseren hoe goed deze oplossingswijze 'werkt'. Ze hadden deze dan weliswaar niet zelf uitgevonden, maar ze hadden toch een ervaring opgedaan in de sfeer van: 'Dit is zo duidelijk, ik had het zelf kunnen ontdekken'.
In het voorbeeld tekent zich een belangrijke niveauovergang af, namelijk die van het tellende rekenen naar het structurerende rekenen. Althans, zo is deze overgang naderhand betiteld in het kader van het TAL-project. Voor het domein van het rekenen tot 20 werd daarbij een onderscheid gemaakt tussen drie niveaus van handelen (Treffers e.a., 1999):

– het niveau van het tellende rekenen, waarbij één voor één de telrij wordt afgelopen of vingers één voor één worden toegevoegd of weggedaan;
– het niveau van het structurerende rekenen, waarbij een leerling de vijfstructuur van de hele hand of van het rekenrek gebruikt om tot een oplossing te komen;
– het niveau van het formele rekenen, waarbij op basis van getalrelaties die in het structurerende rekenen besloten liggen, een oplossing wordt gevonden.

In de overgang van het tellende via het structurerende naar het formele rekenen voltrekt zich, aldus de TAL-visie, een essentieel element van niveauverhoging dat kenmerkend is voor het leerproces dat leerlingen binnen dit leerstofdomein kunnen doorlopen. De geschetste driedeling kan overigens beschouwd worden als een domeinspecifieke toevoeging aan het meer algemene idee van informeel-contextgebonden, modelondersteund en formeel handelen zoals dat door Treffers en anderen is onderscheiden (Treffers, 1987; Streefland, 1988).
Is de niveauverhoging die binnen het genoemde domein wordt nagestreefd, via de driedeling van tellend, structurerend en formeel rekenen adequaat getypeerd, of gaat het om meer? Aan het voorbeeld van Marleen is te zien dat het onderscheid tussen tellend en structurerend rekenen inderdaad van belang is om de overgang naar het hogere niveau te duiden. Maar dit aspect van het handelen is niet het enige relevante aspect. Het gaat bij de overgang naar het hogere niveau vooral ook om een hoger niveau van denken, een beter begrijpen van de leerstof. Van dit beter begrijpen laat Marleen eveneens een voor dit domein kenmerkend aspect zien: zij beeldt de besproken situatie van de appelboom symbolisch uit door een aantal vingers op te steken en aan deze symbolische voorstelling die handelingen te voltrekken die overeenkomen met wat in de werkelijke situatie gedaan zou kunnen worden. En ze doorziet dat het resultaat van de aldus uitgevoerde handelingen overeen moet komen met het resultaat dat in de daadwerkelijke situatie verkregen zou worden. Het is dit idee van het creëren van een symbolische, modelmatige voorstelling (kortweg: het *symboliseren*) dat eveneens als een belangrijk aspect van de niveauverhoging kan worden aangemerkt. Naast het handelingsaspect is het dan ook wellicht relevant een begripsaspect aan de niveauverhoging te onderscheiden, een aspect dat in TAL-publicaties misschien niet altijd even prominent is aangeduid (hoewel het in de voorbeelden wel duidelijk tot uitdrukking is gebracht). Hoe dan ook, de typering van het onderwijsleerproces in termen van tellend, structurerend en formeel rekenen kan beschouwd worden als een waardevolle poging om Freudenthals idee van het niveaukarakter van leerprocessen, gericht op het steeds verder ontwikkelen van gezond wiskunde-verstand, een voor onderwijsgevenden concrete uitwerking te geven. Hoe zit dat binnen andere domeinen?

4 Het voorbeeld van Taner en anderen

Beter begrijpen van aftrekhandelingen tot 1000

Het gebied van het optellen en aftrekken tot 1000 vormt in zekere zin een soort overgangsdomein. Net als bij het rekenen tot 100 wordt er in het onderwijs in eerste instantie veel aandacht besteed aan het verwerven van inzichtelijke hoofdrekenstrategieën voor eenvoudigere typen opgaven. Naderhand, als de getallen complexer worden, vindt een uitbreiding plaats in de richting van het werken met standaardprocedures - in eerste instantie die van het kolomsgewijs rekenen, later die van het cijferend rekenen. Daarnaast blijft hoofdrekenen van belang en dienen de leerlingen steeds meer onderscheid te gaan maken tussen de meer elementaire opgaven die zich bij uitstek lenen voor het gebruik van hoofdrekenstrategieën, en de meer complexe opgaven die vooral in aanmerking komen om via standaardprocedures te worden opgelost. Het is juist in dit onderscheid leren maken en in het blijvend leren inzetten van hoofdrekenstrategieën in passende situaties, dat een aspect van 'steeds gezonder verstand' tot uitdrukking komt. Het langdurig en eenzijdig inoefenen van de cijferprocedures voor optellen en aftrekken is in dat opzicht waarschijnlijk minder bevorderlijk voor het blijvend inzetten van gezond verstand.

Om iets meer over de ontwikkeling van 'steeds gezonder verstand' binnen dit domein te zeggen, neem ik een voorbeeld van drie leerlingen uit groep 6 die problemen hebben met elementaire hoofdrekenopgaven als 178 + 40 = en 437 – 50 = (Buijs, 2003). In een serie remediërende activiteiten probeert een interne begeleider op de school van deze kinderen de nodige ondersteuning op het gebied van hoofdrekenen te geven. In eerste instantie is daarbij veel aandacht besteed aan de getallen als zodanig, aan de structuur van de telrij tot 1000 en aan het tellen met sprongen van tien. Vervolgens hebben de leerlingen zich nogmaals bezonnen op het gebruik van handige hoofdrekenstrategieën, waarbij de leraar de binnen TAL ontwikkelde driedeling van rijgend, splitsend en variarekenen (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001) als referentiekader hanteerde. Betaalsituaties die soms ook daadwerkelijk werden nagespeeld, hebben hierbij een rol gespeeld. In de activiteit hieronder zijn de leerlingen bezig om de kale opgave 437 – 50 op te lossen.

Taner: Dan doe ik die 7 even apart, dan heb je 430 ...; en dan eerst 30 eraf is 400; nog 20 eraf is ... 380 (de leraar noteert dit op het bord; fig.2).

437 – 50 =
7
430 – 30 = 400
400 – 20 = 380

figuur 2

Leraar (zich tot de andere twee leerlingen Samantha en Sharon wendend): is dat goed, 380?
Sharon: Eeeh, ja. Want voor de 100 zit altijd de 90 en dan komt de 80 (Samantha bevestigt dit).
Taner: En dan nog die 7 eraf, dat is ... Nee, wacht eens, moet die er nou af?
Sharon: Ik dacht het wel; het is toch min? Of...?
Samantha: Ja, dat heb ik soms nou ook, dan weet ik niet meer of het er nog af moet, of erbij...
Leraar: Zouden wij een manier kunnen bedenken om uit te vinden of die 7 er nu nog af moet, of juist erbij?
Taner (naar de berekening op het bord kijkend): Nee, ik denk toch dat 'ie erbij moet ...
Leraar: Maar zou je kunnen uitleggen waaróm dat zo is?
Taner: (...)
Sharon: Als het nu eens betalen is?
Leraar: Hoe bedoel je?
Sharon: Nou (pakt de 'portemonnee' die in voorgaande activiteiten gebruikt is om situaties na te spelen), als je 437 euro hebt en je moet iets betalen van 50 euro ... En dan zegt Taner: ik leg die 7 euro even apart ...
Leraar: En dan?
Samantha en Sharon: Dan haal je die 30 eraf, en daarna die 20; maar dan moet je die 7 er niet ook nog eens afhalen, want dan haal je er teveel af!
Taner: Ja, die 7 zit gewoon nog in de portemonnee! Dus die komt er weer bij ...

De situatie wordt nog even nagespeeld, met geopende portemonnee. Duidelijk blijkt nu dat de 7 apart gelegde euro's inderdaad gewoon bij de resterende 380 opgeteld moeten worden. Het antwoord is dus 380 + 7 = 387 (leraar noteert dit op het bord).
In voorgaande activiteiten had de leraar het accent nogal op de rijgaanpak gelegd, dat wil zeggen de aanpak waarbij het eerste getal in de opgave heel gehouden wordt. Maar de leerlingen begonnen van lieverlee ook steeds meer de splitsaanpak te gebruiken. Daarbij traden nog wel regelmatig fouten op. Ook ontstond er, zoals in de hierboven beschreven situatie, soms verwarring over de vraag wat er nog met de afgesplitste delen van een getal moest gebeuren. De leraar besloot daarop zo'n situatie aan te grijpen om de leerlingen te laten nadenken over het eigen handelen, en met name te laten onderzoeken of ze een manier konden bedenken om 'uit te vinden of die 7 er nu nog af moet, of juist erbij'.

Waarin manifesteert zich in deze situatie nu het gezonde wiskundeverstand? En hoe wordt ernaar gestreefd om dit tot 'steeds gezonder verstand' te laten uitgroeien? Een belangrijk moment doet zich voor als de kinderen een eigen oplossingswijze in twijfel trekken en zich afvragen of een bepaalde handeling wel correct is. De leraar haakt hier op in door deze twijfel enigszins te voeden en tot een soort onderzoeksvraag te promoveren. Het idee om de kale opgave te verbinden met een passende contextsituatie (in casu een betaalsituatie, zoals die een aantal keren is nagespeeld), komt vervolgens uit de kinderen zelf. Dit idee blijkt een goede greep te zijn: via de betaalsituatie kan beredeneerd worden waarom de apart gezette 7 er naderhand weer bijgedaan moet worden, en niet eraf. Kortom, door de verbinding van de opgave met de alledaagse realiteit te leggen en door de daarin uitgevoerde handelingen als criterium voor de juistheid van de formele rekenhandeling te hanteren, kan beredeneerd worden wat de juiste oplossing is. Hiermee komt de splitsstrategie voor deze leerlingen in een duidelijker, begripsmatig beter onderbouwd daglicht te staan, hetgeen als een flinke sprong voorwaarts beschouwd mag worden.

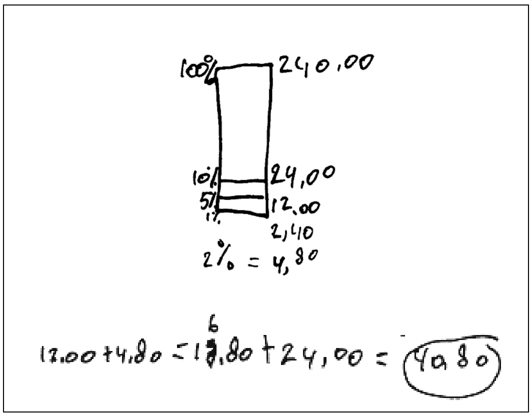
In TAL-publicaties is voor het domein van het hoofdrekenen (waarvan het gebied tot 1000 als een belangrijk onderdeel beschouwd kan worden) een onderscheid gemaakt in drie niveaus van handelen die de beoogde progressie van leerlingen in grote lijnen weerspiegelen: rijgen, splitsen en varia-rekenen. Ook deze driedeling kan als een domeinspecifieke toevoeging beschouwd worden aan de hierboven genoemde meer algemene indeling van informeel-contextgebonden, modelondersteund en formeel-vakmatig handelen. Anders dan bij de driedeling die voor het gebied van het rekenen tot 20 is gemaakt, geldt hier overigens dat het splitsen niet komt in de plaats van het rijgen, maar in aanvulling daarop. De leerlingen worden dus verondersteld geleidelijk aan een steeds breder repertoire aan hoofdrekenstrategieën te verwerven. De indeling van rijgen, splitsen en variastrategieën geeft daarbij een belangrijke indicatie voor de beoogde niveauverhoging. Ook hier kan men zich afvragen in hoeverre deze driedeling het proces van voortgaande niveauverhoging adequaat typeert. Is het niet vooral het handelingsaspect van de niveauverhoging, waarnaar verwezen wordt? En blijft het begripsaspect, dat in het voorbeeld naar voren komt in de gerichtheid op het beter begrijpen van de splitsstrategie en op het met behulp van een passende context onderbouwen van een bepaalde rekenhandeling (kortweg: *contextualiseren*), niet wat onderbelicht?

5 Daan en de procenten

Beter begrijpen hoe je een verhouding kwantificeert

We gaan nog een stapje verder, naar groep 8. Daan is een leerling die in een apart rekengroepje werkt. Dat is al zo vanaf groep 6, toen zijn leraar het niet langer verantwoord achtte om hem gelijk op met de rest van de klas verder te laten gaan. In zijn aparte groepje is hij in groep 6 en 7 vooral met automatiseren en cijferen bezig geweest. Domeinen als breuken en kommagetallen zijn in deze leerjaren vrijwel buiten schot gebleven. Een nieuwe interne begeleider heeft, mede na overleg met de ouders, verandering in de situatie gebracht. Zij heeft het roer flink omgegooid en het accent in de lessen aan het aparte rekengroepje veel meer gelegd op elementair hoofdrekenen, meten en op een verkenning van (vooral) kommagetallen en procenten.

Met name van dit laatste onderwerp bleek Daan toch wel het een en ander af te weten. Bijvoorbeeld, dat procenten gebruikt worden om aan te geven dat er wat van de prijs afgaat (zoveel procent korting) of dat er bepaalde stoffen in een product in de winkel zitten (zuivelproducten met zoveel procent vet). In samenhang hiermee bleek Daan ook in staat te zijn om bepaalde elementaire percentages als breuk te interpreteren: 50 procent als de helft, 25 procent als een kwart, en 10 procent als $\frac{1}{10}$ deel. Geleidelijk aan werden deze ankerpuntpercentages tijdens de hulpactiviteiten nu uitgebreid met nieuwe: 20 procent als het dubbele van 10 procent, 5 procent als de helft van 10 procent, 1 procent als '$\frac{1}{10}$ deel van $\frac{1}{10}$ deel', en zo meer. Het rekenen met procenten beperkte zich in eerste instantie tot elementaire opgaven van het type 20 procent van € 360,- is. Gebruikmakend van zijn ankerpuntenkennis en met hulp van de strook als ondersteunend model bleek Daan na verloop van tijd met dergelijke opgaven redelijk goed uit de voeten te kunnen. Zie het voorbeeld in figuur 3, waarbij Daan de opgave 17 procent van € 240,- oplost.



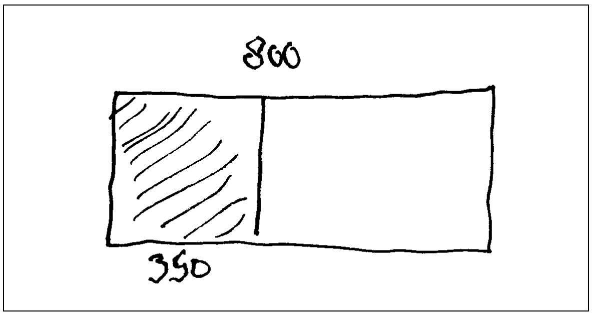
figuur 3

Vervolgens werd een nieuw type opgaven onder de loep genomen, namelijk het type waarbij een verhouding in een percentage moet worden omgezet. Bijvoorbeeld: 35 van de 120 kinderen komt met de fiets naar school, hoeveel procent is dat? En: van de 500 gecontroleerde auto's reden er 98 te hard, hoeveel procent is dat? Het bleek Daan grote moeite te kosten om zich dergelijke situaties goed voor ogen te stellen. Hij leek de bedoeling niet goed te begrijpen en het lukte hem in eerste instantie nauwelijks om er greep op te krijgen. In het voorbeeld hieronder, waarin met Daan apart wordt gewerkt, gooit de leraar het daarom over een iets andere boeg.[2]

Leraar:	We gaan het vandaag anders doen, Daan. En jij moet mij helpen om het uit te leggen. (...) Ze zijn bezig met een nieuw voetbalstadion hier in de buurt (Daan: dat klopt), en daar komt ook een groot parkeerterrein voor 800 auto's bij. Stel nu eens dat er van die 800 parkeerplaatsen 350 bezet zijn ...
Daan:	Dus 800 plaatsen, en er zijn er 350 bezet?

Leraar: Ja. Is dat veel, als er 350 auto's op staan?
Daan: Nou, best wel; 350 auto's, dat is heel wat.
Leraar: Zou jij dat kunnen tekenen?
Daan: Al die auto's?
Leraar: Nee, ik bedoel dat parkeerterrein. En dan laat je op dat terrein zien hoeveel 350 plaatsen ongeveer is.
Daan: (aarzelend) Dus ..., gewoon zoiets tekenen (tekent een flinke rechthoek)?
Leraar: Ja, precies. En nu staan al die 350 auto's netjes aan één kant van het terrein; de rest is leeg. Zou je dat kunnen tekenen?
Daan: Nou (arceert ongeveer driekwart van de rechthoek) zoiets?
Leraar: Op het hele terrein kunnen er 800 weet je nog (wijst het oppervlak van de hele rechthoek aan)? En nu zijn er 350 plaatsen bezet. Zou dat kunnen?

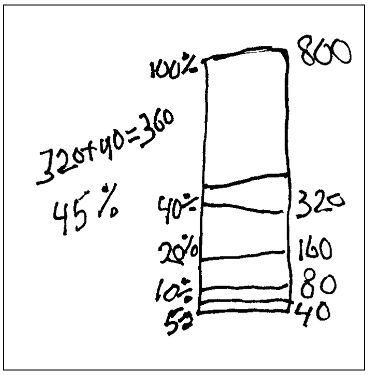
Daan realiseert zich nu dat er iets niet klopt. Hij tekent een nieuwe rechthoek, en arceert daarvan iets minder dan de helft. In overleg met de leraar noteert hij de aantallen erbij: 800 voor het aantal plaatsen op de hele parkeerplaats, 350 voor het aantal bezette plaatsen (fig.4).



figuur 4

Leraar: Waarom heb je het veranderd?
Daan: Het was te veel. Als dit 800 is (wijst de hele rechthoek aan), dan is dit ongeveer 350, denk ik. Minder dan de helft.
Leraar: Oké. Zou jij nu ook kunnen zeggen hoeveel procent dat ongeveer is: 350 van de 800 plaatsen? Zou je dat kunnen schatten?
Daan: Geen idee. Of nou..., ik denk 48 %.
Leraar: Hoe dat zo?
Daan: Want het is een beetje minder dan de helft; en 50% is de helft (wijst dit in de tekening aan).
Leraar: Niet zo gek, hè? Jij zegt: 50% dat is de helft ...
Daan: Ja, dat zou 400 zijn; maar er staan geen 400 auto's. Dus ik denk iets minder, 48%.
Leraar: Schrijf het maar op. Zouden we het nu ook nog wat preciezer kunnen uitrekenen?
Daan: Zal ik een strook tekenen? (doet dit) Dan is 10% hier ongeveer, dat is 80 auto's. Dat is veel minder. En dan 20%, dat is 80 en 80, dus 160. Doe ik weer het dubbele, 320 auto's; dat is dan 40%.
Leraar: Dus, wat is je conclusie?
Daan: Het zijn er 350, dus het is meer dan 40%. Maar geen 50%. Misschien 45%?

Daan komt nu op het idee om eerst eens 5 procent uit te rekenen. Hij noteert dit weer in de strook. Naast de strook bepaalt hij nu hoeveel 45% is: 320+40 is 360 auto's (fig.5).



figuur 5

Daan: Net geen 45%. Maar het scheelt niet veel.
Leraar: Zullen we maar zeggen: bijna 45%? Het zit er zo dicht bij ... Knap hoor!

Wat zien we hier nu? In voorgaande activiteiten leek Daan totaal geen vat te krijgen op dit soort verhoudingsopgaven. Hij leek eigenlijk niet goed te begrijpen wat er van hem gevraagd werd, en hoe hij het kon aanpakken. In de hierboven beschreven activiteit volgt dan een wending. Van cruciaal belang daarbij lijkt het moment waarop de leraar vraagt om de situatie van een parkeerterrein met 800 plaatsen waarvan er 350 bezet zijn, schematisch weer te geven. In die schematische voorstelling moet de verhouding 'bezet-onbezet' zichtbaar gemaakt worden. Het laat zich aanzien dat juist deze opdracht goed appelleert aan het gezond wiskundeverstand van Daan. Deze doorziet nu dat het lijntje waarmee het bezette deel van het terrein wordt afgebakend, een afspiegeling moet zijn van het aantal bezette plaatsen ten opzichte van het aantal onbezette plaatsen. Kortom, dat het om de verhouding tussen deze beide aantallen gaat. Vervolgens weet hij deze verhouding met het hem bekende hulpmiddel van de strook redelijk accuraat in een percentage uit te drukken. Het is juist het creëren van de schematische voorstelling van de situatie als zodanig (kortweg: het *schematiseren*) die de kern van de wiskundige activiteit vormt en die de sleutel tot het beter begrijpen en oplossen van het probleem oplevert.

In de 'Proeve van een nationaal programma' (Treffers e.a., 1996) wordt voor het domein van breuken en kommagetallen een driedeling van niveaus van handelen onderscheiden zoals die hierboven al is aangeduid: het informele, contextgebonden niveau, het modelondersteunde niveau en het formele, vakmatige niveau. Gravemeijer (2003) heeft in deze driedeling nog een verfijning aangebracht door voor het middelste niveau een onderscheid te maken tussen een verwijzende niveau (het niveau waarop een model ontwikkeld wordt als afspiegeling van eigen, informele strategieën van leerlingen) en een algemeen niveau (het niveau waarop dat model in allerlei andere situaties wordt toegepast. Hiermee wordt een globale drie- dan wel vierdeling gegeven waarmee een essentieel aspect van de binnen deze domeinen beoogde niveauverhoging wordt beschreven. Ook voor het domein van de procenten lijkt deze driedeling van waarde, gegeven het feit dat oplossingswijzen voor de voornaamste typen opgaven binnen dit gebied aan de hand van deze driedeling qua oplossingsniveau van elkaar onderscheiden kunnen worden. Van cruciaal belang daarbij is de vraag hoe een model (en dus de overgang naar modelondersteund handelen) tot stand komt.

De hierboven beschreven activiteit laat hiervan iets wezenlijks zien. Het creëren van de schematische voorstelling van de situatie van het parkeerterrein vormt in feite de opmaat tot het beter begrijpen van het verhoudingsaspect van de situatie, en daarmee tot het op modelniveau oplossen van het probleem. Ook hier lijkt te gelden dat de beschrijving via informeel-contextgebonden, modelondersteund en formeel handelen een wezenlijk aspect van de beoogde niveauverhoging weerspiegelt. Dit betreft dan vooral het handelingsaspect. Het begripsaspect wordt wellicht beter getypeerd door de activiteit van het schematiseren waarmee de modelmatige afspiegeling gecreëerd wordt.

6 Besluit

Meer aandacht voor het begripsaspect van niveauverhoging?

In het voorgaande werden enkele voorbeelden gegeven van kinderlijke wiskundige activiteiten met de bedoeling iets te laten zien van de manier waarop leerprocessen die gericht zijn op het tot stand doen komen van ‘steeds gezonder wiskundeverstand’, kunnen verlopen.
Daarbij werd speciaal ingegaan op het niveaukarakter van zulke leerprocessen, met name voor wat betreft de vraag hoe de niveauverhoging het beste geduid kan worden. In hoeverre zijn wij daarover in de jaren die verstreken zijn sinds het verschijnen van ‘Revisiting Mathematics Education’, volgens de inleider van dat boek de ‘definitieve Freudenthal’, het nodige aan de weet gekomen? Aan de orde werd gesteld hoe in de loop der jaren een aantal lokale theorieën over het niveaukarakter van het leerproces binnen verschillende domeinen zijn ontwikkeld. Deze theorieën zijn, tot op zekere hoogte, te beschouwen als uitwerkingen van het in ‘Revisiting Mathematics Education’ ontvouwen idee van het niveaugewijs verlopen van leerprocessen.

In samenhang daarmee is de vraag besproken in hoeverre een beschrijving van niveaus in termen van typerende handelingen, adequaat is om het beoogde leerproces en de overgang naar hogere niveaus daarbinnen, te karakteriseren. Betoogd werd dat deze beschrijving wel degelijk een essentieel element van de niveauverhoging aanduidt. Zo is het oplossen van een elementaire aftrekopgave als ‘8 appels aan de boom, iemand plukt er 5’ via tellend rekenen van een wezenlijk lager niveau dan via het structurerend rekenen zoals dat door Marleen werd gedemonstreerd. Evenzo is het uitrekenen van een hoofdrekenopgave als 437 – 50 = via een rijgaanpak (al dan niet ondersteund met de lege getallenlijn) van een essentieel lager niveau dan via een splitsaanpak. Het is echter de vraag in hoeverre de beoogde niveauverhoging ook voldoende wordt getypeerd door dit handelingsaspect. Wellicht zou het aanbeveling verdienen daarnaast een meer begripsmatig oftewel conceptueel aspect aan de niveauverhoging te onderscheiden. Het gaat er immers niet louter om dat de leerling op een hoger niveau tot een oplossing leert te komen, maar ook dat dit gebeurt op basis van een steeds beter begrip van de betreffende operatie, van de te gebruiken getalrelaties, en dergelijke. Het is juist in dit beter begrijpen dat iets wezenlijks van het ‘steeds gezonder wiskundeverstand’ tot uitdrukking komt.

In de drie voorbeelden werd geprobeerd dit begripsaspect van de beoogde niveauverhoging op te sporen en aan te wijzen. Dat gebeurde in termen van wiskundige activiteiten die als kenmerkend voor het streven naar een beter begrip beschouwd kunnen worden.
In het voorbeeld van Marleen betrof dit het symboliseren: het symbolisch uitbeelden van de situatie om daarmee een voorgestelde, modelmatige realiteit te creëren als afspiegeling van de ‘echte’ realiteit. In het voorbeeld van Taner en anderen ging het om het contextualiseren: het ‘terugvertalen’ van een formele rekensituatie naar een reële situatie om daarmee de juistheid van een bepaalde rekenhandeling beter te kunnen onderbouwen.
En in het voorbeeld van Daan betrof dit het schematiseren: het zodanig schematisch weergeven van de situatie dat daarmee het verhoudingsaspect beter gevat kon worden. Wellicht dat bij toekomstige pogingen om het niveaukarakter van leerprocessen nader te duiden, juist dit begripsaspect van de beoogde niveauverhoging naast het handelingsaspect meer onder de aandacht zou moeten komen. Het zou de moeite waard zijn om de fundamentele ideeën van ‘Revisiting Mathematics Education’ daar over vijftien jaar nog eens op na te slaan.

Noot

1 In zijn beschrijving van dit niveaukarakter borduurt Freudenthal overigens nadrukkelijk voort op wat Van Hiele en diens echtgenote Van Hiele-Geldof in de jaren vijftig daarover geschreven hebben (Van Hiele, 1973).
2 Het idee voor deze schematiserende activiteit is ontleend aan het werk van Streefland, Van den Heuvel-Panhuizen e.a. Zie bijvoorbeeld: Van den Heuvel-Panhuizen (2003).

Literatuur

Buijs, K. (1992). Het wiskundeonderwijs nogmaals bezien. In: M. Dolk (ed.). *Rekenen onder en boven de tien*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 9-19.

Buijs, K. (2003): Hoofdrekenen met inzicht: ook voor zwakkere leerlingen? *Jeugd in School en Wereld 88(*2), Baarn: Bekadidact, 6-11.

Freudenthal, H. (1981). Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 1*2, 133-150

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (2003). Didactisch gebruik van de lege getallenlijn. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 21(*2), 11-23.

Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buijs & A. Treffers (red.) (2001). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen Hele Getallen Bovenbouw Basisschool.* Groningen: Wolters Noordhoff.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 9-35.

Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en inzicht*. Purmerend: Muusses.

Streefland, L. (1988). *Realistisch breukenonderwijs. Utrecht:* Vakgroep OW&OC (proefschrift).

Treffers, A., M. van den Heuvel-Panhuizen & K. Buijs (red.) (1999). *Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen Hele Getallen Onderbouw Basisschool.* Groningen: Wolters Noordhoff.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education.* Dordrecht: Reidel.

Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1996). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3B: Kommagetallen.* Tilburg: Zwijsen.

The intention of this article is to reflect upon the contribution to the development of realistic mathematics education that can be ascribed to what is generally seen as one of Freudental's major works: Revisiting Mathematics Education (1991). In the first part of the article, a survey will be given of a number of the fundamental ideas about mathematics and mathematics education that are presented in this work. Subsequently, the question is raised to what extent these ideas have been elaborated in theory and practice of mathematics education in the last fourteen years in the Netherlands, especially for one of the most central themes in Freudenthal's thinking: the level raising aspect of the learning process. As a starting point, some paradigmatic examples of mathematical activities are given. It will be argued that on the one hand progress has unmistakably been made, inasmuch as domain specific elaborations of the levelraising aspect for various mathematical domains have been pointed out. On the other hand, it appears there is still a lot of work to be done, since the focus in these elaborations has been mainly on the acting element, whereas the conceptual side of the process of level raising has perhaps been a little underexposed.

Revisiting 'Mathematics education revisited'

Koeno Gravemeijer
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

'To revisit' betekent 'opnieuw bezoeken' of 'teruggaan naar'. Freudenthal gebruikt deze aanduiding in de titel van zijn laatste boek, waarin hij zijn ideeën nog eens op een rijtje zet en zonodig heroverweegt en aanscherpt. Het opnieuw bezoeken betrof bij hem dus vooral zijn eigen werk. Voor mij heeft het herlezen van Freudenthals boek sterk het karakter van teruggaan naar de bron. Deze 'special' voor Freudenthals honderdste geboortedag vormt een mooie aanleiding. Naar het schijnt is dit boek nooit in dit tijdschrift besproken.[1] Dit wordt echter geen echte boekbespreking, maar meer een artikel 'naar aanleiding van'.

1 Inleiding

Freudenthal begint zijn boek 'Revisiting Mathematics Education', met de vraag: 'Wat is wiskunde?' Hij waarschuwt om niet in een woordenboek te kijken, want daar staat het toch altijd fout. Toch komt de omschrijving die ik ooit in een woordenboek vond wel erg dicht in de buurt van die van Freudenthal zelf. Freudenthal grijpt terug op Simon Stevin, die het woord 'wiskunde' in de Nederlandse taal introduceerde. De naam wiskunde is geconstrueerd als verwijzing naar wis en zeker, de wetenschap van wat zeker is. Dit strookt met de woordenboekdefinitie, die wiskunde definieert als een streven naar algemeenheid, zekerheid, exactheid en beknoptheid.
Uiteindelijk komt Freudenthal natuurlijk uit op 'wiskunde als activiteit' en 'mathematiseren'.
Ik was nieuwsgierig naar hoe hij nu het onderscheid tussen 'horizontaal' en 'verticaal' mathematiseren definieert. Dit leidde tot een analyse die ik hier uitwerk. Mijn conclusie is dat we in plaats van twee, drie categorieën zouden moeten onderscheiden: horizontaal mathematiseren, het uitvoeren van wiskundige bewerkingen en verticaal mathematiseren in engere zin, dat wil zeggen, gericht op niveauverhoging. Deze driedeling gebruik ik als basis voor de rest van het artikel, waarbij ik uitga van de ideeën die Freudenthal in zijn boek beschrijft.

2 Horizontaal en verticaal mathematiseren

Mij valt op dat verticaal mathematiseren nogal eens gelijk wordt gesteld met 'uitrekenen'. Eerst moet je horizontaal mathematiseren, dan heb je een wiskundig probleem dat je met wiskundige middelen kunt oplossen, en dat laatste heet dan verticaal mathematiseren. Maar wat is daar nu verticaal aan? Aan het routinematig uitvoeren van standaardbewerkingen kan ik niets van niveauverhoging (wat ik associeer met verticaal) ontdekken. Terug naar Freudenthal dus om te kijken wat hij hierover zegt. Maar bij het lezen blijkt dat hij het verticaal mathematiseren niet exclusief voor niveauverhoging reserveert. Hij zegt zich - na enige aarzeling te hebben overwonnen - aan te sluiten bij Treffers' indeling tussen horizontaal en verticaal mathematiseren. Horizontaal mathematiseren beschrijft hij als het toegankelijk maken van een probleemgebied voor een wiskundige aanpak (in strikte zin), en het verticaal mathematiseren als het meer of minder gesofisticeerde wiskundig verwerken. Hij licht dit toe met:

> Horizontal mathematisation leads from the world of life to the world of symbols. In the world of life one lives, acts (and suffers); in the other one symbols are shaped, reshaped, and manipulated, mechanically, comprehendingly, reflectingly; this is vertical mathematisation. (Freudenthal, 1991, 41-42)

Het onderscheidend criterium is 'de wereld' waarin gemathematiseerd wordt. Hij voegt daaraan toe dat de grenzen van deze werelden vaag en veranderlijk zijn. Dit betekent ook dat dit onderscheid afhankelijk is van de specifieke situatie, de persoon en diens omgeving. Maar hij maakt geen onderscheid naar het soort wiskundige activiteit dat je in die wereld uitvoert, we zien er immers ook het woord *mechanically* staan. Ook uit de voorbeelden die hij geeft, kun je aflezen dat hij het routinematig handelen en uitvoeren van algoritmen tot het verticaal mathematiseren rekent. Wat verderop in zijn boek is hij daar zelfs heel expliciet over, wanneer hij vaststelt dat het onderscheid tussen horizontaal en verticaal mathematiseren niet verward moet worden met niveauverschil:

Horizontal mathematising may just as often mean a jump from reality to fresh mathematics and vertical mathematising a mere routine, as well as vice versa.
(Freudenthal, 1991, 101)

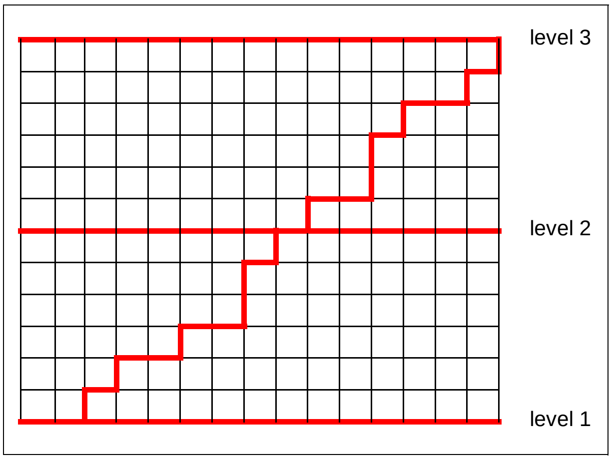
En dat is dus anders dan ik het onderscheid had opgevat. Op zich is dit een interessante ervaring. Je weet dat de manier waarop je kennis verwerkt, dingen interpreteert en onthoudt sterk afhankelijk is van je eigen referentiekader en verwachtingen. Het doet me denken aan een uitspraak van Edwards & Mercer (1987, pag.66):

For the participants, the context of any utterance is more a matter of perception and memory - What they think has been said, what they think was meant, what they perceive to be relevant.

Maar dat maakt me uiteraard nieuwsgierig naar hoe Treffers het onderscheid nu oorspronkelijk heeft gedefinieerd. Dan blijkt dat ook Treffers het uitvoeren van berekeningen tot het verticaal mathematiseren rekent. Letterlijk zegt hij:

In het algemeen kan men zeggen, dat de horizontale mathematisering bestaat uit het zodanig schematiseren van het gebied, dat het probleemveld met mathematische middelen aangepakt kan worden. De vervolgaktiviteiten, die betrekking hebben op de mathematische verwerking, de probleemoplossing, de generalisatie van de oplossing en de verdergaande formalisering, worden met de term *vertikale mathematisering* aangeduid. (Treffers, 1978, 79, cursief in het origineel)

De mathematische verwerking is echter een aspect dat bij Treffers weinig nadruk krijgt. Wanneer we kijken naar de manier waarop hij de begrippen 'horizontaal' en 'verticaal' gebruikt om het progressief mathematiseren te karakteriseren, lijkt het verticaal mathematiseren sterk gekoppeld aan niveauverhogingen (fig.1).

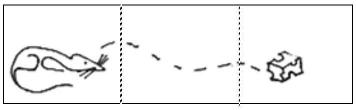


figuur 1: progressief mathematiseren (ontleend aan Treffers, 1987, pag.248)

Ook in de algemene beschrijvingen van mathematiseren staat het aspect van progressie voorop. Zowel Treffers als Freudenthal omschrijven mathematiseren als een organiserende activiteit. Freudenthal doet dit bijvoorbeeld in een eerder artikel waarin hij wiskunde als activiteit typeert:

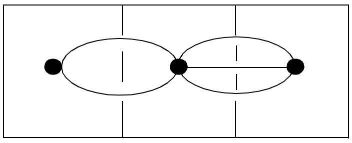
It is an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing subject matter. This can be matter from reality which has to be organized according to mathematical patterns if problems from reality have to be solved. It can also be a mathematical matter, new or old results, of your own or of others, which have to be organized according to new ideas, to be better understood, in a broader context, or by an axiomatic approach.
(Freudenthal, 1971, 413-414).

Het is langs die tweedeling dat ik horizontal en verticaal mathematiseren altijd heb opgevat als het mathematiseren van *subject matter from reality*, tegenover het mathematiseren van *mathematical matter*. Horizontaal mathematiseren staat voor het wiskundig organiseren van een stuk van de ervaren werkelijkheid, terwijl verticaal mathematiseren dan het (verder) wiskundig organiseren van de *eigen* wiskundige activiteit kan betekenen.
Uiteraard is ook het uitvoeren van wiskundige bewerkingen een belangrijke wiskundige activiteit, maar ook dit pleit ervoor om hetgeen wat volgt na het horizontaal mathematiseren uiteen te leggen in twee onderscheiden activiteiten. Ik stel daarom een driedeling voor. Je zou kunnen zeggen dat het uiteindelijk gaat om drie soorten activiteiten:
– het horizontaal mathematiseren;
– het uitvoeren van wiskundige bewerkingen;
– het verticaal mathematiseren in engere zin; het mathematiseren van de eigen wiskundige activiteit.
Laat ik dit toelichten met een voorbeeld. We kunnen hier het probleem van de muis die op verschillende manieren naar de kaas kan (Treffers (1987, pag.41) voor gebruiken (fig.2).



figuur 2: op hoeveel manieren kan de muis naar de kaas?

Om bij de kaas te komen moet de muis door twee schotten, een schot met twee poortjes, en een schot met drie poortjes, en de vraag is: Op hoeveel verschillende manieren kan de muis naar de kaas?
Als eerste stap naar een oplossing zou je een schematische tekening kunnen maken van de mogelijke wegen (fig. 3).



figuur 3: mogelijke routes

Deze stap kunnen we categoriseren als horizontaal mathematiseren. Het probleem kan nu worden opgelost door de mogelijke wegen één voor één te tellen of door de het aantal wegen in het eerste deel van de route (2) te vermenigvuldigen met het aantal mogelijke wegen in het tweede deel (3). Het uitvoeren van de vermenigvuldiging, $2 \times 3 = 6$, valt dan onder 'het uitvoeren van wiskundige bewerkingen'. Het bedenken dat je het tellen kunt vervangen door vermenigvuldigen behoort dan tot het verticaal mathematiseren in engere zin, omdat hiermee de wiskundige activiteit van het tellen wordt gemathematiseerd.
Ik denk dat we hiermee drie essentiële elementen van wiskunde als activiteit te pakken hebben en ik wil deze driedeling gebruiken als structuur voor de rest van mijn betoog.

Voor ik dat doe wil ik nog even stilstaan bij 'wiskunde als activiteit' en opmerken dat je die slogan op verschillende manieren kunt opvatten. De sterk inhoudelijke invulling van Freudenthal verschilt bijvoorbeeld van de wiskunde-als-activiteit opvattingen die onder invloed van het constructivisme in de Verenigde Staten opkwamen (Lampert, 1990). Hier stond de gemeenschap van wiskundigen model en werd de (veronderstelde) *discours* van zuiver wiskundigen als uitgangspunt genomen. Wiskunde als activiteit bestaat in die opvatting met name uit het formuleren van hypothesen en het bekritiseren en/of beargumenteren daarvan.
We zouden kunnen zeggen dat dit vooral een vormkenmerk betreft, maar tegelijkertijd kunnen we opmerken dat dit aspect bij Freudenthal weinig aandacht krijgt. Bij hem staat toch vooral de activiteit van het individu centraal; als hij over interactie spreekt, is dat veelal in dienst van de ontwikkeling van het individu. Een andere opvatting van wiskunde als activiteit is een variant van 'wiskunde leren door wiskunde doen', waarbij de verticale component weinig aandacht krijgt; een benadering van wiskunde als activiteit die daarmee dicht aanligt tegen wat Treffers de 'empiristische stroming' noemt.

3 Horizontaal mathematiseren

Uit het zojuist aangehaalde citaat over organiseren blijkt dat Freudenthal het organiseren van zaken uit de realiteit, ofwel het horizontaal mathematiseren, uitdrukkelijk tot wiskundige activiteit verklaart en op eenzelfde hoogte plaatst als het mathematiseren binnen de wiskunde. Dit is kenmerkend voor zijn visie op wiskunde. Daarmee legt hij de basis voor realistisch reken-wiskundeonderwijs dat geworteld is in het mathematiseren van reële situaties, dat wil zeggen, situaties die de leerling als reëel ervaart; situaties die *experientially real* zijn - om een uitdrukking van Cobb te gebruiken - in de zin dat leerlingen direct weten hoe je daarbinnen op een zinvolle manier kunt handelen en redeneren. En daar willen we met het wiskundeonderwijs op aansluiten. Voor jonge kinderen zullen dat vooral situaties uit de alledaagse (of gefantaseerde) realiteit zijn, voor oudere leerlingen kan ook de wiskunde zelf reëel ervaren situaties verschaffen.
Door ook niet-wiskundige situaties als startpunt voor het mathematiseren te accepteren, creëert Freudenthal de mogelijkheid om in het onderwijs te starten bij een basis die betekenisvol is voor de leerling. Omgekeerd dient in het onderwijs dan wel recht te worden gedaan aan de relatie tussen de reële context en de wiskundige interpretatie van het contextprobleem. Hier bestaat het gevaar dat het vaak voor ons volwassenen zo vanzelfsprekend is welke bewerking er moet worden uitgevoerd, dat het horizontaal mathematiseren nauwelijks aandacht krijgt.
Het MORE-onderzoek (Gravemeijer, e.a., 1993) laat zien dat het hier om een lastige balans gaat, die snel naar de ene - blijven steken in de realiteit van de context - of naar de andere kant - direct doorschieten naar de wiskunde - doorslaat.

Thompson & Thompson (1996) maken in dit verband onderscheid tussen *relational reasoning* en *calculational reasoning*, waarbij de eerste staat voor het redeneren over de relatie tussen het gestelde contextprobleem en de wiskundige bewerking die het antwoord op dit probleem moet geven. De tweede betreft het redeneren over het uitvoeren van de bewerking, los van de context (zie ook Gravemeijer, 2003).
Onderzoek van Van den Boer (2003) laat zien dat *relational reasoning*, in ieder geval in het voortgezet onderwijs, onvoldoende aandacht krijgt. Met als gevolg dat de wiskundeles vooral gaat over wat je moet doen en hoe je het moet doen en nauwelijks over waarom je het (zo) moet doen.

Contextproblemen verworden zo tot redactiesommen, die hun beoogde functie van basis voor het aanboren van de eigen informele kennis van de leerling niet kunnen vervullen.

Dit brengt mij bij een voorval tijdens een bijeenkomst van de toenmalige PA-responsgroep in Lochem. Freudenthal verweet ons - de daar aanwezige PA-docenten rekenen-wiskunde & didactiek - dat we contexten zochten bij de wiskunde die we wilden onderwijzen. In plaats daarvan zouden we, volgens hem, moeten starten bij reële contexten en ons afvragen welke wiskunde daar inzit. Het is een opmerking die me waarschijnlijk is bijgebleven omdat ik niet goed wist wat ik ermee moest. Het punt is duidelijk, er dreigt altijd het gevaar van wat De Lange ooit *dressed-up problems* heeft genoemd. Maar hoe kun je ooit een leergang maken als je niet ook vanuit de leerstof denkt?

Terugkijkend denk ik dat Freudenthal dat ook niet heeft bedoeld, dan zou hij immers ingaan tegen het basisidee van zijn didactische fenomenologie, die aangeeft dat je voor het ontwerpen van onderwijs op zoek gaat naar die fenomenen die met de wiskunde, in casu met het 'gedachteding' dat je op het oog hebt, georganiseerd kunnen worden. Waar hij vermoedelijk op heeft willen wijzen, is dat je als ontwerper altijd iets met bepaalde contexten voor hebt. Wat maakt dat je in het contextprobleem alleen datgene ziet waar jij de contextopgave voor hebt uitgekozen. Maar je moet af en toe ook de bril van de leerling opzetten en je afvragen wat die vanuit hun perspectief met een opgave zou kunnen doen. Goffree e.a. spreken in dit verband van 'sluipwegen', oplossingsmethoden die voor de leerling veel efficiënter zijn dan de mooie redeneringen die wij voor ze in gedachten hadden (Goffree & Buijs, 1989).

Horizontaal mathematiseren is nauw verbonden met het oplossen van contextproblemen, maar hier moet tegenover niet-ingewijden steeds weer benadrukt worden dat contexten in de realistische benadering ook wiskundig van aard kunnen zijn. Wanneer de leerling voldoende wiskunde in zijn of haar bagage heeft, kan de wiskunde zelf ook een betekenisvolle context bieden. Bij 'realistische' en 'contextproblemen' wordt echter maar al te vaak gedacht aan situaties in de alledaagse realiteit. Eenzelfde misverstand doet zich voor bij Freudenthals befaamde uitspraak: 'Mathematics starting and staying within reality' (aangehaald op pag.18). Freudenthal beschouwt 'werkelijkheid' als een mengsel van zintuiglijke ervaringen en interpretaties. Hij koppelt dit aan *common sense*:

> I prefer to apply the term 'reality' to what at a certain stage common sense experiences as real.
> (Freudenthal, 1991, 17)

Daarbij moeten we geen diepe filosofische, fysieke of psychologische betekenis aan 'werkelijk' of 'werkelijkheid' verbinden. Freudenthal doelt hier op een *common sense* betekenis, zoals je - zonder er verder bij na te denken - over de werkelijkheid spreekt. Deze werkelijkheid beperkt zich niet tot de fysieke werkelijkheid om ons heen, maar omvat ook mentale activiteiten en mentale objecten. Zo opgevat kan iemands werkelijkheid onbeperkt groeien. Daarmee groeit ook wat als *common sense* wordt opgevat. Wat gezond verstand is voor een wiskundige, zo betoogt hij, is heel wat anders dan wat gezond verstand is voor de man in de straat.

In deze zin moet ook de uitspraak: 'Mathematics starting and staying within reality' worden geïnterpreteerd. Het leren van wiskunde zou door de leerling moeten worden ervaren als het uitbouwen van de als betekenisvol ervaren werkelijkheid; wiskunde leren dient te starten op het niveau van gezond verstand en zou een gezond verstand activiteit moeten blijven, door de groei in wat als zodanig wordt ervaren.

Als een 'terzijde' zou ik hier willen opmerken dat Freudenthal zich in deze beschouwing over realiteit een constructivist toont. Merkwaardig genoeg haalt hij in zijn boek echter scherp uit naar het constructivisme, waarbij met name het idee dat je de objectieve werkelijkheid niet zou kunnen kennen het moet ontgelden. We moeten echter wel bedenken dat hij zijn kritiek schreef in de begintijd van de constructivistische benadering van het wiskundeonderwijs.
Hij had de PME[2]-conferentie van 1987 bijgewoond, die in het teken van het constructivisme stond. Daar werden nogal wat naïeve ideeën gelanceerd. Zo werd er betoogd dat je niet van 'misconcepties' moest spreken, maar van 'alternatieve concepties'; er was immers geen absolute toetssteen waaraan je de juistheid van kennis kon toetsen. Geleidelijk aan zijn deze ideeën vervangen door de gedachte dat je in de praktijk heel goed kunt uitgaan van wat je als realiteit ervaart, precies wat Freudenthal ook voorstelt.
Daar is aan toegevoegd dat je je voor de eindpunten van het wiskundeonderwijs kunt richten op datgene wat de gemeenschap van wiskundigen voor waar houdt en dat je je, voor wat wiskunde is, richt op de werkwijzen van diezelfde gemeenschap.

Wanneer we terugkeren naar het idee van een groeiende werkelijkheid en dat verbinden met het horizontaal en verticaal mathematiseren, zal duidelijk zijn dat de grens tussen die twee niet statisch is, maar in de loop van de tijd verschuift. Wat betekent dat na verloop van tijd het mathematiseren van een probleem in een zuiver wiskundige context, om het voor verdere wiskundige bewerking toegankelijk te maken, tot het horizontaal mathematiseren kan gaan behoren.
Dit maakt dat het onderscheid tussen de *two worlds*, zoals Freudenthal dat maakt, persoons- en tijdgebonden is, zoals hij zelf ook aangeeft. Maar wanneer je er dan ook nog van uitgaat dat:

> Horizontal mathematising may just as often mean a jump from reality to fresh mathematics and vertical mathematising a mere routine, as well as vice versa,
> (Freudenthal, 1991, 101)

dan wordt het onderscheid mijns inziens wel erg moeilijk hanteerbaar. De manier om hieruit te komen lijkt mij om horizontaal mathematiseren te reserveren voor situaties waarin de betrokkene wel wiskundig organiseert, maar niets nieuws inbrengt, terwijl we verticaal mathematiseren (in strikte zin) gebruiken voor die situaties waarin wel iets nieuws om de hoek komt kijken. Zo zou het zó bewerken van een probleem dat het voor wiskundige middelen toegankelijk wordt, gepaard kunnen gaan met het bedenken en gebruiken van een notatievorm die nieuw is voor degene die het probleem aanpakt. Het transformeren bevat in dat geval ook een element van wat ik verticaal mathematiseren (in engere zin) noem.

4 Het uitvoeren van wiskundige bewerkingen

Het ontwikkelen en gebruiken van kennis, vaardigheden en inzichten vormt uiteraard een essentieel onderdeel van het leren van wiskunde. Wiskunde is meer dan een manier van denken, wiskundig handelen vraagt ook dat je beschikt over en overweg kunt met een *body of knowledge*. Om een dergelijk kennisbestand op te bouwen, heb je een langlopend leerproces nodig, een gegeven dat door aanhangers van het 'nieuwe leren' schijnbaar niet wordt onderkend, of het nu 'Ieder-wijs' scholen of 'scenario vier' in de plannen voor de nieuwe onderbouw van het voortgezet onderwijs betreft. Freudenthal benadrukt juist deze langlopende leerprocessen. Bij het bespreken van langlopende leerprocessen haakt hij in op een bekende tegenstelling in discussies over wiskundeonderwijs: begrip en inzicht tegenover routines, procedures en inoefenen. Hij betoogt in dit verband dat er meer met inzicht wordt geleerd dan we geneigd zijn te denken. Het probleem is dat de lerende het leerproces vergeet wanneer het doel van dat leerproces eenmaal is bereikt. Nieuwe vaardigheden worden, zo niet geoefend, dan toch in ieder geval beoefend. Met als gevaar dat de oorspronkelijke bronnen van inzicht verstopt raken en onbereikbaar worden. Inzichtelijk leren heeft niet zoveel zin, stelt Freudenthal, wanneer dit alleen de fase van het verwerven betreft. Het inzicht nu dat dient te worden vastgehouden, dreigt door het oefenen verloren te gaan. Of in de woorden van Freudenthal (1991, pag.112) zelf:

> What is crucial, is
> – retention of insight,
> which is gravely endangered by drill, that is
> – premature training,
> – too much training,
> – training as such.

De manier om de bronnen van het inzicht open te houden is volgens hem ervoor te zorgen dat de leerling reflecteert op het leerproces. Hij maakt daarbij een interessant uitstapje naar 'bewijzen', door op te merken dat je altijd dingen bewijst die vanzelfsprekend zijn. Je probeert pas iets te bewijzen wanneer je voor jezelf weet dat het waar is. Maar in het reken-wiskundeonderwijs doen we dat eigenlijk nooit. Neem bijvoorbeeld het rekenen met nullen.

> Many children and adults can tell you that in order to multiply by 100 you have to add two zeros (which is only true for whole numbers) yet most of them cannot explain why. Even worse: most of them don't even understand that the matter can be argued and why this should be done. Did they learn such rules by rote? I don't believe so. I have observed too many children applying such rules intuitively before they were verbalized and formally taught at school. Rather then being taught the rules, they should have been taught to argue their intuitions, to reflect on what appears to be obvious. But this requires more patience than teachers can afford.
> (Freudenthal, 1991, 113).

Maar mogen we dan helemaal niet meer oefenen? Het gevaar van oefenen is, volgens Freudenthal, dat oefenen het behouden van inzicht bedreigt. Het alternatief is volgens hem oefenen dat is geïntegreerd met inzichtelijk leren, waarin ieder stapje weer iets aan het inzicht toevoegt. Als voorbeeld geeft hij de afwisseling van eigen constructies en eigen producties in het onderzoek van Streefland. Interessant is dat de wiskundige Van der Vorst (persoonlijke mededeling) oefenen binnen zijn eigen werk ook omschrijft als een vorm van exploreren. Op die manier kun je oefenen en inzichtelijk leren inderdaad aan elkaar koppelen. Zelf leg ik graag de relatie met een situatie waar ik oefenen zinvol vind, zoals bijvoorbeeld bij (leren) schaatsen. Het oefenen heeft hier niet het karakter van blind inslijpen, maar van al experimenterend verbeteren; je probeert uit te vinden wat je moet doen om je slag prefect te krijgen. En wanneer je meent een verbetering gevonden te hebben, probeer je die vast te houden, door te gebruiken wat je denkt geleerd te hebben. Oefenen gaat in dat geval continu gepaard met denken. Dat zou mijns inziens het model voor oefenen moeten zijn en ik vermoed ook dat het dat is wat Freudenthal bedoelt.[3]

Freudenthal breidt dit openhouden van de bronnen van inzicht uit tot het leerproces zelf. Hij redeneert dat wanneer leerprocessen zo belangrijk zijn dat ze moeten worden vormgegeven als geleid heruitvinden, het doel toch niet kan zijn dat ze vervolgens weggedrukt worden door de producten die ze voortbrengen. Leerprocessen zijn op zichzelf waardevol, maar dan moeten ze wel onthouden worden. Er zijn maar weinig mensen die zich herinneren hoe ze wiskunde hebben geleerd, aldus Freudenthal. Er zijn ook mensen die een leerproces kunnen reconstrueren zoals dat zou zijn verlopen wanneer het een proces van heruitvinden zou zijn geweest. Voor die mensen klopt het gezegde: 'Eerst leren, dan begrijpen'. Maar zo vraagt hij zich af, geldt dat ook voor de rest? Een retorische vraag. Zijn antwoord luidt, dat die mensen meer gediend zijn met geleid heruitvinden - mits ze er iets van onthouden. Wat daarvoor nodig is, is reflectie. Zo wordt het onthouden van heruitvindprocessen volgens hem bevorderd, door ingebouwde reflectiemomenten, door te verbaliseren en door te communiceren zowel met de leerkracht als met medeleerlingen.

De focus op processen blijkt ook wanneer de doelen van het wiskundeonderwijs worden besproken. (Freudenthal, 1991, pag.49-55). Wanneer je wiskunde als activiteit definieert, dan is het doel ook een activiteit, is Freudenthals redenering. De leerlingen moeten niet zozeer wiskunde uitvinden, maar mathematiseren en, in het verlengde daarvan, leren abstraheren, schematiseren, formaliseren, algortimiseren, verbaliseren enzovoort. Dit betekent niet dat hij kennis en vaardigheden onbelangrijk vindt:

> If the learner is guided to reinvent all this, then valuable knowledge and abilities will more easily be learned, retained, and transferred than if imposed.
> (Freudenthal, 1991, 49).

Het lijkt hem echter niet wenselijk die als doelen vast te leggen. Hij beschrijft de leerstof daarom als het gebied waarin het heruitvinden plaatsvindt. In dezelfde lijn wijst hij er in zijn ‘Didactische fenomenologie’ (Freudenthal, 1984, pag.223-225) op, dat veel reken-wiskundemethoden ten onrechte genoegen nemen met het eenmalig uitvoeren van de beslissende stappen in het leerproces. De resultaten van zulke stappen worden wel herhaaldelijk geoefend, maar de stappen zélf zouden onderwerp van herhaling moeten zijn. In het gunstigste geval wordt de laatste stap herhaald wanneer er iets misloopt met het automatisme. Maar ook dit is, zo benadrukt hij, onvoldoende. Het is de weg van inzichtelijkheid naar automatisme die moet worden herhaald om bekwaamheid te waarborgen.

5 Het mathematiseren van de eigen wiskundige activiteit

Het verticaal mathematiseren in engere zin, het mathematiseren van de eigen wiskundige activiteit (of die van anderen), is verantwoordelijk voor de groei van de wiskunde. Hoe ziet dat proces er volgens Freudenthal uit?
Hij zoekt de oorsprong van wiskunde in *common sense*. Hij wijst er in dit verband op dat dezelfde wiskunde, anders dan de andere exacte wetenschappen, op verschillende plaatsen is uitgevonden. De natuurkunde had figuren als Newton en wetenschappelijke revoluties nodig om verder te komen, de wiskunde niet.
Merkwaardig genoeg geldt voor de meeste mensen dat, hoewel ze ervan overtuigd zijn dat wiskunde gebaseerd is op *common sense*, niets hen er zo ver van verwijderd lijkt. Hij probeert deze paradox op te lossen met behulp van een analyse van het continue karakter van de ontwikkeling van de wiskunde.

Waar komt het zo te zien continue karakter van de ontwikkeling van de wiskunde vandaan? Wel, om wiskunde te worden moest *common sense* gesystematiseerd en georganiseerd worden. *Common sense* ervaringen werden samengebracht in regels, en die regels werden weer common sense van een hogere orde, enzovoort. Hij neemt de natuurlijke getallen als voorbeeld.

De getallenrij vindt zijn oorsprong in een taalvorm, gebruikt voor het tellen en verkrijgt zo inhoud, een rijk gevarieerde inhoud. Wanneer van deze variatie geabstraheerd wordt, krijgen getallen de status van mentale objecten, min of meer formele getallen die nog verbonden zijn met tellen van dingen. Optellen en aftrekken komen tevoorschijn als betekenisvolle operaties die voorbereiden op het meer formele optellen en aftrekken, dat eerst nog wordt ondersteund door modellen die een inhoudelijke oorsprong hebben. Commutativiteit komt voort uit de inhoudelijke betekenis van optellen en verandert vervolgens in een formele regel die op een hoger niveau weer inhoud wordt. En zo gaat het maar door - een eindeloze afwisseling van vorm en inhoud.
Deze dualiteit verklaart, volgens Freudenthal, de afstand tussen *common sense* en wiskunde die uiteindelijk in veel gevallen ontstaat:

> Content must be assimilated, while form can be imitated for the purpose of reproduction. (Freudenthal, 1991, 11)

Algoritmen kunnen worden aangeleerd en concepten kunnen worden overgedragen met behulp van talige definities, en dat is wat in veel gevallen gebeurt. Zo ontstaat dan het beeld van wiskunde als een verzameling van algoritmen en definities., met de bekende moeilijkheid wanneer meer flexibiliteit wordt gevraagd. Hij sluit dit betoog af met de constatering dat wiskunde noch als vorm noch als inhoud moet worden onderwezen, maar dat in plaats daarvan de wisselwerking tussen die twee recht gedaan moet worden in wiskunde als activiteit. Een activiteit die hij uiteindelijk karakteriseert als ‘organiseren’.

In het voorgaande zien we hoe de ontwikkeling van de wiskunde door Freudenthal wordt opgevat als een proces waarin steeds nieuwe wiskundige objecten worden gevormd, waarmee een nieuwe realiteit ontstaat die weer onderwerp van reflectie wordt. In het leren van wiskunde mag je dan vergelijkbare niveaus verwachten. Hij gaat in dit verband uitgebreid in op de niveautheorie van Van Hiele (waarbij hij veelal spreekt van de Van Hieles). Terugblikkend op zijn eigen beschrijvingen van deze niveautheorie constateert hij een verandering in beschrijving. Van:

> The learner’s operational matter on the lower level becomes his subject matter on the higher level,

naar:

> The learner’s lower level activity becomes an object of analysis to him at the higher level, or in other words: on the next level this activity is made conscious and can become subject matter of reflection. (Freudenthal, 1991, 98).

Hij constateert dat het verschil tussen de twee beschrijvingen is, dat de tweede aangeeft hoe de niveauverhoging plaatsvindt, namelijk door reflectie. In de loop van de tijd is hij zich bewust geworden van het belang van reflectie. Reflectie is karakteristiek voor het wiskundig denken, met name waar het gaat om de wisselwerking tussen vorm en inhoud.
Reflectie ziet hij dan ook als een krachtige motor voor wiskundig uitvinden, wat consequenties heeft voor *guided reinvention*; ‘the guide should provoke reflective thinking’ (Freudenthal, 1991, pag.100). Hij haalt een eigen citaat uit 1979 aan waarin hij stelt, dat wanneer je ervan uitgaat dat construeren voorafgaat aan bewijzen, er een tussenstadium moet zijn, en dat is reflecteren. Er is dus sprake van een opeenvolging: construeren, reflec-

teren, bewijzen. In het onderwijs moet de leerkracht daarvoor zorgen:

> Teachers (or peers in learning groups) need to insist on justification of what appears to be new knowledge or new procedures, thereby requiring the inventor to reflect on what he - consciously or unconsciously - performed.

We zouden kunnen zeggen dat Freudenthal hier verwijst naar het 'didactisch contract' (Brousseau, 1983) of de *social norms* (Yackel & Cobb, 1996) die een voorwaarde zijn voor realistisch reken-wiskundeonderwijs volgens het principe van *guided reinvention*. In het onderwijs is altijd sprake van een rolverdeling tussen leraar en leerlingen, die is gebaseerd op onderlinge verwachtingen en gepercipieerde verplichtingen. En hoewel deze verwachtingen en verplichtingen vaak niet worden vastgelegd of zelfs besproken, hebben ze wel een zodanige invloed op de interactie dat er gesproken kan worden van een impliciet contract.

Essentieel is nu dat het didactisch contract van realistisch reken-wiskundeonderwijs er heel anders dient uit te zien dan in het algemeen gebruikelijk is. In het traditionele reken-wiskundeonderwijs vormen de leerkracht en het leerboek het referentiepunt voor het handelen van de leerling.

De leerlingen mogen dan ook van de leerkracht verwachten dat hij of zij goed uitlegt. Omgekeerd verwacht de leerkracht van de leerlingen dat ze zich inspannen deze uitleg te volgen en na te volgen. In het realistische reken-wiskundeonderwijs worden de leerlingen geacht zelf oplossingen te bedenken en deze te kunnen verdedigen. De norm zou moeten zijn, dat ze hun oplossingen uitleggen, deze onderbouwen, proberen de oplossingen van anderen te begrijpen, zonodig om opheldering te vragen of de oplossing ter discussie te stellen. De rol van de leerkracht is om geschikte problemen voor de leerlingen te kiezen, vast te stellen welke wiskunde er aan de orde is en deze in klassengesprekken aan de orde te stellen en deze klassengesprekken op een productieve manier te leiden. Ten slotte blijft de leerkracht ook de autoriteit als het gaat om de vraag wat wiskunde is en hoe wiskunde (in deze klas) geleerd wordt.

Onderzoek laat zien dat het voor het invoeren van dergelijke normen niet voldoende is leerlingen de nieuwe regels mee te delen. Ze moeten ook ervaren dat het loont hun gedrag te veranderen. Aan concrete gebeurtenissen moet worden toegelicht wat er nu wel en wat er niet van hen verwacht wordt.

Dergelijke normen vragen dat de leerlingen ook een wiskundige belangstelling ontwikkelen, waarbij wiskunde ook een doel op zichzelf is. Freudenthal lijkt dit niet zo belangrijk te vinden voor het onderwijs, zijn argument is dat het wiskundeonderwijs een veel grotere groep omvat dan alleen diegenen die voor wiskunde als doel op zich zullen kiezen. Wel noemt hij het een belangrijke en onmisbare motor voor de ontwikkeling van de wiskunde. Het lijkt mij dat deze motor in het onderwijs net zo onmisbaar voor de ontwikkeling van de wiskunde is als in de wiskunde zelf. Mij dunkt dat *guided reinvention* net zo goed als *invention* een motief nodig heeft. In dit verband wordt tegenwoordig wel gesproken van *mathematical interest*. We kunnen dit contrasteren met wat we een pragmatische interesse zouden kunnen noemen.

Kenmerkend aan realistische contextproblemen is dat er een reden is om het probleem op te willen lossen. Op z'n minst moet de leerling zich kunnen verplaatsen in iemand die in het antwoord is geïnteresseerd. Anders gezegd, het antwoord is nuttig voor iemand en het motief is pragmatisch. Om verder te komen in de wiskunde is het echter noodzakelijk dat er niet alleen praktische problemen worden opgelost, maar dat de oplossingsmethode en de wiskunde die daarachter steekt onderwerp van onderzoek wordt. Zonder wiskundige interesse blijft de behoefte tot verticaal mathematiseren beperkt. De vraag of (en hoe) we zeker (kunnen) zijn van het antwoord, kan in een praktische context nog wel aan de orde komen, en ook het verkorten is wel pragmatisch te motiveren, maar het formaliseren, generaliseren en bewijzen dat die generalisaties gegrond zijn, komen niet direct naar voren uit de behoefte een concreet probleem te beantwoorden.

Om progressief mathematiseren echt een activiteit van de leerlingen te laten zijn, zullen we er dus voor moeten zorgen dat ze een mathematische interesse ontwikkelen. Centraal staat echter dat de leerlingen gemotiveerd worden in het beantwoorden van vragen die niet direct een praktische betekenis hebben.

Dat wil zeggen dat we willen dat ze gaan nadenken over vragen die de wiskunde zelf betreffen. Onderwijsexperimenten die we in Nashville uitvoerden, lieten zien dat leerlingen daarvoor zijn te motiveren wanneer ze ervaren dat hun inspanning op dit gebied wordt beloond.[4]

Die beloning moet primair komen van de leraar die:

– laat merken daadwerkelijk geïnteresseerd te zijn in het denken van de leerling;
– ervoor zorgt dat de bijdragen van de leerlingen op dit gebied ook daadwerkelijk een rol gaan spelen in het onderwijsleerproces.

Het onderwijsleerproces heeft in zeker opzicht het karakter van een spel, waarbij de leraar de spelregels bepaalt. In het algemeen willen de leerlingen meespelen; ze staan niet graag buitenspel. De leraar heeft daarmee een instrument in handen om de participatie van leerlingen te sturen. Waar leerlingen wel of niet aan meedoen, wordt in belangrijke mate bepaald door de leraar. Dat geldt ook voor het nadenken over wiskundige vragen.

6 Besluit

In de inleiding sprak ik van het 'herlezen' van Freudenthals 'Mathematics Education Revisited, maar zo simpel was het niet - het was meer studeren, omdat ik me ervan wilde vergewissen dat ik zijn ideeën goed weergaf. Wat het boek dan lastig maakt is dat, het er soms op lijkt dat Freudenthal meer zijn eigen gedachtenlijn volgt dan dat hij zich in de lezer verplaatst. Daarbij introduceert hij af en toe begrippen, waar hij wel een heel betoog over houdt, maar niet van vertelt wat hij er precies onder verstaat. Verder is het onmogelijk zo'n boek in enkele bladzijden recht te doen.

Ik heb me uiteraard moeten beperken. Bij mijn keuzen heb ik mij laten leiden door de door mij gemaakte driedeling van 'wiskunde als activiteit' in horizontaal mathematiseren, het uitvoeren van wiskundige bewerkingen en het verticaal mathematiseren in engere zin.
Daarmee heb ik ook veel waardevols onbesproken gelaten. Ik hoop echter dat het voorgaande de lezer voldoende aanleiding geeft om het boek (weer eens) ter hand te nemen.

Noot

1 Hierbij mag echter het artikel dat Buys (1991) aan dit boek heeft gewijd niet onvermeld blijven. Hij gaat daarbij uitgebreid in op de relatie die Freudenthal legt tussen wiskunde en gezond verstand.
2 PME staat voor Psychology of Mathematics Education.
3 Voor de duidelijkheid moet worden opgemerkt, dat de metafoor van de schaatser zijn beperkingen heeft. Een schaatser kan zo'n geïntegreerd proces heel goed zelf sturen, in het reken-wiskundeonderwijs zullen de leerlingen daar begeleiding bij nodig hebben.
4 Dit betreft een onderwijsexperiment rond statistiek in de eerste twee leerjaren van het voortgezet onderwijs dat werd uitgevoerd door P. Cobb, K. MacClain, C. Konold en ikzelf (zie ook Gravemeijer, 2002).

Literatuur

Boer, C. van den (2003). *Als je begrijpt wat ik bedoel. Een zoektocht naar verklaringen voor achterblijvende prestaties van allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs.* Utrecht: CD-β Press.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistémologiques et les problèmes en didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 164-197.

Buys, K. (1992). Het wiskundeonderwijs nogmaals bezien. In: M. Dolk (ed.). *Rekenen onder en boven de tien.* Utrecht: HMN/FEO & Freudenthal Instituut, 9-19.

Edwards, D. & N. Mercer (1987). *Common Knowledge: the development of joint understanding in the classroom.* London, Methuen.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 413-435.

Freudenthal, H. (1984). *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren 1*. Utrecht: OW&OC.

Freudenthal, H. (1979). How does Reflective Thinking Develop? *Poceedings Conference IGPME,* Warwick.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education, China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (2002). De context van de interactie. In: R. Keijzer & W. Uittenbogaard. (eds.) *Interactie in het rekenwiskundeonderwijs.* Utrecht: Freudenthal Instituut, 61-76.

Gravemeijer, K. (2003). Betekenisvol Rekenen. *Willem Bartjens, 22*(4), 5-8.

Gravemeijer, K., M. van den Heuvel-Panhuizen, G. van Donselaar, G., L. Streefland, W. Vermeulen, E. te Woerd & D. van der Ploeg (1993). *Methoden in het reken-wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek.* Utrecht: CD-β Press.

Goffree, F. & K. Buys, (red.). (1989). *Tegengesteld, wiskundedidactiek op de grens van basis en voortgezet onderwijs, toegespitst op negatieve getallen*. Baarn: Bekadidact.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and when the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research journal, 27,* 29-63.

Thompson, A.G. & P.W. Thompson (1996). Talking about rates conceptually, part II: Mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 29,* 121-142.

Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht*. Utrecht: IOWO (proefschrift).

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions, A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction - The Wiskobas Project.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Yackel, E. & P. Cobb (1996). Sociomath norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458-477.

In his last book 'Mathematics Education Revisisted', Freudenthal reviews, reconsiders, and refines his personal ideas on mathematics education. 'Revisting' this book after more than a decade the author investigates what Freudenthal writes about mathematics as an activity. The starting point for this investigation is found in the distinction Treffers makes between horizontal and vertical mathematising. The author argues for adding a third category, 'carrying out mathematical procedures', while at the same time restricting the concept of vertical mathematising to 'mathematising one's own mathematical activity'. These three categories then are taken as a structure for describing and discussing Freudenthal's thoughts on mathematics as an activity. In doing so, the author limits himself to this theme, while leaving out of account all other topics that Freudenthal addresses in this book.

Professor Freudenthal op de Pedagogische Academie

Fred Goffree & Huub Jansen

Het is 1976. Professor Freudenthal is nu vijf jaar hoogleraar-directeur en medewerker van het IOWO als hij zich gaat interesseren voor het ontwikkelwerk op de Pedagogische Academie (PA). Zijn interesse gaat al spoedig over in deelname en inzet. Twee dagen per week rijdt hij met H. Jansen en F. Goffree mee naar Gorinchem en omliggende plaatsen, waar leerscholen van de PA zijn gesitueerd. Hij discussieert met studenten en docenten in de wiskunde- en didactieklessen op de PA; op de leerscholen begeleidt hij studenten bij hun werk met kinderen van de basisschool. Niet zelden voert hij zelf ook leergesprekken met de kinderen. Vervolgens wordt een en ander tijdens de lunch of op de terugweg geanalyseerd en nabesproken. Freudenthal is een nieuweling in het PA-wereldje, maar voelt zich van meet af aan als een vis in het water. In de gesprekken met docenten, studenten en leerlingen kan hij praktisch en theoretisch zijn didactische denkwerk kwijt. De Egmond-conferentie van oktober 1976 is in dezelfde geest ingericht.
In dit artikel komt het PA-ontwikkelwerk op alle genoemde niveaus in beeld. Als er ook enige afstand genomen wordt ziet de lezer enkele belangrijke principes, hier aangeduid als '5 big ideas van Freudenthal', totstandkomen. In het slotwoord wordt de bijdrage van Freudenthal aan de lerarenopleiding nog eens in een breder perspectief geplaatst.

1 Egmond Conferenties

Sinds 1969 werden in het kader van het Wiskobasproject jaarlijks conferenties georganiseerd voor de docenten rekendidactiek van de Pedagogische Academies. In latere jaren gingen ook hun collega's, pedagogiekdocenten, aan deze conferenties deelnemen. In het conferentieverslag van de Egmond-conferentie in 1976 met als titel '20 gevallen van stagebegeleiding' wordt een ontwikkeling zichtbaar. Een ontwikkeling die begint met nieuwe inhouden - 'New Math!' - en via nieuwe opleidingsdidactische werkvormen en gesprekken met kinderen voerde naar de essenties van de onderwijzersopleiding.
Freudenthal was bij al deze conferenties betrokken, vanuit de gedachte dat ook PA-docenten betrokken dienden te worden bij de ontwikkelingen van het reken-wiskundeonderwijs. Zelf had hij een Pedagogische Academie nooit eerder bezocht. Dit veranderde in 1976, het jaar van de laatstgenoemde conferentie. Als hij in de zomer van 1977 het voorwoord schrijft voor het omvangrijke en verlate conferentieverslag van Egmond '76, heeft hij een jaar van bezoeken, twee dagen per week, op de Pedagogische Academie Juliana van Stolberg in Gorinchem, achter de rug.
Laten we eens lezen wat hij schrijft over deze conferentie, waar PA-docenten de opdracht krijgen in groepjes van vier één Gorcumse PA-student te begeleiden bij het voorbereiden en vervolgens geven van een les aan basisschoolleerlingen uit Egmond aan Zee.

Egmond 1976

Woord vooraf

Een jaar van nuttig besteed emeritaat. Onder meer besteed op de PA Gorcum en de oefenscholen daarvan. Ik heb in dat jaar iets geleerd dat ik trouwens al vermoedde: dat de PA het zenuwknooppunt, het moeilijkste probleem, maar ook de meest belovende uitdaging van ons Nederlandse onderwijs is.
Van alle IOWO manifestaties, die ik heb meegemaakt, zal Egmond 1976 mij het langste heugen. Een toppunt waarvan ik me afvraag of ik het ooit overtroffen zal zien. Een scherp gestruktureerd gebeuren, maar dan een rijke struktuur, rijk invulbaar en rijk ingevuld. De hoofdmoot, in 20 stroompjes verdeeld, een stuk onderwijs op de PA. Niet echt natuurlijk. Of veel meer dan echt. Een beeld van onderwijs, niet zoals het is, maar zoals het zou kunnen, zou moeten zijn, en met aksenten, anders gelegd dan je echt zou doen, om te beklemtonen waar het op aankomt.
Je stuurt een student PA naar een oefenschool, niet met de opzet dat de kinderen iets van hem leren, maar dat hij iets van de kinderen leert (en ook nog iets van de mentor).
In het didaktisch gebeuren in Egmond waren er drie soorten acteurs: kinderen, studenten, begeleiders.
Misschien hebben de Egmondse kinderen er iets bij opgestoken, wellicht ook de Gorcumse studenten. Maar begonnen was het om de begeleiders, om het opdoen van ervaringen in en met de didaktische processen die zich daar af zouden spelen.
Of was de meest begunstigde het IOWO-team, dat iets te weten wilde komen hoe een struktuur funktioneert, hoe gevarieerd ze kan worden ingevuld en wat de invulling openbaart omtrent de onderwijs-leer-processen van allen die erbij betrokken zijn?

Hans Freudenthal

Opgemerkt moet worden dat de auteur in de Wiskobas-kring, op de PA te Gorinchem, in de oefenscholen en in de auto op de *A*27 tussen Utrecht en de Alblasserwaard altijd met professor werd aangesproken. Als er 'over' hem werd gesproken, was het Freudenthal. En als iemand 'Hans' zei, was hij het zelf. Op die ene keer na, vlak voor de sluiting van zijn instituut en op zijn 75ste verjaardag (17 september 1980), toen alle IOWO-medewerkers een bijdrage leverden aan het boekje 'Kijk op Hans'. Tot die tijd en ver daarna, was het 'professor'. Zoals E. de Moor het eens zei: 'Eigenlijk is zijn voornaam gewoon 'professor'. In wat volgt, wordt zorgvuldig met 'professor Freudenthal' omgegaan.

2 Professor Freudenthal als deelnemer

Het 'gebeuren', waarin professor Freudenthal een rol speelt, is getiteld 'Jan, een blijspel in zes bedrijven'. W. Uittenbogaard (PA Alkmaar), H. Gritter (PA Leeuwarden) en T. Hendriks (secretaris van de Innovatie Commissie Opleidingen) zijn de andere begeleiders van student Jan (fig.1).

figuur 1: de vier begeleiders van Jan

Ze kiezen uit de aangereikte werkbladen het blad met een kubus. Daarmee moet Jan een lesje gaan geven aan vier meisjes (tien en elf jaar) van de St. Jozefschool uit Egmond. Jan schrikt, want hij weet zelf niet goed hoe hij een kubus moet beschrijven. W. Uittenbogaard legt hem uit hoe het zit met een kubus. Aan didactiek komt hij nauwelijks toe, maar hij geeft wel het goede voorbeeld.
's Middags gaat het gebeuren. De meisjes (uit de klassen 4 en 5) komen er onder leiding van Jan zelfs toe om van een gegeven kubus een grotere kubus te maken en het aantal daarvoor benodigde blokjes te noemen. Als Jan na een half uur niet meer weet hoe hij verder moet, neemt Uittenbogaard het van hem over. Hij maakt van de kubusbouwsels huizen die geverfd moeten worden.

Dan mag ook professor Freudenthal iets nieuws aansnijden. Hij toont de leerlingen een draadmodel van de kubus en vraagt: 'Hoeveel hoekpunten?' In koor wordt geroepen: 'Acht!' En hoeveel ribben komen in elk hoekpunt samen? 'Drie!' 'Dat zijn dan 24 ribben, niet waar? 8 × 3. Maar hoeveel zijn er echt?' 'Twaalf.' Hoe kan dat nou? Marieke, een van de meisjes, hoeft daar niet lang over na te denken: 'Dubbel geteld'.

Tot zover de eerste bedrijven van dit 'blijspel'. Er resten nog twee, waarin eerst de begeleiders het gebeuren nabespreken en vervolgens het gesprek met Jan evalueren.
De manier van werken in zo'n begeleidingsgroepje, observeren, meepraten, meedenken en af en toe een bijdrage leveren aan de voortgang, is Freudenthal op het lijf geschreven. Geen hoogdravende toespraken vanuit de wetenschap, maar iemand die de tijd neemt met anderen te reflecteren op hetgeen zich heeft afgespeeld. Met deze kennis dient dit verhaal gelezen te worden. Het gaat over onze ervaringen met Freudenthal op de PA te Gorinchem in het schooljaar 1976-'77. Uit de verslagen van het werk op de PA én in de oefenscholen, hebben we een selectie gemaakt van de bijdragen van Freudenthal waarvan er nu nog sporen zijn te vinden. We zijn gaan spoorzoeken om herinneringen aan dat jaar op te halen.

3 De onderwijzersopleiding in de jaren zestig en zeventig

Vóór we verslag doen van dit spoorzoeken, blikken we terug op de onderwijzersopleiding uit de tijd vóór professor Freudenthal erbij betrokken werd.

In de oude kweekschool stond het vak rekenen op het lesrooster. Een vak zonder veel aandacht voor de rekendidactiek in de toenmalige lagere school, want dit behoorde tot het werkterrein van de leraar pedagogiek. Oude rekenboeken voor de onderwijzersopleiding geven nog een beeld van de inhoud van het vak: veel aandacht voor vaak lastige rekenopgaven, rekenen met breuken, kenmerken van deelbaarheid, grootste gemene delers, kleinste gemene veelvouden en vooral ook voor rekenopgaven die de leerlingen in toelatingsexamens voor het voortgezet onderwijs moesten oplossen. Oudere lezers zullen zich voorbeelden uit die mooie rekentijd herinneren.
Dit veranderde eind jaren zestig toen kweekscholen Pedagogische Academies werden en het vak rekendidactiek in het rooster werd opgenomen. Een nieuw vak, maar nog zonder leerboeken en leraren, met als gevolg dat het oude kweekschoolrekenen nog lang de inhoud van dat nieuwe vak 'rekendidactiek' bleef bepalen. Een bijkomend, maar belangrijk probleem was de situatie van de leraren die aan dit nieuwe vak vorm en inhoud moesten geven. Die hadden, behalve een wiskundeopleiding, vaak wel ervaring met het vak rekenen in de lagere school, maar het nieuwe

opleidingsvak rekendidactiek stelde andere eisen. Bovendien waren deze opleidingsdocenten vaak eenlingen die zonder veel steun een nieuw wiel moesten uitvinden. Deze situatie veranderde toen het eerste leerboek rekendidactiek voor de nieuwe opleiding op de markt verscheen en de vernieuwingsbeweging Wiskobas landelijk verspreide werkgroepen oprichtte en jaarlijkse conferenties ging organiseren waar nagenoeg alle PA-docenten rekendidactiek aan deelnamen.

4 De actoren anno 1976

F. Goffree, een van de auteurs van dit verhaal, begon als leerling van de Hervormde Kweekschool te Amsterdam in het jaar van de Nieuwe Kweekschoolwet (1952). Hij werd onderwijzer in Hengelo (O) en in 1959 leraar aan de Rijkskweekschool aldaar. Hij bleef er tien jaar en schreef in die periode ‘Rekenen en Didactiek’, waarin een poging werd gedaan om de oude rekenkunde en de nieuwe rekendidactiek tot elkaar te brengen. In 1969 begon zijn carrière als medewerker van Wiskobas, daartoe uitgenodigd door E. Wijdeveld, die eerder ook als kweekschoolleraar werkzaam was geweest.

De andere auteur - H. Jansen - begon zijn onderwijsloopbaan op een lagere school in Kattenburg, een echte Amsterdamse volkswijk. Na een aantal jaren wiskundeleraar op een ULO en daarna op een lyceum te zijn geweest, werd hij leraar rekendidactiek op de Gemeentelijke Amsterdamse Kweekschool, de school waar hij ooit als kwekeling begon. Na nog een korte baan aan de Utrechtse Rijkskweekschool werd hij in 1972 medewerker van het IOWO en lid van het Wiskobasteam.

Freudenthal had tot de start van ‘zijn’ IOWO in de totaal andere wereld van wiskundigen verkeerd. Wel had hij al diverse keren van zijn belangstelling voor didactische zaken blijk gegeven. Zo verschenen in ‘De Groene Amsterdammer’ verschillende artikelen (columns) over onderwijs in het algemeen en het leren van (zijn) kinderen in het bijzonder. In de jaren vóór 1959 had hij, samen met professor Langeveld, destijds een bekende pedagoog, het echtpaar Van Hiele begeleid bij hun promotiestudie op het gebied van de wiskundedidactiek. De titel van het proefschrift van P. van Hiele was: ‘De problematiek van het inzicht, gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkundeleerstof’ en van het proefschrift van D. van Hiele-Geldof: ‘De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.’

Ver daarvoor, tijdens de Tweede Wereldoorlog, maakte hij een begin aan een boek dat ooit ‘rekendidactiek’ had moeten heten. Na de oorlog nam hij actief deel aan de Wiskundewerkgroep van de WVO (100 jaar wiskundeonderwijs). Toen hij in september 1976 zijn opwachting in de PA maakte, was zijn eerste grote onderwijskundige werk ‘Mathematics as an Educational Task’ (1973) al verschenen en zijn tweede ‘Weeding and Sowing’ (1978) in de maak.

5 Vijf *big ideas* van Freudenthal

In het schooljaar 1975-’76 experimenteerden Goffree en Jansen als onderwijsontwikkelaars met de ontworpen PA-blokken in de eerstejaarsklassen in Gorinchem. Dit in samenwerking met de reken-wiskundedocenten, vanaf die tijd ‘wiskunde- & didactiekdocenten’ genoemd: J. Keijnemans (wiskunde), J. Bosch (pedagogiek) en J. Ritsema (wiskunde). Met hen én met het materiaal dat in het voorgaande jaar was ontwikkeld, gingen zij in september 1976 in de nieuwe eerstejaars PA-klas (fig.2) en in de oefenscholen van de studenten aan de slag.

figuur 2: klassefoto jaar 1975-’76

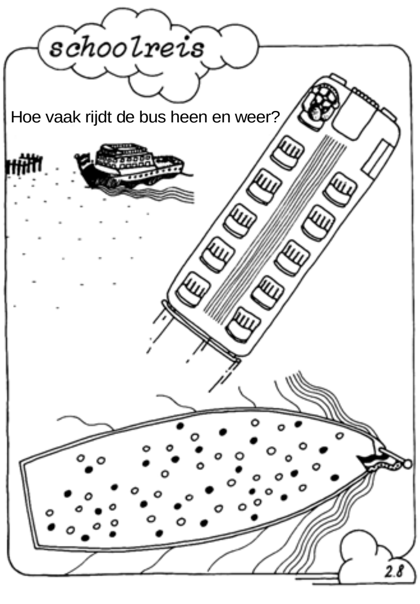
Goffree, die eerder door Freudenthal was aangemoedigd een proefschrift over dit werk op de PA te schrijven, hield met het oog hierop een uitvoerig logboek bij. Uit het deel ‘1976-1977’ is bij het ophalen van herinneringen uit dit bijzondere jaar met groot plezier geput. Om al die ‘korte verhalen’ met enige samenhang weer te geven, hebben we ze gegroepeerd rond vijf ‘*big ideas* van Freudenthal, die ook nu nog bekend zijn in de wiskundig-didactische gemeenschap: de rijke context, concretiseren, de rol van taal in de wiskunde, didactische fenomenologie en gesprekken met kinderen. Om te beginnen gaan we op speurtocht naar zijn gedachten en opmerkingen over het begrip ‘rijke context’.

Rijke context

Dit begrip kwam voor het eerst aan de orde toen we even tevoren in een PA-les over oppervlakte hadden gediscussieerd. We hadden enkele ideeën uit de Wiskobasbesprekingen over oppervlakte uiteengezet; ideeën met een nogal technisch karakter over het vergelijken van de grootte van vier eilanden en het verknippen van een cirkel

in sectoren om er een rechthoek van te leggen.
Freudenthal reageert hierop door het beeld op te roepen van een prachtige, alleenstaande kastanjeboom, in volle bladertooi. Hij nodigt ons uit deze boom te zien als leverancier van zuurstof waar elk blad een eigen bijdrage aan levert. Het geschetste beeld en de gedachte aan 'de groene long' zijn voldoende om de term 'rijke context' zonder verdere toelichting betekenis te geven. Als opleiders en ontwikkelaars kunnen we ons zonder veel inspanning allerlei wiskundige activiteiten met betrekking tot meten, benaderen, tellen en schatten, voor de geest halen. Voor alle duidelijkheid moet hier aan toegevoegd worden dat Freudenthal er zelf nooit een dergelijke microdidactische uitwerking bij gaf. Maar bij andere gelegenheden komt het begrip 'context' wel weer naar voren, vaak vanuit een andere invalshoek of een ander niveau van inzicht. Een tweetal voorbeelden:

1 Aan de lunch in het Gorcumse Piazza Centrum praten we na over de les in de PA. Het begrip 'context' komt ter sprake. Freudenthal betrekt dit op een ander begrip dat hij vaker noemt: wiskundige attitude. Kinderen moeten geneigd zijn de wiskunde zelf betekenis te geven in een hun bekende context, stelt hij. Maar de leraar moet weten dat de context die hij aanbiedt, niet de context hoeft te zijn die de kinderen 'ontvangen'. Een gegeven situatie roept bij een kind misschien een heel andere context op dan de leraar bedoelt en dan ontstaan er misverstanden. Hij geeft nog een aanvulling: kinderen moeten ook leren naar de wiskundige context te kijken en afzien van andere zaken!



figuur 3: boot-busprobleem

2 Lia heeft gewerkt met het boot-busprobleem. Op het werkblad is een grote boot getekend met zwarte en witte rondjes die de jongens en meisjes voorstellen die op de boot meevaren. Er is ook een steiger getekend met een bus erop. Het dak van de bus is doorzichtig, je kunt de banken aan weerszijden van het gangpad zien. De vraag luidt hoe vaak de bus moet rijden om alle kinderen naar de plaats van bestemming te brengen (fig.3). Lia gaat in op de suggestie van een leerling de kinderen als stipjes op de zitplaatsen te tekenen en dan stippen op de boot door te strepen. Een paar leerlingen willen drie kinderen op een bank voor twee personen zetten. Wat te doen? Daar is het beoogde rekenwerk niet op berekend. In zo'n geval, zegt Freudenthal, moet je de contextsituatie naar je hand zetten. Bijvoorbeeld hier: 'Drie op een bank mag niet van de politie'.

Concretiseren

Hoewel Freudenthal zich in de Wiskobasbijeenkomsten niet opstelde als wiskundige, kwam zijn opvatting over het veelbesproken koppel 'concreet en abstract' voor de meeste Wiskobassers als een donderslag bij heldere hemel. Wiskunde, menen velen, is toch het abstracte vak bij uitstek. Zo hadden ook de Wiskobassers het vak wiskunde in hun eigen opleidingen leren zien. In de wiskunde van het voortgezet onderwijs mocht aan (concrete) figuren geen wiskundige bewijskracht worden toegekend. Dat de drie zwaartelijnen in een driehoek door één punt gaan, moest bijvoorbeeld bewezen worden met een scherpe redenering.

En toen kwam Freudenthal op zekere keer met de uitspraak dat hij wiskunde beschouwde als een menselijke activiteit die voor een groot deel bestaat uit concretiseren. Later, in de auto op de *A*27, praten we over wiskunde als abstract vak en onze didactische neiging om te concretiseren. Freudenthal gaat daarop in met een 'kort college' over C. von Neumann, die hij heel hoog schat als wiskundige. Von Neumann schreef het beste didactische werk in de wiskunde, merkt hij op. Het gaat over Riemannse theorie, die door twintigste eeuw-wiskundigen van een 'beledigende helderheid' is genoemd. Ik herinner me de Riemannse vlakken uit mijn studietijd. Freudenthal stelt dat Riemann die niet als didactisch hulpmiddel heeft bedoeld. Juist door dit soort concretiseringen werd zijn werk, onder andere door Weierstrass, geheel terzijde geschoven.
Concretiseren heeft verscheidene uitwerkingen; Freudenthal laat er, vooral als er met PA-studenten en kinderen gewerkt wordt, het een en ander van zien in de volgende herinneringen.

Concreet maken met een voorbeeld
Terug naar de Gorcumse PA. Medio september 1976 zitten we in de oefenschool in Arkel bij het gesprek van de studenten Margo en Karin met vier leerlingen uit klas 4. De studenten proberen de lusabacus uit te leggen. Tijdens een PA-les is het idee geopperd de abacus te gebruiken als kilometerteller in de auto van Fred Flintstone, een populaire televisieserie die zich afspeelt in het 'stenen tijd-

perk'. Dit idee doet het goed. Flintstone beweegt zijn stenen auto met zijn benen voort en op de abacus kan zo gemakkelijk het aantal kilometers worden bijgehouden.
In de nabespreking komt Freudenthal terug op de hulp die Karin gaf toen de kinderen vastliepen op de vraag welk getal vóór 2000 komt. Karin heeft de aftrekking 2000 – 1 onder elkaar laten maken. Dit leidt in de vierde klas, waar het cijferen nog maar pas aan de orde is gekomen, tot problemen. Misschien kun je dat anders uitleggen, zegt professor Freudenthal, bijvoorbeeld door te vragen welk getal voor 100 komt.

Het concrete materiaal
Ook in september, in dezelfde oefenschool. Twee studenten observeren een gesprek van hun PA-docent met vijf kinderen uit klas 5. Ze spelen het spelletje 'Raad mijn getal'. Het wordt snel duidelijk dat het erom gaat de leerlingen een strategie te laten bedenken. De docent probeert de kinderen op het goede spoor te zetten door ze de bordliniaal aan te reiken. Maar er zijn storende materiaalfactoren: er staan geen getallen op de liniaal. Freudenthal komt dan met de suggestie: neem een strook papier en knip steeds het stuk eraf waarop het gezochte getal niet kan staan.

De zakdoek van Freudenthal
Mia, een eerstejaarsstudente, wil haar leerlingen laten uitzoeken hoe ze van een rechthoekig blaadje papier een vierkant kunnen vouwen. Ze geeft ieder een A4'tje. Wie kan er een vierkant vouwen? Een meisje vouwt het vel over de lengte doormidden. Mia: 'Nee, we willen een zo groot mogelijk vierkant. Hoe moet dat nu?'
Ongemerkt zijn ook de begeleiders gaan meepraten. Een jongen uit het groepje vouwt een vierkant 'op het oog'. We kijken wat wantrouwend. Hoe kun je nu weten of dit een vierkant is? Wat weet je van een vierkant? Nee, geen liniaal gebruiken. Niet nodig! Iemand gaat met z'n vingers meten. Dat vinden we niet nauwkeurig genoeg. Wij kijken elkaar aan, want er treedt een impasse in. Wat nu? Dan pakt professor Freudenthal zijn zakdoek en vouwt die op tafel uit. Is dit een vierkant? Hoe weet je dat zo zeker? Een meisje doet waar Freudenthal op zit te wachten. Ze vouwt de zakdoek over de diagonaal, zodat de zijden op elkaar vallen. Kan iemand nu ook nog vouwen, zodat je kunt zien dat alle vier de zijden gelijk zijn?

Veerbalans.
In maart bezoeken we de oefenschool in Werkendam. Student Kees heeft zich voorbereid om met een groepje kinderen te praten over het ordenen van gewichten op de getallenlijn. Hij heeft drie luciferdoosjes van verschillend gewicht geprepareerd, er liggen twee liniaaltjes op de tafel en een brievenweger. Het ordenen van de doosjes naar gewicht levert geen problemen op, hoewel Kees het wegen op de weegschaal zelf voor zijn rekening neemt. Maar als Kees vraagt de doosjes naar gewicht op een getallenlijn te ordenen, is het eerste probleem geboren. Hoever moeten die gewichten uit elkaar geplaatst worden? Op aftrekken komen de leerlingen niet spontaan. Achteraf wijst Freudenthal op het nut van een veerbalans. De verwantschap van de schaalaanduiding op de veerbalans met de getallenlijn is helder en kan kinderen op ideeën brengen.

Taal en wiskunde

Op zekere dag wordt in de Wiskobasvergadering bekend gemaakt dat de kinderen van de Dr.W. Dreesschool in Arnhem, de 'ontwerpschool' van Wiskobas, het op de Cito-toets voor rekenen niet minder hadden gedaan dan de gemiddelde leerling in Nederland, én dat ze voor taal veel beter dan het gemiddelde hadden gescoord. Professor Freudenthal toonde zich hierover opmerkelijk verheugd. Zijn herhaalde uitspraken over het feit dat met het Wiskobasmateriaal voor rekenen-wiskunde ook veel aan taalontwikkeling werd gedaan werd nu bewaarheid. Het magere resultaat op het onderdeel rekenen was voor hem niet bijzonder interessant. De toets behandelde immers alleen het 'oude' rekenen. Freudenthals belangstelling voor taal kwam op verschillende momenten in zijn PA-jaar in beeld.

Meetkundetaal
Eind september 1976 worden de PA-studenten voor de eerste keer geconfronteerd met het nieuwe meetkundeblok met de titel 'Kijken, doen, denken en zien' (Goffree & Jansen, 1976). Freudenthals ideeën over de didactische fenomenologie, genoteerd in hoofdstukken van het boek 'Didactical Phenomenology of Mathematical Structures' dat in 1983 zal verschijnen, waren de Wiskobasmedewerkers al bekend. Met regelmatige tussenpozen vinden zij eerste versies van die hoofdstukken in hun postvakje.

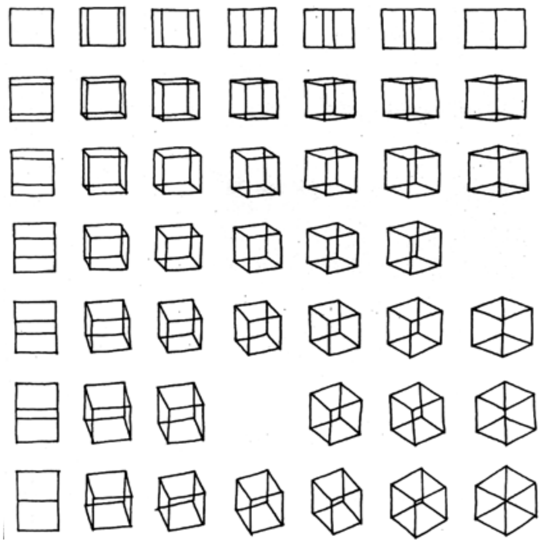
De titel 'Kijken, doen, denken en zien' laat zien dat meetkunde in zekere zin fenomenologisch is, dat wil zeggen als een verschijnsel in de wereld rondom ons. De eerste les gaat over een koster die zijn kerk - een blokkenbouwsel op een veld met ruitjes weergegeven - moet beschrijven. In de nabespreking ziet Freudenthal een taalprobleem: dagelijks leventaal, bouwtaal of wiskundige taal? Daarop verdergaand adviseert hij de volgende keer de ruitjesstructuur weg te laten. Het lijkt hem ook nuttig de studenten eerst de kans te geven iets te vertellen over de ervaringen die ze al met meetkunde hebben opgedaan.

Niveaus van taalgebruik.
De meetkundeles over 'de koster en de kerk' heeft in de PA-klas een vrij chaotisch karakter gekregen. De studenten hadden de vrijheid met voorstellen voor het beschrijven van de kerk te komen. In de nabespreking van de les blijkt het moeilijk grip te krijgen op dit gebeuren.

Achteraf, als we in het Piazza Centrum weer eens onder ons zijn, meent Freudenthal dat het bespreken fundamenteler had gekund. We hadden moeten wijzen op de verschillende niveaus van taalgebruik. Op het meest elementaire niveau werd 'demonstratieve taal' gebruikt. Er werd 'gewezen' en gebruikgemaakt van aanwijzende voornaamwoorden: dat blokje daar, … nee, meer daarheen, … De gebrekkigheid van dit taalgebruik werd duidelijk toen de koster daar niets mee kon. Niveauverhoging treedt op als men een meer relatief taalgebruik gaat hanteren: links van dat blokje, het blokje rechts voor, … Ook dit taalgebruik heeft een nadeel: de beschrijver en de toehoorder hebben namelijk verschillende posities waardoor misverstanden kunnen ontstaan. Inleven in de ander is nodig bij communicatie, maar bij gebruik van de coördinatentaal zijn alle subjectieve elementen verdwenen. Er moeten afspraken worden gemaakt over 'oriëntatie' … Later komt Freudenthal op de PA vaak terug op het taalaspect in de wiskunde.

De taal van de draaiende kubus

Oktober 1976. Op de PA is de vierde les uit het meetkundeblok 'Kijken, doen, denken en zien' aan de orde geweest. We hebben geen goed gevoel als we in het Piazza Centrum napraten. Er gebeurde te weinig, de respons van de studenten was gering en ze werden onzeker als er woorden als 'loodrecht', 'diagonaal' en 'evenwijdig' genoemd werden.
Op een van de werkbladen (naar een vondst van E. de Moor) staan 48 verschillende kubusprojecties, systematisch gerangschikt in zeven rijen en zeven kolommen. Ergens in het midden ontbreekt een kubusprojectie. Gevraagd wordt die te tekenen (fig.4).



figuur 4: de draaiende kubus

Wie goed de opbouw in de rijen en kolommen volgt, ziet dat de kubus in twee richtingen gekanteld wordt. In de kolommen een draaiing om verticale as, in de rijen horizontaal.

Freudenthal komt terug op de geringe respons. Hij wijst op het wiskundige taaltje dat nodig is om de stand van de kubus te beschrijven met woorden als 'as', 'draairichting' en 'hoek'. Het wordt duidelijk dat de studenten (fig.5) niet beschikken over deze taal, in elk geval kunnen ze deze niet toepassen in de context van de dagelijkse dingen.

figuur 5: Gorcumse PA-studenten 1976-'77

Didactische fenomenologie

Freudenthals boek 'Didactical Phenomenology of Mathematical Structures' kwam uit in 1983. De eerste zinnen van 'A look backward and a look forward', een soort woord vooraf op de plaats van een voorwoord, luiden:

> Men die, systems last. Immortality is assured to those who built their name into a system. Although even immortality is not what it used to be any more, and I did not crave for it, I once a day set my mind on writing my first systematic work, after a few that can rightly be called chaotic. The result has been the most chaotic of all - so chaotic that when the reader expects a preface he has to wait for Chapter 6 ...

En hij eindigt dit voorafje met een uitleg van het begrip fenomenologie en een verwijzing naar zijn instituut in de jaren zeventig:

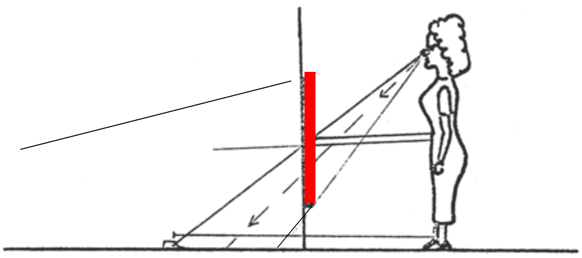
> The didactical scope of mental objects and activities and of onset of conscious conceptualisations, if didactically possible, is the main theme of this phenomenology. It was written in the stimulating working atmosphere of the IOWO ...

Mentale objecten en handelingen behoren eveneens tot de *big ideas* van Freudenthal. In zijn eerste hoofdstuk geeft hij een voorbeeld: de grootheid lengte. Zijn verwijzing naar de tijd van het IOWO roept gelijk herinneringen op. Zo af en toe ontvingen alle IOWO-medewerkers een hoofdstuk van de 'Didactische Fenomenologie' (in het Nederlands) in hun postvakje. Het waren moeilijke teksten, niet omdat we ze chaotisch vonden, maar omdat elk hoofdstuk (Natuurlijke Getallen, Verzamelingen, Breuken, Verhoudingen, Meetkundige Structuren, In de Meetkundige Context, enzovoort) begon met een moeilijke wiskundige analyse van het te bespreken fenomeen. Na verschijning van het boek kon Freudenthal (1989, 1990a en b) er in veel eenvoudiger taal over schrijven.

De hoofdstukken in de 'Didactische fenomenologie' maakten voldoende indruk om de auteur te vragen hoofdstukken voor de PA-blokken te schrijven. Het werden er twee: 'Meten vanuit wiskundig standpunt' (1977) en 'Verhoudingen als verschijnsel' (1979).
Natuurlijk kwam de fenomenologische benadering van de wiskunde ook in en om de PA te Gorinchem ter sprake. Een paar herinneringen.

Met meetkundige bril

Freudenthal is tussen de bedrijven door bezig aan zijn boek over de 'Didactische fenomenologie van wiskundige structuren'. In onze meetkundelessen kunnen we daar gebruik van maken. Vooral de manier van kijken spreekt ons aan. We gaan de wereld rondom ons steeds meer zien door een meetkundige bril. De studenten hebben tijdens een proefwerk geworsteld met het probleem of de dame vóór de passpiegel haar voeten in de spiegel kan zien (fig.6)?



figuur 6: de passpiegel van Wouter

Student Wouter heeft de fout gemaakt de viseerlijn (vertrekt uit het oog naar een voorwerp en geeft dus de kijkrichting aan) en de lichtstraal (wordt van een voorwerp weerspiegeld naar het oog) te verwarren. De 'straal' uit het oog van het meisje werd door de spiegel teruggekaatst, meent hij.
Het geeft ons aanleiding de meetkundige 'rechte lijn' fenomenologisch te beschouwen: viseerlijn, lichtstraal, (vouwlijn) snijlijn van twee vlakken, verbinding tussen twee punten (hemelsbreed), kniplijn, constructielijn, verlengde van een lijnstuk, …

Nieuw licht op oppervlakte en inhoud

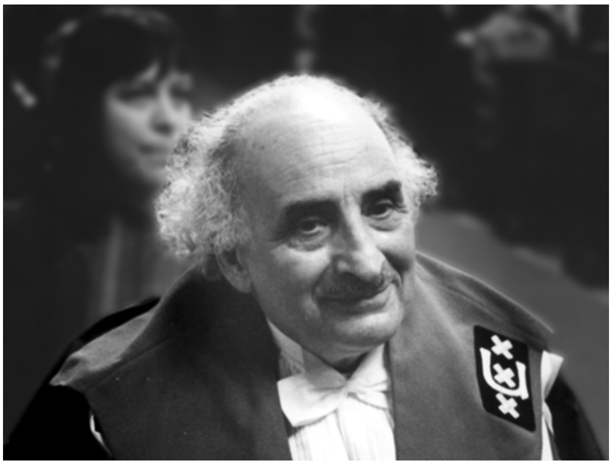
We overdenken de blokkenberg op het werkblad voor een gesprek met kinderen uit klas 5. Wij denken aan de moeilijkheid die sommige kinderen hebben bij het bekijken van de tekening en in het blokkenbouwsel geen diepte zien. Voor- en zijvlakken lijken voor hen in eenzelfde vlak te liggen. Dit wordt zichtbaar als blijkt dat ze niet in staat zijn het aantal blokjes te tellen. Freudenthal plaatst daar twee interessante en tegelijk praktische opmerkingen bij en doet ook een voorstel: Laat de kinderen zich voorstellen dat zonlicht op het bouwsel valt en ze dan laten tekenen op welke vlakjes het licht valt en welke in de schaduw liggen.
Het blijkt een goede opstap om voor het berekenen van oppervlakte waarnaar gevraagd wordt, het bouwsel te verven en de prijs daarvan te bepalen. Toen kwam ook de grootheid 'inhoud' aan bod. Daar valt niets bij te schilderen en dit is voor de studenten niet direct duidelijk. Freudenthal bedenkt iets om het berekenen van de inhoud een praktische betekenis te geven: 'De blokkenberg is een huis. Het meeste wat in een huis zit is lucht. Wat kun je met die lucht doen? Verwarmen bijvoorbeeld!'

Gesprekken met kinderen

Toen Freudenthal als hoogleraar-directeur van het IOWO bij zijn entree in de wekelijkse Wiskobasbijeenkomst op bescheiden wijze liet merken dat hij zichzelf wilde beschouwen als lerende in het team, wist hij tenminste één ding zeker. Om het leren van kinderen beter te leren kennen en te begrijpen, moet je met ze praten. Net zoals Piaget het deed in zijn klinische gesprekken met kinderen. 'Wandelingen met Bastiaan' (1975), een serie artikeltjes in 'Pedomorfose', waarvan zijn vrouw, S. Freudenthal, de redactie voerde, tonen hoe hij die gesprekken voerde en hoe hij ervan leerde.
Dergelijke leeromgevingen had Freudenthal ook voor ogen voor de PA-studenten. 'Gesprekken met kinderen' werd een vast onderdeel van het stageprogramma van eerstejaars. Als eerstejaarsdocent woonde hij gesprekken van studenten met leerlingen bij, besprak ze achteraf met ze en gaf ook regelmatig het voorbeeld. Hij genoot ervan en de kinderen niet minder onder leiding van die 'echte' professor. Hier een paar herinneringen.

Twee broers: Freudenthal speelt in

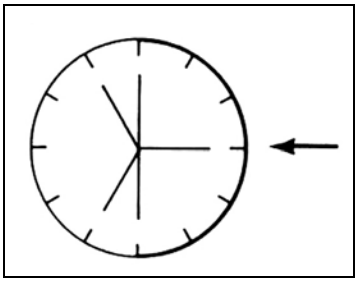
Het is woensdag medio januari 1977. Twee dagen na de uitreiking van het eredoctoraat aan Freudenthal aan de Universiteit van Amsterdam (fig.7).[1]



figuur 7

We zijn in Arkel en middenin de zesde klas staat een tafel klaar voor hem en drie leerlingen. De andere kinderen zitten eromheen. Zij moeten aantekeningen maken van het

gebeuren aan tafel. Freudenthal vertelt het probleem 'van de twee broers'. Ze gaan naar dezelfde school, maar de ene is sneller dan de andere. De langzame broer gaat vijf minuten eerder weg en komt ook vijf minuten later op school dan zijn broer. De snelle broer doet er dertig minuten over. Waar haalt hij zijn broer in? Na verkenning van het probleem moet aan de oplossing begonnen worden.
Maar de kinderen zeggen niets en Freudenthal moet wat bedenken. Laten we eens wat tekenen, zegt hij. Tot ieders verrassing tekent een jongen uit het groepje een klok. Nu moet Freudenthal daarop inspelen. En dit doet hij alsof hij jarenlang ervaring in klas 6 heeft. De klok, of beter een wijzerplaat met streepjes op elke vijf minuten, staat op het papier. Geen getallen. Hoe lang doet de snelle broer erover? Op de wijzerplaat komt een verticale middenlijn. Je kunt denken van twaalf uur naar zes uur. Wanneer vertrekt de ander? Er komt een 'wijzer' naar het punt van elf uur. En wanneer komt hij op school aan? Nu komt er een 'wijzer' naar het punt van zeven uur. Er staat nu een mooie symmetrische tekening, de symmetrie springt in het oog. Een meisje ziet het meteen. Ze tekent een pijl naar het punt van drie uur. 'Dáár!', zegt ze (fig.8).



figuur 8: twee broers

Gulliver: Freudenthal geeft hints

In maart zit Freudenthal in een groepje vijfdeklassers, met studente Elly, die met de leerlingen over 'Gulliver' praat. Op de PA zijn we inmiddels begonnen met het nieuwe blok 'Verhoudingen', waarin Freudenthal onder meer het hoofdstuk 'Verhoudingen als Verschijnsel' voor zijn rekening heeft genomen.
Het blok begint met het verhaal van Gulliver in het land van de Lilliputters en een schaal van 1 op 12. De verhoudingsproblematiek spitst zich toe op het probleem hoe de Lilliputers hun eigen zakdoek moeten vergroten om er een voor Gulliver te maken. Elly heeft in het blok ook een stageopdracht in dit kader gevonden en is daarmee aan de slag gegaan.

Terug in de auto naar Utrecht doet Freudenthal verslag van het gesprek met de leerlingen. Hij vond wat Elly deed veel te abstract. Ze gebruikte geen echte zakdoek, ze sprak van schaal 1 : 12 in plaats van twaalf keer zo groot, ze nam kubussen in plaats van mensen en sprak over 'warmteopname' in plaats van 'warmte die een mens nodig heeft'. Freudenthal vertelt dat hij op de punten, waar concretisering nodig was, heeft ingegrepen. Wij denken met enig medelijden aan Elly en zien haar in gedachten aan tafel zitten met haar leerlingen. Maar Freudenthal heeft leerzame dingen voorgesteld aan de leerlingen en vooral ook aan Elly: 'Neem er eens een echte zakdoek bij'; 'Doe de zakdoek voor je gezicht, hoe groot is een gezicht?'; 'Denk eens aan Gulliver als Lilliputter' en 'Teken een gewoon mens en een Lilliputter'.

6 Tot slot

Freudenthal heeft niet alleen tijdens en na afloop van zijn bezoeken aan de Gorcumse PA over de opleiding van leraren en het leren van studenten als toekomstige leraren, nagedacht. In 'Schrijf dat op, Hans' (1987) lezen we dat hij al eerder een pleidooi hield voor de invoering van practica in de universitaire opleidingen wis- en natuurkunde. Ook bij oprichting van de Nieuwe Lerarenopleidingen in het begin van de jaren zeventig heeft hij zich nadrukkelijk met het opleidingsprogramma voor toekomstige leraren wiskunde bemoeid.
Het basisonderwijs en dus ook de onderwijzersopleiding krijgt zijn aandacht als hij zelf kinderen krijgt, dus vader en nog weer later ook grootvader wordt. Maar nadenken over leren en onderwijzen deed Freudenthal al veel eerder. In zijn autobiografie valt te lezen dat hij al bijles gaf toen hij nog maar dertien jaar oud was. Maar, voegt hij daaraan toe: 'Mijn hele leven ben ik een slecht leermeester geweest en om daar het beste van te maken ben ik al vroeg over onderwijs gaan nadenken'. Freudenthal heeft over het reken-wiskundeonderwijs bijna zijn hele leven nagedacht. De resultaten van dit denkwerk heeft hij beschreven in artikelen en boeken en laten horen tijdens nationale en internationale conferenties en andere bijeenkomsten. Maar Freudenthal deed meer dan nadenken, schrijven en soms op scherpe wijze kritiek leveren op het bestaande, vastgeroeste rekenonderwijs en de soms starre opvattingen van onderwijskundigen.

In de nog steeds goed leesbare en leerzame bundel artikelen van zijn hand 'Appels en peren - wiskunde en psychologie' richt Freudenthal (1984) de aandacht op zaken die nog steeds van belang zijn voor de opleidingen leraar basisonderwijs. We noemden er al enkele: het belang van rijke contexten bij het leren en onderwijzen, de relatie tussen moedertaal en wiskundetaal, cognitieve ontwikkeling, visualiseren, oplossen van problemen en het observeren van kinderen. Ook PA-studenten wilde Freudenthal leren observeren en aan het oplossen van problemen zetten. In dit geval het oplossen van en het discussiëren over mathematisch-didactische problemen.

Zijn bundel 'Appels en peren' wordt afgesloten met een vijftiental voorbeelden van mathematisch-didactische probleempjes onder de titel 'Studentenhaver'.

Omdat hij dat vast leuk gevonden zou hebben, besluiten wij dit artikel met zo'n probleem:

> Ik vraag Monica (9): Een moeder en haar dochtertje zijn samen 21 jaar oud. Hoe oud is elk afzonderlijk?
> De broer (twee jaar ouder), moeder en vader zitten erbij.
> Schrijf een treurspel in één akte over wat er toen gebeurd zou kunnen zijn.

Noot

1 Illustratie van Ronald Sweering (1977).

Literatuur

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1975). Wandelingen met Bastiaan. *Pedomorfose*, *25*, 51-64.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1984). *Appels en peren - wiskunde en psychologie*. Apeldoorn: Van Walraven.

Freudenthal, H. (1987). *Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven*. Amsterdam: Meulenhoff.

Freudenthal, H. (1989). Wiskunde fenomenologisch. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *8*(2), 33-40.

Freudenthal, H. (1990)a. Wiskunde fenomenologisch (2). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 8*(3), 11-20.

Freudenthal, H. (1990b). Wiskunde fenomenologisch (3). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 8*(4), 51-61.

Goffree, F. & H. Jansen (1976). *Kijken, doen, denken en zien.* Utrecht: IOWO.

Goffree, F., H. Jansen & H. Freudenthal (1979). *Verhoudingen. Wiskunde & Didaktiek in de onderwijzersopleiding.* Utrecht: IOWO.

Jansen, H., F. Goffree & J. Keijnemans (1977). *Meten. Wiskunde & Didaktiek in de onderwijzersopleiding.* Utrecht: IOWO.

It is the year 1976. Professor Freudenthal has been professor-director for five years, and, as he put it himself, employee of IOWO, when he becomes interested in development work for Dutch Teacher Colleges. Being interested soon turns into participation and commitment.
Together with H. Jansen and F. Goffree he travels from Utrecht to Gorinchem: on Tuesday visiting the PA, on Wednesday participating in the student teachers' fieldwork. He holds discussions with student teachers during the 'Mathematics & Didactics' lessons, and with the teachers and their students as well. Often he talks with the children at school, following the Socratic approach. Following these activities on the 'shopfloor' of a Teacher College, they are analysed and discussed over lunch and on the way back to Utrecht.
Professor Freudenthal is a newcomer in the world of Teacher Colleges, but he feels right at home from the very beginning. He likes to present the results of his thinking about mathematics education to students, student teachers, teachers, teacher educators and curriculum developers, both in practice and on a theoretical level.

Wandelingen met Bastiaan

Bastiaan (6,1). Na een reeks zonnedagen ziet hij wolken en zegt: 'Het gaat regenen.' 'Neen', zeg ik, 'dit zijn heel hoge wolken, daar komt geen regen van; regenwolken zijn laag en donker.' Hij: 'Hoe hoog zijn die wolken?' Ik (overdrijvend): 'Tienduizend meter.' Hij: 'En hoe hoog zijn regenwolken?' Ik: 'Duizend meter.' Hij: 'Dus (met de hand op de grond) als wij hier zijn en de regenwolken zó hoog (wijst ongeveer 30 cm boven de grond), dan zijn dat (wijst ongeveer 1 meter boven de grond), geen regenwolken.'

(*Appels en peren / wiskunde en psychologie.* Apeldoorn: Van Walraven, 71)

Gebruik je gezond verstand!

Rijkje Dekker
Universiteit van Amsterdam, Instituut voor de Lerarenopleiding

Freudenthal is ongetwijfeld de persoon geweest die mij in mijn ontwikkeling als wiskundeonderwijsonderzoeker het meest beïnvloed heeft. De les die hij mij leerde, was: ‘Gebruik je gezond verstand’. Maar het heeft een tijd geduurd voordat ik mij die les echt bewust werd.

Het is nu alweer vijftien jaar geleden dat Freudenthal is overleden. Toch is het beeld dat ik van hem heb nog zeer duidelijk. Ik heb hem ontmoet tijdens mijn wiskundestudie aan de Universiteit van Amsterdam, toen hij daar een lezing gaf. Ik gaf indertijd naast mijn studie les op een middenschool en was geïnteresseerd geraakt in samenwerkend wiskundeleren. Freudenthal had daarover in een aantal publicaties zijn ideeën geuit en die interesseerden mij. Ik sprak hem na zijn lezing aan, ging met hem over zijn ideeën in discussie en hij stimuleerde mij vrijwel direct onderzoek te gaan doen. Dat resulteerde voor mij onder andere in een proefschrift over samenwerkend wiskundeleren. Nog steeds houd ik mij in mijn onderzoek met samenwerkend wiskundeleren bezig en publiceer daar regelmatig over. Je kunt gerust van een passie spreken.

Sinds die eerste ontmoeting hebben Freudenthal en ik altijd contact gehouden en kwamen er in al onze gesprekken niet alleen allerlei wetenschappelijk onderwerpen aan de orde, maar gaandeweg ook steeds meer persoonlijke: kinderen, zijn kleinkinderen, liefde voor kunst, sociale bewogenheid, grapjes … Ook introduceerde hij mij in de kring van de ‘Commission Internationale pour l’Etude et l’Amélioration de l’Enseignement des Mathématiques’ (CIEAEM) en maakte ik kennis met allerlei bevlogen wiskundeonderwijsonderzoekers, vaak pioniers in eigen land die met heel veel inzet probeerden het wiskundeonderwijs voor alle leerlingen toegankelijk te maken. Binnen de CIEAEM heeft Freudenthal zelf de mensen gevonden die hem in zijn ideeënvorming over het wiskundeonderwijs inspireerden en met wie hij zeer bevriend is geraakt. Hij noemt enkelen van hen in het voorwoord van zijn beroemdste en meest vertaalde boek ‘Mathematics as an Educational Task’. Iets dat voor hem heel opmerkelijk is.

Toen hij pas overleden was, voelde ik mij aanvankelijk koersloos. Ik vroeg me regelmatig af: ‘Wat zou Freudenthal hiervan vinden?’ Maar hij was er niet meer om mijn ideeën al discussierend aan te toetsen en op te oriënteren. De ommekeer kwam echter toen ik tien jaar geleden op uitnodiging van de CIEAEM een plenaire lezing mocht houden op haar 47ste conferentie in 1995 in Berlijn die als thema had ‘Mathematics (Education) and Common Sense’. Het was mijn eerste plenaire lezing en ik heb hem zeer uitgebreid voorbereid. Ik was namelijk niet alleen als persoon met een eigen onderzoeksspecialisatie uitgenodigd, maar ook als ‘leerling’ van Freudenthal en daarmee als een soort representant van de Hollandse school voor realistisch reken-wiskundeonderwijs. Dat schept ver-

plichtingen. Freudenthal heeft zelf in een aantal publicaties uiteengezet hoe hij het leren van wiskunde ziet als het ontwikkelen van het gezond verstand.

Ik heb toen in mijn lezing een soort collage gegeven van het werk van verschillende mensen in Nederland die naar mijn mening heel mooi het gezond verstand van leerlingen laten zien of gebruiken:

– Marja van den Heuvel-Panhuizen, die met haar toetsen voor jonge kinderen heeft laten zien wat zij allemaal al aan eigen reken-wiskundekennis ontwikkeld hebben voordat ze op school echt met rekenen-wiskunde aan de slag gaan. Van de 441 zesjarigen van 22 verschillende basisscholen geven er al heel wat goede antwoorden op toetsvragen over leerstof die ze op dat moment nog niet gehad hebben. Een opgave over optellen in de context van ganzenborden wordt bijvoorbeeld door maar liefst tachtig procent van de leerlingen goed opgelost en zelfs een opgave over aftrekken in de context van het kopen van een zonnebril door veertig procent. En dat zonder hulpmiddelen of te tellen objecten. Kinderen ontwikkelen dus in hun eigen wereldje al een hoop reken-wiskundekennis op eigen kracht. Een kwestie van gezond verstand! En net als de groep experts aan wie Marja de toetsopgaven voorlegde om een schatting te maken van het percentage kinderen dat de opgaven goed zou maken, heb ik mijn publiek een aantal opgaven met dezelfde vraag voorgelegd. En ook bij mij was de inschatting van de prestaties van de leerlingen beduidend lager dan de werkelijke prestaties. We beginnen dus al met leerlingen te onderschatten. Niet goed voor hun wiskundig zelfvertrouwen dat juist gebouwd wordt op het eigen gezonde verstand.

– Marjolein Kool, die met prachtige historische rekenproblemen informele strategieën van leerlingen blootlegt. Ze heeft bijvoorbeeld aan leerlingen van tien en elf jaar een rekenopgave voorgelegd uit een zestiendeeeuws rekenboekje, geschreven door de toen achttienjarige Peter van Halle. De opgave zou met een staartdeling gemakkelijk op te lossen zijn, maar dat hebben ze nog niet gehad, dus komen er allerlei andere oplossingen naar voren vanuit eigen kennis en gezond verstand. En die rijkdom benut ze door de verschillende oplossingen te tonen en te bespreken en een leerling, Hanneke, zelfs de kans te geven de oplossing die Peter van Halle zelf geeft, te verbeteren. Hoe een leerling een deskundige weet te verslaan! Dat is goed voor het wiskundige zelfvertrouwen.

– Wim Sweers, die allerlei verpakkingen de klas inhaalde om deze met zijn leerlingen wiskundig te verkennen. Met zijn leerlingen van het toenmalige LHNO had hij altijd moeite met wiskundige modellen. Tot hij merkte dat diezelfde leerlingen bij een ander vak de mooiste verpakkingen maakten. Die werden in de etalagekasten op school tentoongesteld. Zo bedacht hij dat het wiskundig verkennen van verpakkingen een mooie instap voor zijn leerlingen in de wiskundige wereld van de modellen kon vormen. Een heel mooi voorbeeld waarbij wiskunde op het gezond verstand wordt opgebouwd. Het idee is in veel wiskundeboeken terug te vinden, en is bijvoorbeeld ook in een Portugese wiskundemethode terechtgekomen.

– Aad Goddijn, die met zijn kijkexperimenten een geheel nieuw terrein aanboorde. De kijkmeetkunde is helemaal gebaseerd op eigen experimenten van leerlingen en daarmee hecht verankerd in het gezond verstand. Het ontwikkelen van gezond verstand gaat immers via de reflectie op eigen ervaringen en niet doordat anderen je zaken aanpraten. Aad heeft zich daarbij laten inspireren door het werk van Tatjana Ehrenfest die met haar ‘Übungensammlung’ uit 1931 een revolutie in wiskundig-didactisch Nederland op gang heeft gebracht.

– Tatjana Ehrenfest nodigde bij haar thuis in Leiden allerlei wiskundeonderwijsmensen uit om met ze in discussie te gaan en ze haar ideeën voor te leggen. Men was geschokt. Maar een aantal mensen was gegrepen: Dina van Hiele-Geldof die aan de hand van betegelingen mooie meetkundelessen is gaan ontwerpen, uitvoeren en onderzoeken en daar een heel bijzonder proefschrift over geschreven heeft. En ook Hans Freudenthal die met Tatjana in discussie ging, niet alleen in de beslotenheid van haar huis, maar ook openlijk. Hij was waarschijnlijk haar beste leerling; hij was zeker mijn beste leraar, die mij leerde om mijn gezond verstand te gebruiken, op alle niveaus.

Zo eindigde ik mijn lezing, die bevrijdend werkte. Ik vond het heel bijzonder om te doen en kreeg veel goede reacties. Maar vooral het besef dat ik ook zonder Freudenthal met mijn ontwikkeling in het wiskundeonderwijsonderzoek door kon gaan, door telkens mijn eigen gezond verstand te blijven gebruiken, steunde mij.

Inmiddels is het tien jaar later en ik moet eerlijk toegeven dat het in de wereld van het wiskundeonderwijsonderzoek niet eenvoudig is om je gezond verstand de plaats te geven die het verdient. De neiging naar theoretiseren is zo groot geworden dat je je in allerlei onderzoeken van anderen moet verdiepen, wil je nog kans maken ergens je werk gepubliceerd te krijgen. En als je eigen ideeën goed zijn en je wilt je daarop concentreren, dan werkt dat soms eerder frustrerend dan inspirerend. Dit besprak ik laatst met mijn collega Marianne Elshout-Mohr, leerpsychologe, met wie ik al jaren samen onderzoek doe en publiceer, iemand wier denkkracht ik zeer bewonder. Het was naar aanleiding van een artikel dat we geschreven hadden voor het ooit door Freudenthal opgerichte tijdschrift ‘Educational Studies in

Mathematics': 'How children regulate their own collaborative learning'. In feite weer een artikel waarin het gezond verstand van kinderen centraal staat. We moesten het reviseren en veel meer inbedden in de bestaande literatuur. Er was een waslijst aan opmerkingen.

'Ze begrijpen het gewoon niet!', verzuchtte ik.

'Nee,' beaamde Marianne, 'we moeten dus verhelderen wat we willen zeggen.'

En van daaruit zijn we toen het artikel gaan reviseren. Achteraf hebben we de lijst opmerkingen nog nagelopen, maar dat leverde uiteindelijk nog maar weinig extra werk op. Het gereviseerde artikel werd goed ontvangen.

'Ik zal je missen,' zei ik tegen Marianne, want het is het laatste jaar voor haar pensioen, 'maar misschien is het ook wel goed om nu zelf verder te gaan.'

'Als je de literatuur maar in de gaten houdt', was haar advies.

'Van Freudenthal heb ik juist geleerd mijn gezond verstand te gebruiken', reageerde ik.

'Ja,' zei ze, 'dat doe ik ook, zo ontwikkel ik mijn ideeën, maar vervolgens ga ik kijken wat anderen gezegd hebben, om mijn ideeën aan te toetsen.'

Mooi vond ik dat, en het past naadloos bij mijn les van Freudenthal: 'Gebruik eerst je gezond verstand, en daarna de literatuur!'

Stilstaan bij enkele grondgedachten uit Freudenthals laatste werk

- een recensie in revisie -

Jo Nelissen
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

1 Inleiding

In het begin van de jaren negentig besprak ik voor het tijdschrift ‘Pedagogische Studiën’ Freudenthals allerlaatste boek, waarvoor hij een opmerkelijke titel had gekozen, namelijk ‘Revisiting Mathematics Education. China Lectures’. *Revisiting* dacht ik toen, zou misschien iets te maken kunnen hebben met ‘visie’ en met ‘Revisiting Mathematics Education’ kan dan bedoeld zijn dat de auteur meent dat de tijd rijp is om zijn eigen ideeën over reken-wiskundeonderwijs te herzien. Freudenthal had met deze titel echter iets anders op het oog. Namelijk een kritische terugblik op zijn werk, zijn ideeën en de wijze waarop die tot stand waren gekomen. Die ideeën worden niet zozeer *herzien* (al gebeurt dat soms ook wel) maar vooral *bezien*. Freudenthal onderwerpt fundamentele vraagstukken aan een grondige analyse en fileert daarbij zijn eigen wetenschappelijke denken.
Dit artikel is een bewerking van de recensie die bijna vijftien jaar geleden werd geschreven. Hier en daar is het echter ook een revisie, al hebben de destijds geventileerde ideeën, geloof ik, doorgaans niet dramatisch schipbreuk geleden.

2 Common sense

In het leven van een mens begint wiskunde altijd als *common sense*, zo luidt een van Freudenthals eerste grondgedachten. Het wiskundeonderwijs moet bij die *common sense* aansluiten:

> In general I believe that in instruction it would be more recommendable to start with common sense ideas rather than to reject them as outdated and better being suppressed. (pag.6)

Zo is het kunnen opzeggen van de getallenrij - het allereerste algoritme met een wiskundig karakter dat een kind verwerft - een *common sense* algoritme dat voortkomt uit *means of common language*. Met *common sense* is niet bedoeld, al pleit Freudenthal krachtig voor nauwe banden met de realiteit, dat de kennisverwerving slechts op de dagelijkse ervaring (op de empirie) moet berusten. Wanneer dat laatste wel gebeurt, kunnen gemakkelijk misverstanden ontstaan, zoals blijkt uit analyses van pre-concepties op het gebied van de natuurkunde. Het idee ‘ijzer is kouder dan hout’ of ‘water verdwijnt als het verdampt’ komt voort uit ervaringen waarop kinderen (en ook soms volwassenen) spontaan hun begripsvorming stoelen.

Het idee dat leren vooral een kwestie is van *ervaring* opdoen in situaties of contexten die voor de leerlingen zinvol en leuk zijn, is evenmin wat Freudenthal bedoelt als hij zegt dat het onderwijs moet starten bij *common sense*. Het begrip ‘context’ wordt, waarschijnlijk onder invloed van publicaties over het ‘Nieuwe Leren’ (dat tussen haakjes niet nieuw is en meestal niét over leren gaat), steeds meer gezien als ‘context *als motivatie*’. Natuurlijk mogen (en moeten) contexten leerlingen motiveren, maar contexten zijn vooral bedoeld om een functie *als model* te vervullen. Dat betekent in het reken-wiskundeonderwijs dat contexten structuur moeten bevatten die door leerlingen geëxploiteerd moet worden. Met ‘context als motivatie’ bedoelt men de zin in rekenen te bevorderen (leren moet immers vooral ‘leuk’ zijn), bij ‘context als model’ gaat het om het stimuleren van cognitieve processen. En die moeten als zodanig voor leerlingen motiverend zijn of worden.

Soms denk ik, maar ik las dat bij Freudenthal niet, dat *common* mag staan voor gemeenschappelijk en dat *sense* opgevat mag worden als betekenis of zin. *Common sense* zou dan kunnen betekenen al datgene wat voor een kengemeenschap (van wiskundigen en ook van degenen die rekenen-wiskunde leren), in gemeenschappelijk, onderling overleg betekenis krijgt of misschien kan krijgen. Hierin kan men een pleidooi zien voor interactief onderwijs, waarin ‘onderhandeld’ wordt over ‘betekenissen’, in de woorden van Bruner *negotation of meaning*. Ik zou wel willen weten of Freudenthal zich in zo’n interpretatie had kunnen vinden.
Common sense betekent bij Freudenthal dus méér dan ervaring opdoen en voor leerlingen leuke contexten bedenken. Het reken-wiskundeonderwijs moet weliswaar starten bij *common sense*, maar dit moet door reflectie op een hoger niveau worden gebracht. Transformatie en for-

malisering zijn daarbij de funderende processen. Op hoger niveau wordt het denken dan weer (opnieuw) *common sense*. Deze hogere niveaus worden niet bereikt als regels van bovenaf worden opgelegd:

> But having be imposed they never had a real chance to develop into common sense of a higher order. (pag.8).

Common sense treffen we dus aan op verschillende niveaus, in elk geval in de wiskunde. Het is dan ook niet toevallig, zegt Freudenthal, dat de ontwikkeling van de wiskunde zich onderscheidt van bijvoorbeeld de ontwikkeling van de natuurwetenschap. De natuurkunde ontwikkelde zich sprongsgewijs en werd gekenmerkt door revoluties. De wiskunde evolueerde tegelijkertijd op verschillende plaatsen in verschillende culturen.

> Common sense' in order to become genuine mathematics and in order to progress, had to be systematised and organised. (pag.9).

Met andere woorden, de *common sense* transformeerde in regels en die regels werden vervolgens weer *common sense*, maar nu van een hogere orde. Modellen functioneren in dit proces als intermediair. Vaak zijn dat modellen die de structuur van een context kenmerken, ze ordenen de werkelijkheid en maken formalisering mogelijk.

3 Guided reinvention

Guided reinvention is een ander sleutelbegrip in de theorie van Freudenthal. Hij zet dit begrip graag af tegen - door hem als modieus ervaren - begrippen als *discovery learning*: ‘uncovering what was covered up by somebody else - hidden eastern eggs’. Het gaat in die gevallen meer om problemen die de onderzoeker in zijn hoofd had dan om de zoekprocessen van de lerende zelf. *Reinvention* dus, maar wát moet dan opnieuw uitgevonden worden: de wiskunde, de zoektochten van onze voorouders, de verrassende vondsten die men deed, maar ook de dwaalwegen en doodlopende straten waarin men per abuis terecht kwam, al de dilemma’s waar men over ruziede en waar men niet uitkwam? Nee, zegt Freudenthal, want het gaat om *geleid her*-uitvinden. Waarheen moeten de kinderen dan wel *geleid* worden? Niet zozeer naar de wiskunde zelf, maar eerder naar het mathematiseren. Naar het abstraheren eerder dan abstracties, naar het schematiseren eerder dan naar schema’s, naar het formaliseren eerder dan naar formules.

Is Freudenthal met deze stellingname een ‘Nieuwe Leerder *avant la lettre*’? Hij keert zich er immers tegen dat leraren hun leerlingen kennis en regels opleggen (*having be imposed*) en hij bepleit dat leerlingen zelf hun wiskunde maken en hun denkprocessen construeren. Nee, een ‘Nieuwe Leerder *avant la lettre*’ is Freudenthal niet en hij zou dat ook nooit zijn geworden. Het gaat hem immers om het *her*uitvinden van *wiskundige* activiteiten en wiskundige processen die ertoe doen en die niet volstrekt arbitrair zijn. Het is dan ook de verantwoordelijkheid van de leraar dat de leerlingen kennis maken met dit rijke erfgoed. Processen van abstraheren, formaliseren, schematiseren en reflecteren komen de leerlingen niet aanwaaien, die vragen om interactieve instructie en simultane interactie, als ik het in mijn eigen woorden mag zeggen.

4 Reflecteren

Welke leerprocessen zijn het eigenlijk die in het rekenwiskundeonderwijs van belang zijn? Freudenthal gaat op die vraag uitvoerig in. Hij bespreekt de betekenis van observeren van het handelen van anderen, zelfobservatie, observatie van het leren in groepen, blikwisseling (*change of perspective*) en het gedachtenexperiment. In het voetspoor van Van Hiele onderscheidt hij niveaus in het leerproces. Het leerproces vertoont dus sprongen van het ene niveau naar het andere en dat idee stemt overeen met de opvatting van Freudenthal dat leerprocessen *discontinu* verlopen. Het bereiken van hogere niveaus verloopt in sprongen en funderend daarvoor is: *Being made conscious and subjected to reflection* (curs. Freudenthal). Deze opvatting vinden we overigens ook bij Piaget, die dit proces van niveauverhoging en de coördinerende handelingen die zich daarbij ontwikkelen typeert als *processus réfléchissante* en als *abstraction réfléchissante* (Piaget 1977). Volgens Freudenthal (en ook Piaget) stimuleert reflectie de niveauverhoging:

> … reflection on the higher level on one’s activities of the lower one. (pag.101)

Maar wat is reflectie en reflecteren eigenlijk? Freudenthal zoekt (terminologisch en ook qua idee) geen aansluiting bij de meta(cognitie)golf van de jaren tachtig (metacognition, meta-memory, meta-problemsolving, metacognitive knowledge). Hij ziet reflecteren als:

> ... mirroring oneself in someone else in order to look through his skin, to explore him, to take him in. (pag.104).

Reflectie is dus van oorsprong sociaal en velen zullen hierin de opvatting van Vygotskij herkennen dat hogere psychische processen (zoals taal en denken) altijd eerst sociale processen zijn. Ik zou het zo willen zeggen: de dialoog met de ander gaat geleidelijk over in dialoog met jezelf. Freudenthal rekent het verplaatsen in het standpunt van een ander als zodánig al tot reflectie. Ik denk dat hier eerder sprake is van een proces waar reflectie uit voortkomt. Ik zou het begrip reflectie dan ook willen reserveren voor het analyseren van het *eigen* handelen, maar daarin wordt als het ware het standpunt van de ander weerspiegeld.

5 Leertheorieën

Hoe leren kinderen wiskunde? Hoe kinderen leren, is in allerlei theorieën beschreven. Met algemene leertheorieën heeft Freudenthal echter niet veel op. Sterker nog: 'I strongly distrust general learning theories'. Gal'perin is zo'n leerpsycholoog met wie hij graag de degens kruist, hetgeen echter niet heeft verhinderd dat elementen uit Gal'perins theorie het ontwikkelingswerk van Wiskobas hebben kunnen beïnvloeden. Gal'perin meent, zegt Freudenthal, dat alles gematerialiseerd kan worden. Ook tekens zouden tot de materiële wereld behoren. Wellicht, maar Gal'perin zélf heeft de betekenis van tekens (en symboolgebruik) vaak betwijfeld en op dit punt zelfs Vygotskij bestreden. Bovendien is 'gematerialiseerd' en 'materieel' bij Gal'perin niet van dezelfde *learning level*, zoals Freudenthal meent. Het gematerialiseerde bevat namelijk altijd al niet-materiële, mentale elementen. Het probleem met de theorie van Gal'perin is eerder, zou ik zeggen, dat op instructie dermate veel nadruk wordt gelegd, dat de constructie door kinderen (zeg maar de *common sense*) te weinig ruimte krijgt. Een Nieuwe Leerder avant la lettre was Gal'perin, zij het om heel andere redenen dan Freudenthal, dus helemaal niet. Gal'perin was allesbehalve constructivist, maar is Freudenthal dat dan wel?
In elk geval betwijfelt de laatste ernstig of de discussie, onder filosofen, over de vraag of en in hoeverre een individu zijn eigen wereldbeeld construeert, wel enige zin heeft. Hij geeft de voorkeur aan het begrip *re*-constructie. Tja, ik vraag me af of het er allemaal zoveel toedoet. In wezen gaat het er toch om, denk ik, dat een kind ruimte wordt geboden zijn eigen ideeën (constructies) te vormen en daarover met anderen van gedachten te wisselen (simultane interactie). Door de reflectie die de dialoog met anderen uitlokt, worden de eigen constructies op hoger niveau gebracht, soms bijgesteld, soms verworpen. Hoeveel ruimte een individueel kind moet en kan worden geboden, zal per kind en per situatie verschillen. Daarover zijn geen algemene uitspraken mogelijk.

6 Onderwijsonderzoek

Het hele gecompliceerde proces van onderwijzen en leren, van reflectie en niveauverhoging, van constructie en instructie moet steeds op basis van onderzoek worden gevolgd. Hoe doe je dat echter en aan welke eisen moet wetenschappelijk onderzoek voldoen?
Freudenthal heeft een uitgesproken visie op 'onderwijsonderzoek'. In die visie staat het begrip 'validiteit' centraal. Het streven om via steeds geavanceerder wiskundig-statistische technieken de betrouwbaarheid te verhogen, gaat vaak ten koste van de kwaliteit van het onderzoek. De meetprocedures zijn weliswaar uiterst verfijnd, maar de onderzoekers weten soms nauwelijks wat ze eigenlijk onderzoeken. Dat komt doordat ze zich onvoldoende voorbereid wagen op een voor hen onbekend terrein van het reken-wiskundeonderwijs. Het misbruik van wiskundige procedures is Freudenthal dan ook een gruwel, evenals misinterpretaties van onderzoeksgegevens.
Wat voor onderzoek deed Freudenthal dan zelf? Ik moest, er eerlijk gezegd, toch even over nadenken hoe ik die vraag kon beantwoorden. Freudenthal deed, geloof ik, op twee fronten onderzoek. Ten eerste verrichte hij voortdurend conceptuele analyses ten behoeve van de theorievorming en het hier besproken boek is daar een mooi voorbeeld van. Voortdurend prikkelde hij vakgenoten, voor- en tegenstanders tot reactie op zijn theorievorming. Deze theorie is een basis geweest tot veel onderzoek verricht door medewerkers van het naar hem genoemde instituut. Ten tweede verrijkte hij de gedachte- en theorievorming voortdurend met systematische observaties van leer- en denkprocessen van (zijn klein)kinderen en met de kwalitatieve analyses van zijn bevindingen.

7 Besluit

'Revisiting Mathematics Education' is een rijk boek waarin maar weinig thema's die het denken over rekenwiskundeonderwijs raken, onbesproken blijven. Het boek is bovendien nog steeds verrassend actueel. Vele nieuwe ontwikkelingen van heden ten dage (zowel in de theorie, de gedachtevorming als in de praktijk) kunnen gespiegeld worden aan Freudenthals vrijmoedige denkbeelden, zijn scherpe analyses en zijn directe betoogtrant. Daardoor roept hij ook wel weer tegenspraak en discussie op, maar dat is niet alleen leerzaam en verfrissend, maar bovendien het mooiste wat men van een wetenschappelijk publicatie mag verwachten.
En dat krijgt men dan ook.

Literatuur

Piaget, J. (1977) *Recherches sur l'abstraction réfléchissante.* Paris: Presses Universitaire de France.

Celia Hoyles on Freudenthal - an interview

Arthur Bakker
Institute of Education, University of London

Last year, Celia Hoyles received the first Hans Freudenthal Award for a cumulative programme of research in mathematics education. Celia Hoyles studied mathematics at the University of Manchester. She began her career as a secondary teacher, and then became a lecturer at the Polytechnic of North London (now London Metropolitan University). She entered the field of mathematics education research in the late 1970s and became professor of Mathematics Education at the Institute of Education, University of London, in 1984. In December 2004, she was appointed Chief Adviser for Mathematics at the Department for Education and Skills of the UK Government.

Celia Hoyles (*CH*) is interviewed by Arthur Bakker (*AB*), who worked at the Freudenthal Institute but now works as a research officer in the 'Techno-mathematical Literacies in the Workplace' project, which is directed by C. Hoyles and R. Noss.

1 The interview

AB: *How do you remember Freudenthal?*

CH: I have this vivid image of Freudenthal with his bow tie at a plenary session at the Psychology of Mathematics Education conference in 1983. I remember it so well as if it were yesterday: there was this incredible discussion between him and Fischbein – these two brilliant guys who spoke from a different point of view. Fischbein spoke from a psychological viewpoint and Freudenthal from his particular take on mathematics and didactical phenomenology. They got so heated! They were having a real go.
I think it was about common sense, I think with Freudenthal seeing mathematics as an extension of common sense, but Fischbein did not agree. That was the first time I had come across the ideas of Freudenthal.

Freudenthal was a mathematician who was obviously held in huge esteem in mathematics, and then he dedicated himself to mathematics education. Actually, there were only a few mathematicians, wise mathematicians, whose ideas about education worked out well and who understood that mathematics education is much broader than educating future mathematicians. He also thought that mathematics teaching needed to be motivated by solving 'real' problems so that learners from the start would appreciate the power of mathematics. This resonated with many educators who wished that their subject to be more grounded, so students would be able to apply their knowledge and at the same time would not be bored.

In my view, mathematics education should more generally be about investigating structures and symbolising them. And I think that for school students problems need not always be realistic.

AB: *Do you think him being a mathematician made the approach of Realistic Mathematics Education (RME) successful?*

CH: I have not quite got to the bottom of why his approach of RME turned out to be so appropriate for the culture and tradition in the Netherlands, but I suspect his stature made a huge impact, along of course with the power and resonance of his ideas. I actually think it would not work here in England in the same way, but I might well be wrong. We just don't have the same culture; for instance, teachers teach in different ways and we have different traditions in which the curriculum and assessment procedures are shaped.

What was it that built up a culture in the Netherlands, where these ideas could germinate and grow? I think it must also have been Freudenthal's presence, bringing the mathematics and mathematics education communities together. If you can only achieve that synergy between mathematicians and educators around a few key concepts, then you can form a culture in schools and beyond.
The success of RME was due to the community of teachers, teacher educators, curriculum developers and researchers - all these people around the country working with a similar agenda. Of course, they all have their own take, but they don't have to negotiate the starting points. That is why RME imported here wouldn't work: you need this common culture first.

AB: *What were the ideas of Freudenthal that inspired you most?*

CH: Freudenthal gave kids a voice. Mathematics had to be real and meaningful for the learners, and by starting with realistic contexts, you can draw more people in. In those days, I was doing research on the affective side of learning mathematics, which is why I liked his ideas. In particular, in his 'Didactical Phenomenology' (1983), Freudenthal wrote very insightful things about geometry, which was an area I worked in. All educators acknowledged that pupils should explore shape and space, but then there was always a huge step to formal geometry. In England, geometry education at that time either focussed on the space explorations or the theorems and proofs, and Freudenthal's notion of reinvention was important to make the connection between the exploration of geometrical ideas and the more formal geometry. I thought that was really impressive.

AB: *I assume Freudenthal was one of many thinkers who influenced you?*

CH: Yes, there were others - Piaget and, for me centrally, Papert. Freudenthal's ideas on geometry were important to me, as I felt very strongly about the importance of geometry and the need to link all the beauty and intuition of the subject with the deductive side - which for me had been a separate domain. All these thinkers link in for me with many other influences such as constructivism and so on. RME is very much in parallel - great minds think alike. One issue that disappointed me in RME was the way in which computers were discussed in relation to mathematics education. Freudenthal did not seem to appreciate the importance of computers, how they could be used as mediating tools as part of the problem solving process, whereas for me computers - Logo at the time - were very important (see for example Noss & Hoyles, 1996). Perhaps he just didn't put his great mind to this.

Apart from his reinvention idea and engaging learners, there is something else I have to tell you. When I taught post-graduate students in mathematics education I used an article by Freudenthal, which was a critique of research in mathematics education. It was vicious! He was right, but he did 'nasty' things: he went out and looked up the references and showed that the references did not quite say what they were quoted as saying. You could see he was using a mathematical mind, which is slightly unfair in maths education research. When you quote a mathematical theorem you can use it wholesale, but research in maths education is not quite like that. You always reinterpret others' research. Yet having rigorous standards is good; I guess he also tried to make maths education a science (see Freudenthal, 1978).

In those days, research in mathematics education was mainly about doing pre and post-tests on errors and misconceptions, which seems easier, but Freudenthal, along with many others, moved away from that and based his ideas on student interviews. Nowadays this sounds rather ordinary of course, but at that time it was quite revolutionary. Interviews bring in the student's voice and that really appealed to me.

AB: *That approach also fits well with his idea that mathematics is a human activity - the idea of mathematising. We need a research methodology that acknowledges this mathematical activity.*

CH: Mathematising is absolutely crucial. When you make a model of a situation - and I do not mean modelling in a traditional applied mathematics sense (we call it 'situated modelling') - you get rid of all those aspects that are not so relevant and you can see something you haven't seen before: you see a structure. That is central to mathematics education, although it is often not made clear what the point of mathematising or modelling is. In an ideal world, the point of doing it has to be obvious: you suddenly see something you didn't see before and it is useful to you, surprises you, or enchants you.

What makes me sad sometimes is what has happened to the ideas of great visionary thinkers. The ideas sometimes become trivialised: let's get a context for this and then it is not real anymore. A good curriculum is a nice vehicle in the beginning, but it is not enough. RME is interpreted very widely and it sometimes loses its central meaning, although Freudenthal's goals are clear. I call this neutralisation and, unfortunately, there is no solution to it.

AB: *We have to breathe life into it over and over again. It is like composers and musicians: composers write the music, but musicians have to recreate the music in each performance.*

CH: Yes, but at least you have a community in the Netherlands that tries to do that.

2 Reflection

In this reflection on the interview, I would like to discuss a few interesting points that Hoyles raised.
First of all, why did Realistic Mathematics Education (RME) work in the Netherlands? I think Hoyles is right in that Freudenthal as a famous mathematician putting his energies into education helped in bringing together the mathematics and maths education communities. In addition, however, we also need to look at RME historically. In the 1970s students and their teachers suffered from New Maths in the Bourbaki style, which focussed on set theory and formalisation. It was very dry and there was a lack of reality. Freudenthal with his group got the chance to work on alternatives because the Ministry of Education supported improvement of mathematics education through the development of instructional materials and improvement of mathematics education.
The second point is the role of computers in RME. I never met Freudenthal in person, but from what I have heard from colleagues, he indeed was not very interested in their role for mediating the learning of mathematics.

Perhaps computers could not really do very useful things in education in his days, but I assume that using computer tools was then considered too restrictive for the RME approach.
The third point is the difference in culture. I think Hoyles is right about the importance of having a culture that agrees upon the importance of making mathematics more realistic to kids. In a broader sense I would like to speculate about a cultural difference between the Netherlands and Britain that has made it easier in the Netherlands to develop 'mathematics for all'. What I hear in England is that there is an elitist attitude towards education, which I will try to illustrate with a few examples. First of all, there are large differences between schools in England, and the same holds for universities.

In the Netherlands we do not have such big differences between schools: for example, we hardly have any private schools, which are quite common in England, and many parents perceive these schools as the best (though few can afford them). Another example of the focus on the best is that the UK Government nowadays gives extra funding to schools that specialise in particular topics (science, technology, languages). One school that deliberately did not want to apply for this 'specialist status' received considerable attention in the press (the Guardian, 30-11-2004).
The attention towards 'the best' is also apparent from the huge number of awards and prizes in English education, and the fact for example that the Institute of Education's mission statement is 'to pursue excellence in education'. In the Netherlands it is almost unthinkable to have such a phrase displayed on the building and on every institutional document. In the Netherlands it is much more common to wish to be 'normal'. Yet in mathematics education I think we have paid too much attention to 'mathematics for all', because those students who might have the talent to study mathematics or science at university are not being challenged enough during their school years. Initiatives such as the Junior College Utrecht seem to be a productive countermovement.

References

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing: Preface to a science of mathematical education*. Dordrecht: Reidel.
Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
Noss, R. & C. Hoyles (1996). *Windows on mathematical meanings*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Papert, S. (1982). *Mindstorms: Children, computers and powerful ideas*. London: Harvester Press.
www.ioe.ac.uk/tlrp/technomaths
www.uu.nl/uupublish/homeuu/onderwijs/overigonderwijs/juniorcollegeutr/30984main.html

Vorig jaar ontving Celia Hoyles de eerste Hans Freudenthal-prijs voor onderzoek naar wiskundeonderwijs. Celia Hoyles studeerde wiskunde aan de Universiteit van Manchester, begon haar carrière als leraar in het voortgezet onderwijs en werd daarna universitair docent aan de London Metropolitan University. Eind jaren zeventig werd ze onderzoeker en in 1984 werd ze benoemd tot hoogleraar in wiskundeonderwijs aan het Institute of Education van de Universiteit van Londen. In december 2004 is zij daarnaast benoemd tot hoofdadviseur voor wiskunde aan het Engelse Ministerie van Onderwijs.

HF en de NVORWO

Ed de Moor
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Het was in het voorjaar van 1982 dat professor Freudenthal mij op de gang van het gebouw aan de Tiberdreef 4 te Utrecht, waar het Instituut Ontwikkeling Wiskunde-Onderwijs (IOWO) in 1971 begonnen was, aanklampte en mij op de voor hem karakteristieke wijze toemompelde:

> Zeg De Moor, zouden jullie niet eens een vereniging voor het rekenonderwijs kunnen oprichten? Als je in de toekomst nog eens ergens wat te zeggen wilt hebben, dan moet je een organisatie hebben.

Enkele jaren daarvoor was er ook als eens sprake geweest van een officiële vereniging van reken-wiskundedocenten van de Pedagogische Academies, maar men vond dat toen niet zo relevant omdat deze groep toch meerdere malen per jaren bijeenkwam en omdat men de onderwijskundige belangen in goede handen wist van de medewerkers van het IOWO. Dat waren toen met name F. Goffree en H. Jansen. Na 1981 was er echter heel wat veranderd. Het IOWO was opgeheven, slechts de onderzoekspoot was overgebleven onder de naam 'Vakgroep Onderzoek van het Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computercentrum' (OW&OC). Het ontwikkelwerk van het IOWO was overgeheveld naar de 'Stichting Leerplan Ontwikkeling' (SLO) in Enschede. Zelf kreeg ik een functie bij de toenmalige 'Stichting Opleiding Leraren' (SOL) en kon daar iets van het nascholingswerk van het IOWO voortzetten, thans bekend als het 'Panama-project' (Pabo Nascholing Mathematische Activiteiten). In die functie had ik weer contact gezocht met de vakgroep OW&OC, in het bijzonder met A. Treffers. Samen herstelden wij oude banden met de mensen in het veld, belegden conferenties, zetten een nieuwsbrief (thans het tijdschrift 'Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk - Panama-Post) op en startten nieuw ontwikkel- en onderzoekswerk. Ook Freudenthal deed daar enthousiast aan mee.

Al dit vernieuwingswerk vond zijn start in 1961 toen door de overheid de 'Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde' (CMLW) werd ingesteld. Deze commissie, waarvan E. Wijdeveld jarenlang het secretatriaat voerde, werd net als de later ingestelde commissies voor andere vakken, in 1977 opgeheven en vervangen door 'Adviescommissies Leerplanontwikkeling' (ACLO). Vertegenwoordigers uit het veld zouden op die manier invloed kunnen uitoefenen op het werk dat bij de SLO werd uitgevoerd. Freudenthal zag in 1982 haarscherp dat, indien het basis- en opleidingsonderwijs geen officiële organisatie hadden, er voor deze groeperingen ook geen plaats zou zijn in de ACLO-wiskunde in oprichting. (Deze ACLO-structuur werd in 1986 weer omgezet in 'Veldadvisering Leerplanontwikkeling', thans bekend als VALO). Dat was de feitelijke reden waarom hij mij het idee van het oprichten van een vakvereniging voor rekendidactici influisterde.

Als gevolg hiervan kwamen op 3 juni 1982 in het gebouw van de SOL te Utrecht vijftien rekendidactici bijeen, die de 'Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs' (NVORWO) hebben opgericht. Ikzelf zat de vergadering voor en had vooraf een concept voor statuten opgesteld. Aanvankelijk stelde ik als naam 'Nederlandse Vereniging tot *Bevordering* van het Reken-Wiskunde Onderwijs' voor, maar het is Wijdeveld geweest die de gelukkige ingeving had om 'bevordering' te vervangen door 'ontwikkeling'. Niet alleen bleek later dat dit een veel tactischer naam was, het bleek ook nog beter uitspreekbaar: *En Vee Orwo*. Het eerste bestuur werd gevormd door H. Heidenrijk (voorzitter), Pabo-docent uit Maastricht, W. Faes (penningmeester), Pabo-docent uit Tilburg en ondergetekende als secretaris.

Met een enorm enthousiasme werd de club 'op de kaart gezet', zoals dat tegenwoordig heet. Avond aan avond was er telefonisch overleg tussen de bestuursleden. De werkkracht en ideeënstroom van met name Faes († 2000) waren ongekend. Er werden werkgroepen en afdelingen opgericht, contacten met het Ministerie, Inspectie en schoolbegeleiders gelegd, protestbrieven geschreven over de afbraak van de Pabo, en wat al niet meer ... teveel om op te noemen. Opeens gingen deuren open, die voordien gesloten waren: de NVORWO mocht meepraten over beleid en politiek. Immers, we waren nu een onafhankelijke vertegenwoordiging van het onderwijsveld. Conferenties van Panama vonden plaats onder de auspiciën van de NVORWO. De publicatie 'Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basissschool' in 1989 kreeg een voorwoord van de voorzitter van de NVORWO. Het lukte de vereniging een bijzondere leerstoel aan de Universiteit van Utrecht op te richten. A. Treffers was de eerste hoogleraar op deze plek, die thans door K. Gravemeijer wordt bezet.

En Freudenthal zag dat het goed was. Het eerste doel dat hij voor de oprichting had gesuggereerd, namelijk om een vertegenwoordiger uit de rekendidactiek in de ACLO-wiskunde te krijgen, werd direct bereikt: E. Wijdeveld bezette die plaats. Hoewel Freudenthal zelf geen echte actieman was en ook niet altijd toekomstige ontwikkelingen juist inschatte, bleek hij op dit punt toch een goed oog gehad te hebben. Dit moet, denk ik, voortgekomen zijn uit zijn jarenlange en intensieve bemoeiingen met het rekenonderwijs, de opleiding, de begeleiding, het onderzoek, en vooral door zijn directe en praktische participatie. Hij werkte de ene dag op een basisschool, de volgende op de opleiding, discussieerde met leraren en wetenschappers. Niets was hem ooit te gek als hij maar het gevoel had dat het van betekenis kon zijn voor het doel dat hij voor ogen had: reken-wiskundeonderwijs naar menselijke maat, betekenisvol en zingevend voor zowel leerling als leraar.

Als geen ander zag Freudenthal, van huis uit een puur wiskundige, hoe belangrijk het reken-wiskundeonderwijs is als hechte fundering, zowel voor het latere wiskundeonderwijs als voor de andere vakken en ten behoeve van het praktische leven. Via lezingen en geschriften liet hij zien dat rekenen ook echte wiskunde is. Vanaf 1971 sloeg hij bijna geen conferentie over, hij mengde zich in alle debatten over het reken- en wiskundeonderwijs. Hij liet niet na te waarschuwen tegen verkeerde beslissingen, zoals het opheffen van de oude kleuter-opleidingsscholen en het toen al afnemende aantal uren voor vakinhoud en vakdidactiek op de Pabo's. Al dit soort beleidsmatige en politieke veranderingen, die vooral het opleidingsonderwijs hebben aangetast, heeft hij bekritiseerd, helaas niet altijd met succes. Daarom achtte hij het bestaan van een vereniging als de NVORWO zo belangrijk. Misschien had die er al eerder moeten zijn.
Op 29 maart 1985 werd Freudenthal benoemd tot erelid van de NVORWO. Uit de laudatio van de voorzitter Heidenrijk citeer ik het volgende:

> Door zijn dagelijkse actieve en praktische inzet (...) heeft Hans Freudenthal niet alleen een doorwrochte visie op het reken-wiskundeonderwijs ontwikkeld, maar vooral ook expliciet gemaakt wat wiskunde eigenlijk is, zowel voor de kleuter als de volwassene. Steeds heeft hij zich een fervent tegenstander getoond van de modieuze structuralistische aanpak van het wiskundeonderwijs en heeft hij zich als pleitbezorger opgesteld van een meer toepassingsgericht rekenwiskundeonderwijs. (...). Zijn geschriftenstroom, van columns tot doorwrochte theoretische publicaties, blijft onverminderd doorgaan; in de kritiek op wat niet door de beugel kan, blijft niets en niemand gespaard. Maar in die kritiek gaat hij altijd uit van de praktijk van het onderwijs ...

Zelf was Freudenthal tijdens die jaarvergadering vanwege een reis naar Chicago afwezig, maar hij had tevoren al een dankwoord uitgesproken, waarvan het geluidsbandje gelukkig bewaard is gebleven. Het is op de kop af twintig jaar geleden dat HF, nadat hij eerst verklaard had waarom hij er niet kon zijn, letterlijk zei:

> Het is, denk ik, de eerste keer dat ik bij een manifestatie van de NVORWO verstek moet laten gaan. Maar ik beloof u dat ik mijn best zal doen om herhaling te voorkomen. Ik voel mij in dit gezelschap thuis, zoals ik mij steeds thuis heb gevoeld waar doelmatig en efficiënt wordt gewerkt ten bate van het wiskundeonderwijs.

Toen ik dit bandje weer beluisterde vond ik het wat bizar Freudenthals stem - met dat onvergetelijke accent - weer te horen, maar alras was het alsof ie nooit was weggeweest. Natuurlijk ging hij nog even in op het thema van die dag: meetkunde op de basisschool, dat hij als een belangrijk domein beschouwde, waaraan nog hard gewerkt moest worden.

Ik kan de lezer verzekeren dat Freudenthals woorden oprecht waren en uit zijn hart kwamen. Vijftien jaar eerder had hij mij al eens in een persoonlijk gesprek gezegd dat hij zich juist in de kring van Wiskobas zo op zijn gemak voelde en dat hij binnen de groep van rekendidactici een sfeer van werklust, creativiteit en kritische reflectie had gevonden, die hem ook na zijn pensionering een hernieuwde levenskracht hadden bezorgd. En de kerngroep van de NVORWO kwam voort uit die groep, waarmee het gedachtegoed van die beweging in zekere zin een voortzetting vond. De slotzinnen van zijn speech waren:

> Veel succes met uw bijeenkomst. En van harte bedankt voor de mij betuigde eer, die ik zeer op prijs stel.

Ik vind het nog altijd iets waar de NVORWO trots op mag zijn dat een wetenschapper van wereldfaam, met zes eredoctoraten en wat voor eretitels nog meer, zo in zijn nopjes was met het erelidmaatschap van deze toen nog zo jonge vereniging.

Freudenthal heeft de NVORWO in de daaropvolgende jaren zien groeien. Zelf ondernam hij geen nieuwe initiatieven meer ten behoeve van de vereniging. Wel spraken wij elkaar regelmatig in de kamer van Treffers over de activiteiten die we via de vereniging wilden ontplooien. Zo is er bijvoorbeeld in die tijd een rapport geschreven waarin gepleit werd voor een nationale nascholing voor rekenen-wiskunde voor alle basisschoolleraren. In het opzetten van zo'n plan dacht hij graag mee en indirect kwamen die ideeën ook weer in de publiciteit via onder meer zijn befaamde columns in NRC-Handelsblad. Dit schoot sommigen ook wel eens in het verkeerde keelgat, waardoor OW&OC maar ook de NVORWO wel eens als het 'kerkgenootschap van Freudenthal' werden bestempeld

Bij het vijfjarig bestaan in 1987 telde de vereniging vierhonderdvijftig leden, hoofdzakelijk Pabo-docenten en schoolbegeleiders, maar ook ontwikkelaars en onderzoekers. In het tijdschrift ‘Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk - Panama-Post’ was, en dat is nog steeds zo, een aparte rubriek voor mededelingen van de vereniging ingericht. Het aantal leden-basisschoolleraren was toen nog gering,
Thans tellen we vijfendertighonderd leden, waaronder gelukkig ook heel wat leraren van basisscholen, maar lang nog niet alle. Die aanwas komt vooral doordat het tijdschrift ‘Volgens Bartjens...’ (voorheen ‘Willem Bartjens’) sinds 1999 het officiële orgaan van de NVORWO is. De vereniging wordt allang niet meer als een sekte van volgelingen van Freudenthal gezien. De NVORWO wil voor allen, die zich met het reken-wiskundeonderwijs aan vier- tot veertienjarigen bezighouden, een platform bieden voor discussie, uitwisseling van gedachten en voor verbetering van het reken-wiskundeonderwijs en de betreffende opleidingen.

Ik denk dat Freudenthal, die een sterke affectie had voor sociaal-democratische en humanistische strevingen, deze ontwikkelingen met instemming bezien zou hebben. Anderzijds vraag ik me af hoe hij gereageerd zou hebben op de toestand van het huidige onderwijs. Ik denk dat de almaar groter wordende scholen en opleidingen met de afnemende aandacht voor het persoonlijke, interactieve onderwijs hem een doorn in het oog geweest zouden zijn. Zeker zou hij begrip getoond hebben voor de uitermate moeilijke pedagogische situaties binnen het VMBO. Zijn opvattingen over het leren in heterogene groepen had hij al min of meer verlaten. Het zou mij niet verbazen als hij het thans in zwang zijnde ‘competentiegerichte opleiden’ van leraren, waarin de vakcomponent naar de achtergrond verdwijnt, aan harde kritiek onderworpen zou hebben. Hoe zou hij aangekeken hebben tegen het verschijnsel van het ‘nieuwe leren’ en de ‘Iederwijs’-scholen? Wat zou zijn mening geweest zijn over het gebruik van computers in het onderwijs? Wat zou hij gevonden hebben van het plan om op iedere basisschool een rekencoördinator aan te stellen? Hoe zou hij zijn eens uitgesproken voorspelling dat het wiskundeonderwijs in 2000 verdwenen zou zijn, thans interpreteren?

Het zijn allemaal vragen, waar ook de NVORWO direct of indirect mee te maken heeft en waarin de vereniging een standpunt moet innemen. Bij de beantwoording daarvan, bij het geven van adviezen en bij het nemen van cruciale beslissingen, is het altijd goed om een even achterom te kijken of we wat van het verleden kunnen leren. Vernieuwingen en veranderingen hebben de meeste kans van slagen als ze geleidelijk gaan en in een zekere traditie staan. Ook Freudenthal, die een grote kennis had van de historie van het onderwijs, besefte dit maar al te goed. Vanuit die achtergrond heeft hij waarschijnlijk ook zijn boodschap om de NVORWO op te richten bedoeld. De NVORWO zal hem daarvoor altijd dankbaar blijven.

De (on)navolgbare Freudenthal

Adri Treffers
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Freudenthal wordt de laatste tijd een welhaast mythische grootheid toegedicht. Daarmee doet men hem echter schromelijk tekort. Zijn onmiskenbare statuur op het gebied van het reken-wiskundeonderwijs kent een menselijke maat. Aan de hand van vijf kernvragen wordt gepoogd een reëel beeld van die maat te tekenen. Met name de (impliciete) onderwijstheorie van de veelsporige aanpak die in zijn blauwdruk van de breukenleergang tot uitdrukking komt, krijgt veel aandacht. Ook de twijfels die Freudenthal had over zijn eigen betekenis voor de ontwikkeling en het onderzoek van reken-wiskundeonderwijs worden belicht.
In een reflectieve terugblik komt tevens de impact van Freudenthals gedachtegoed aan de orde. Ik eindig met een persoonlijke noot.

1 Inleiding

Heeft Freudenthal wel echt bestaan? Soms twijfel ik daar aan. Hebben we hier niet met een creatie à la Bourbaki van doen? Je zou het haast geloven als je over hem hoort en leest de laatste tijd. Op het symposium '15 jaar Onderwijskunde Utrecht' in 1980 sprak Hans Freudenthal de volgende gedenkwaardige woorden.

> … De mode van de dag zijn leertheorieën. 'Welke leertheorie hangt gij aan?' - een vraag waarop je als onderwijskundige met een antwoord moet klaarstaan zoals vroeger op een vraag naar je belijdenis. Als auteur van een proefles of een leerboekenreeks of een curriculum strekt het je in elk geval tot aanbeveling als je vermeldt of betoogt dat het werkstuk is opgezet volgens de leertheorie van, zeg, Gagné of Gal'perin - om je dan tot die goden te beperken die in de dictionaire het dichtst bij 'God' staan … (1982, pag.8)

Thans heeft hijzelf die status bereikt: zijn initialen *H.F.* omsluiten de *G*. Hoe is anders te verklaren dat men hem nu ook al in de kring van het Nieuwe Leren en het nog nieuwere Natuurlijke Leren begint te citeren?

> ... Hoe zal het wiskundeonderwijs er in 2000 uitzien? Er is een simpel antwoord. Er is geen wiskundeonderwijs meer in 2000, het is verdwenen. Er is geen vak meer wiskunde geheten, geen wiskundeles op het rooster, geen wiskundeonderwijs om te onderwijzen. (…) Het is er om beleefd en uitgeleefd te worden, net als lezen, schrijven, knutselen, tekenen, zingen, ademhalen, in een geïntegreerd onderwijs ... (1977, pag.294)

Met deze hyperbool wist de wiskundige Hans Freudenthal nadrukkelijk de aandacht op een fundamenteel onderdeel van zijn onderwijsvisie te vestigen: wiskunde leren door mathematiseren in een rijke context.

Het was Freudenthal die bij de oprichting van het IOWO in 1971 de Wiskobas-afdeling van het basisonderwijs op het spoor van het realistische reken-wiskundeonderwijs zette, weg van het verschraalde traditionele rekenonderwijs en weg ook van de opkomende 'New Math'. Dat rekenen op de realiteit en de werkelijkheid van kinderen betrokken kan worden, was in het traditionele onderwijs steeds meer uit zicht geraakt, om over the 'New Math' die vanaf het midden van de jaren zestig opgang maakte maar te zwijgen: verzamelingen, relaties, transformaties, talstelsels, redeneren met logiblokken …
Kenmerkend voor Freudenthals basisopvatting was niet alleen dat hij de 'beleefde' werkelijkheid van kinderen binnen het reken-wiskundeonderwijs wilde halen, maar vooral dat hij die rijke context van de realiteit niet alleen als toepassingsgebied doch ook als bron van het leren liet fungeren. Het citaat over geïntegreerd onderwijs dient dan ook primair vanuit dit standpunt te worden begrepen.

Stond Freudenthal destijds alleen met zijn visie? Was hij een eenzame tamboer, een trommelaar voor dovemansoren, zoals in 'Schrijf dat op Hans' staat (1987, pag.362)? Welke specifieke bijdrage heeft Freudenthal aan de praktische ontwikkeling en theorievorming van het realistisch reken-wiskundeonderwijs geleverd? In hoeverre zijn Freudenthals ideeën en voorstellen door zijn medewerkers gevolgd? Omgekeerd: op welke punten is Freudenthal beïnvloed? Hoe heeft Freudenthals gedachtegoed na 1990 doorgewerkt?
Dit zijn de kernvragen die hier aan de orde worden gesteld.

In de beantwoording daarvan zal een menselijker beeld van Freudenthal naar voren komen dan het mythische imago dat hij thans vaak krijgt toebedeeld en waaruit mijn gevoel van vervreemding uit de aanhef ontspruit.

2 Voorgeschiedenis

De onstuitbare opmars van de abstracte 'New Math' begon op het fameuze Royaumont-congres in 1959. Veel landen uit de westerse wereld hadden regeringsvertegenwoordigers naar dit Oeso-seminar gestuurd. De structuralistische onderwijsvisie die daar werd uitgedragen, kreeg snel aanhang onder wiskundigen uit het Bourbaki-kamp, steun van onderwijsonderzoekers, ontwikkelaars, uitgevers, lerarenorganisaties, en bijval van befaamde psychologen als Piaget en Bruner. In 1962 publiceerden de tegenstrevers van de 'New Math', waaronder de vermaarde mathematen Ahlfors, Birkhoff, Courant, Coxeter, Polya, Weil en tientallen anderen, een geruchtmakend memorandum. Daarin komen uitspraken voor als:

> ... Therefore, to introduce new concepts without a sufficient background of concrete facts, to introduce unifying concepts where there is no experience to unify, or to harp on the introduced concepts without concrete applications which would challenge the students, is worse than useless: premature formalization may lead to sterility.
> The best way to guide the mental development of the individual is to let him retrace the mental development of the race - retrace its great lines, of course, and not the thousand errors of detail ... (1962, pag.192)

Deze citaten zouden zo uit de koker van Freudenthal kunnen komen: de realiteit als bron en toepassingsgebied bij het mathematiseren volgens de productieve methode van de geleide heruitvinding. De tegenbeweging slaagde er echter niet in om een dam tegen de aanzwellende golfstroom van de 'New Math' op te werpen. Als door een wonder werd vrijwel alleen het Nederlandse basisonderwijs er niet door overspoeld. Hoe was dat mogelijk?
Het geheim van deze vrijwaring schuilt in de onderwijsontwikkeling die vanaf 1967 door de Wiskobasbeweging alhier onder de inspirerende leiding van Goffree en Wijdeveld werd gerealiseerd. Wiskobas slaagde er met behulp van de onderwijsinspectie in de invoering van nieuwe reken-wiskundemethoden af te remmen, en later zelfs tot staan te brengen - internationaal bezien een unieke prestatie.
Freudenthal stond hier aanvankelijk volledig buiten. Sterker: in 1968 werd hij adviseur bij de vertaling en bewerking van een (milde) 'New Math'-methode (Eichholz e.a., 1970). Hiermee volgde hij zijn gewoonte zich niet afzijdig te houden maar mee te werken om te kunnen bijsturen onder het motto: 'if you can't beat them, join them.' Kennelijk was hij toentertijd door drukke werkzaamheden niet goed op de hoogte van de actuele ontwikkelingen in het rekenonderwijs op de basisschool en de rekendidactiek van de Pedagogische Academie.
Nadat Freudenthal in september 1969 Van der Blij als voorzitter Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) opvolgde - en per 1 januari 1970 'de facto' als zodanig ging functioneren - bezocht hij in februari 1970 voor het eerst een Wiskobasconferentie. Getroffen door het enthousiasme van de deelnemers - inspecteurs van het basisonderwijs - zal hij zich daar gerealiseerd hebben dat er grote mogelijkheden lagen om los van de 'New Math' tot een radicale vernieuwing van het rekenonderwijs en de rekendidactiek te kunnen komen. Maar dan was het wel noodzakelijk dat die landelijk en regionaal georganiseerde Wiskobasbeweging een institutionele basis zou krijgen. Freudenthal was al sinds de start van de CMLW in 1961 voorstander van een instituut voor ontwikkeling van het wiskundeonderwijs (IOWO). Dáárvoor ging hij zich nu samen met de Wiskobasstaf inzetten.
Begin 1971 werd door staatssecretaris Grosheide inderdaad toestemming verleend om zo'n instituut op te richten. En in de lente van dat jaar besloot Freudenthal als hoogleraar-directeur van het IOWO in dienst te treden. Wiskobas werd een afdeling van dit instituut, maar de band met de Wiskobasbeweging in het onderwijsveld bleef uiteraard bewaard. En zo kwam het idee van de integrale, ruim opgezette onderwijsontwikkeling tegelijk met Wiskobas het IOWO binnen.

Dit concept om de vernieuwing van het wiskundeonderwijs op een breed front aan te pakken door middel van de opleiding van onderwijsgevenden, via nascholing en kadervorming, door onderzoekend ontwikkelen op een ontwerpschool, door middel van beïnvloeding van methoden en leerplannen, met steun van de onderwijsinspectie en in samenwerking met geëigende instanties en organisaties, sprak Freudenthal bijzonder aan.
Tien jaar later, in een plenaire lezing op de ICMI in Berkeley over 'Major Problems of Mathematical Education' sprak hij terugblikkend op de hem bekende wijze:

> Curriculum development viewed as a strategy for change is a wrong perspective. My own view, now shared by many people is educational development.' (1981, pag.149)

Terug naar de start van het IOWO: Freudenthal kon nu beginnen om zijn visie op mathematiseren via het ontwikkelen van onderwijs proberen te realiseren.

3 IOWO-periode (1971-'81)

Wat was Freudenthals specifieke bijdrage aan het ontwikkelen van thema's en leergangen gedurende de integratiefase (1971-'75) en de fase van de voortgezette opbouw (1976-' 81)?
In 'Mathematics as an Educational Task' (1973, pag.132) schrijft hij:

... The globally structuring force, as we called it, should be lived through reality. Only this way can we teach mathematics fraught with relations, can we be sure that the students integrate the mathematics be learned, and can we guarantee the applicability of mathematics ...

Het is zonneklaar dat de geïntegreerde, thematische benadering van het reken-wiskundeonderwijs zeer wel bij deze grondgedachte over mathematiseren past, of sterker, er zelfs door gestimuleerd wordt.
De 'IOWO-snapshots' die in 'Educational Studies in Mathematics' ter gelegenheid van Freudenthals afscheid als hoogleraar-directeur (1976) werden gepubliceerd, getuigen daarvan: Waterland, een eiland van meten en meetkunde; Schip Ahoy; Onze Aarde; Gulliver; Breukelerdam … Daarin komt tot uitdrukking dat realistisch reken-wiskundeonderwijs op geïntegreerde kennis, vaardigheden en kundigheden mikt, zowel ten aanzien van de puur vakmatige leerstof als voor de verbindingen daarvan met toepassingssituaties in de realiteit. De geïntegreerde thema's vervullen zogezegd een specifiek horizontale functie, wat wil zeggen dat ze primair mikken op het toepassen, beoefenen en verbinden van geleerde kennis en vaardigheden in de betreffende contextsituaties. Als zodanig onderscheiden ze zich van (deel)leergangen die vooral ook een verticale mathematiseringsfunctie vervullen en gericht zijn op formaliseren en structureren binnen het vaksysteem.

Dit onderscheid in horizontaal en verticaal mathematiseren (Treffers, 1975) diende er mede toe om het belang van het geïntegreerde onderwijs dat in de eerste fase tot 1975 zoveel aandacht kreeg, tot de juiste proporties terug te brengen: thema's zijn belangrijk, maar overaccentuering ervan leidt tot empiristisch wiskundeonderwijs met te weinig aandacht voor verticaal mathematiseren (zie ook De Lange, 1979). De genoemde nadruk was trouwens alleszins begrijpelijk. Ten eerste ging van dit onderwijs een grote innovatieve werfkracht uit. Ten tweede paste de geïntegreerde benadering perfect bij de nieuwe leerstofdomeinen van meten en meetkunde. En ten derde vroeg het ontwikkelen van thema's veel minder tijd dan het uitlijnen van nieuwe leergangen. Met name het laatstgenoemde punt was, gelet op het feit dat in 1975 een nieuw voorbeeld van een schoolwerkplan beschikbaar moest zijn, van grote praktische betekenis.
Al met al kan men concluderen dat Freudenthals integratieve opvatting ten aanzien van het mathematiseren, die mede geïnspireerd is op het werk van Decroly, een stempel op het werk van Wiskobas drukte in de eerste fase tot 1975. Zijn magistrale fenomenologische analyse van 'Verhoudingen', die in 1973 intern werd gepubliceerd, doet hieraan niets af. Want via dit onderwerp werden speciaal verbindingen binnen en tussen de onderdelen van rekenen, meten en meetkunde gelegd, en als zodanig stond ook hier de integratieve functie voorop.

In de periode 1976-'79 schreef Freudenthal fenomenologische beschouwingen over lengte meten, oppervlakte, natuurlijke getallen en breuken. Die analyses bevatten geen theorie van het onderwijs op de genoemde terreinen, doch geven gedetailleerde beschrijvingen van de betreffende wiskundebronnen in de werkelijkheid, de reële verschijningsvormen van wiskundige begrippen en structuren. Ze hadden tot doel de leergangontwikkeling bij de genoemde onderwerpen te ondersteunen. En inderdaad: bij meten, en eerder al bij verhoudingen en aanvankelijk rekenen, vervulden ze de beoogde functie - onderwerpen die volgens hun specifieke aard een hechte band met de realiteit onderhouden.
Maar hoe staat het met de fenomenologische analyse van breuken; fungeerde die eveneens als baken voor de leergangconstructie?
Deze vraag kan eenvoudig worden beantwoord omdat Freudenthal zelf zo'n 'rijke didactische sequentie voor het breukrekenen' (1984) heeft geschreven - de enige blauwdruk van een leergang die hij ooit ontwierp! We zullen hier wat langer bij stilstaan, omdat daarin niet alleen zijn algemene visie op reken-wiskundeonderwijs, maar ook de contouren van zijn (impliciete) onderwijsleertheorie zichtbaar worden. En dat nog wel voor een leerlijn die als de meest complexe van het totale rekenwiskundeonderwijs bekend staat! Zijn verzuchting dienaangaande spreekt wat dat betreft voor zich:

... Het hoofdstuk Breuken heb ik al enkele keren binnenstebuiten gekeerd. Het is de overvloed aan fenomenen, door breuken en bewerkingen met breuken vertolkt, die het me zo moeilijk maakt (…) Mijn opzet is dus de breuken in hun volle fenomenologische weelde te presenteren, en ik kan slechts hopen, dat ik zelf niet in die overvloed verdrink …' (1984, pag.146)

Dan volgt een diepgaande ontleding van het verschijnsel breuk: de breukoperatie en de breukrelatie beide werkend op objecten, hoeveelheden en grootheden; de breuk als deel van een geheel dan wel in een verhouding; de breuk als maat en als rationaal getal …
Bij eerste kennisname valt op dat de leergang sterk afwijkt van de traditionele aanpak: eerst komen, na het eerlijk verdelen, vergroten en verkleinen met een hele factor aan bod, vervolgens het vermenigvuldigen en delen, en pas dan verschijnen het vergelijken, aftrekken en optellen van breuken. Ook worden geen handelingsrecepten verstrekt of rekenregels voorgeschreven. Voorts springt de veelvormige visuele ondersteuning in het oog: (dubbele) getallenlijnen, boomdiagrammen, stroomdiagrammen, roosters en rechthoeken.
Al met al een veelsporige benadering:

... Bij het natuurlijk getal is de veelsporigheid van de instap traditionele regel. Bij de breuken veronderstelt men de leerlingen ver genoeg gevorderd, om ze met één instap vanuit de realiteit genoegen te laten nemen. Voor mij is dit de oorzaak waarom breuken slechter functioneren dan natuurlijke getallen, waarom er zo velen zijn, die nooit breuken leren ... (1984, pag.146)

Eerder al verwoordde Freudenthal (1968) zijn bezwaren tegen de gangbare aanpak van het breukenonderwijs en gaf hij aan hoe de breukendidactiek naar zijn idee gestalte moest krijgen: startend vanuit de realiteit als bron, in gevarieerde contexten met een brede begripsinbedding en veelsporig optrekkend - net als bij het aanvankelijk rekenen.
Hoe pakte dit radicaal vernieuwde breukenonderwijs van Freudenthal uit? Dat weten we niet, om de simpele reden dat zijn opzet van de breukenleergang nooit in de onderwijspraktijk werd beproefd! Waarom is dit nooit gebeurd? Om deze intrigerende vraag bevredigend te kunnen beantwoorden, moeten we eerst een onderwijstheoretisch uitstapje maken.

4 Ontwikkeling, onderzoek en theorievorming (1981-'91)

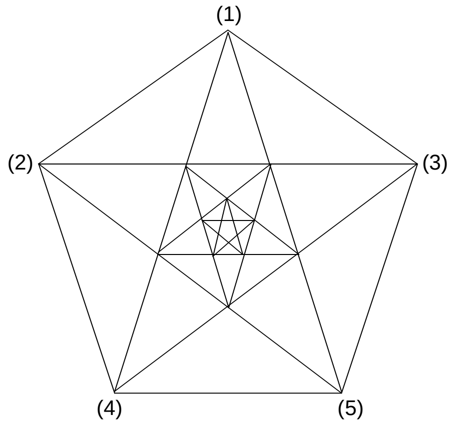
Freudenthals reserve ten aanzien van algemene onderwijsleertheorieën als die van Gagné en Gal'perin is genoegzaam bekend. Toch heeft met name de onderwijstheorie van Gal'perin invloed op Wiskobas uitgeoefend bij de leergangontwikkeling van kolomsgewijs, cijferend rekenen (Van Bruggen, 1975; De Jong, 1977). Tevens heeft zijn onderwijstheorie van de trapsgewijze ontwikkeling van mentale handelingen mede het denken over onderwijsleerniveaus gestimuleerd.
De specifieke niveautheorie van Van Hiele betreffende het meetkundeonderwijs, waar Freudenthal veel waardering voor had, is door hem nooit prominent aan de orde gesteld. Kennelijk zag hij niet hoe een generalisatie van deze theorie op het reken-wiskundeonderwijs betrokken kon worden. In de eerdergenoemde ICMI-rede 'Major Problems of Mathematics Education' poneert hij dan ook:

> ... My seventh major problem of mathematics education is: How is mathematics learning structured according to levels and can this structure be used in attempts at differentiation?… (1981, pag.145)

In elk geval is zijn ontwerp van de breukenleergang niet volgens een niveau-indeling opgezet. En ook in de leergangen die Wiskobas in de IOWO-periode ontwikkelde, was zo'n structurering nog niet duidelijk te onderkennen, al waren daartoe bij het memoriseren en automatiseren wel aanzetten zichtbaar. Zo was de onderwijstheoretische stand van zaken omstreeks 1980 bij de opheffing van het IOWO.

In de jaren die volgen, in de post-Wiskobasperiode tot 1990, had Freudenthal geen directe bemoeienis meer met het ontwikkelingsonderzoek dat zich toespitste op de domeinen van het aanvankelijk rekenen, het leren van de tafels van vermenigvuldiging, het cijferende vermenigvuldigen en delen, en het breukrekenen (Van den Brink, 1989; Ter Heege, 1985; Dekker e.a. 1982; Streefland, 1988). In 1985 waren deze studies zo ver gevorderd dat hun gemeenschappelijke opzet zichtbaar werd en in een theoretisch raamwerk van vijf onderwijsprincipes kon worden geplaatst die in steeds kleinere vijfhoekkaders van leergangen, lessenseries en lessen doorwerken (Treffers & Goffree, 1985, pag.110).

> ... Realistic curricula are distinguished from non-realistic ones on the following points (fig.1):
> (1) the dominating place occupied by contextproblems, serving both as source and as field of application of mathematical concepts;
> (2) the broad attention paid to (the development of) situation models, schemas and symbolising;
> (3) the large contribution children make to the course by their own productions and constructions, which lead them from the informal to the formal methods;
> (4) the interactive character of the learning process;
> (5) the firm intertwining of (related) learning strands ...



figuur 1

De eerste drie principes bevatten een niveautheoretische triade die in alle genoemde leergangen wordt gevolgd (Treffers, 1987):
1 vanaf informeel, contextgebonden werken,
2 via semi-formeel, modelondersteund handelen,
3 naar formeel, vakmatig opereren.
De specifieke handelingen op deze formele niveaus worden per domein inhoudelijk gevuld met de betreffende wiskundige structuren en toepassingen daarvan.
Met behulp van dit onderwijstheoretische kader, waarin ook Freudenthal zich goed kon vinden, kan duidelijk worden gemaakt waarom zijn breukenleergang niet nader werd beproefd en waarin zijn voorstel verschilt van de leergangen die Wiskobas toentertijd ontwikkelde, in het bijzonder de breukenleergang van Streefland (1988).
Daartoe moeten we eerst enkele opmerkingen maken over de wijze waarop de betreffende Wiskobasleergangen op basis van een fenomenologische en een conceptuele analyse werden ontworpen en via ontwikkelingsonderzoek in een definitieve vorm gezet.

De fenomenologische analyse dient ertoe om de brede begripsvulling te waarborgen en de toepasbaarheid van het geleerde hecht te funderen.

De conceptuele analyse identificeert de sleutelbegrippen, zet de bakens van de leergang uit en zoekt de passende modelcontexten die in de trapsgewijze opbouw als contextmodellen kunnen gaan fungeren. Deze analyse is onderwijstheoretisch geladen. Daarin wordt mede bepaald of en hoe bij het verticale mathematiseren de concrete oriënteringsbasis door één, twee dan wel meerdere modelcontexten wordt gevormd.

In de genoemde Wiskobasleergangen is voor een brede *toe*gang, een smalle *op*gang en een brede *voort*gang gekozen - een praktisch uitvoerbare aanpak.

Een voorbeeld: in de breukenleergang van Streefland fungeert, na een eerste verkenning, het gevarieerde eerlijk verdelen bij gelijkwaardige tafelschikkingen als modelcontext om het begrip equivalentie te verwerven dat bij het vergelijken, aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken een sleutelfunctie vervult. De betreffende tafelschikking wordt met een pictogram uitgebeeld, waarin de verbinding tussen de modelcontext en de breuk duidelijk tot uitdrukking komt. De modelcontext *van* de verdelingssituatie gaat al doende als contextmodel *voor* het formele opereren fungeren in casu het vergelijken, aftrekken en optellen van ongelijknamige breuken, en wordt daarbij visueel ondersteund door de getallenlijn en het genoemde metonymische symbool in relatie tot de breuknotatie.[1] Kinderen krijgen een productieve inbreng in het interactieve onderwijsleerproces, wat wil zeggen dat ze een cruciale bijdrage aan de inhoud en inrichting van het onderwijsleerproces leveren: ze verwerken de aangeboden leerstof op hun eigen, specifieke manier en ontwerpen ook zelf opgaven die ze vervolgens alleen of met elkaar oplossen. Daarbij kan, waar nodig, de genoemde modelcontext van het gelijkwaardige eerlijk verdelen als concrete oriënteringsbasis fungeren.

Terug nu naar de vraag waarom Freudenthals ontwerp niet verder voor de onderwijspraktijk is uitgewerkt. Verschilt zijn aanpak essentieel van het Wiskobasontwerp? Dat is inderdaad het geval, althans essentieel verschillend binnen hetzelfde vijfhoekige onderwijstheoretische kader. En dan niet omdat Freudenthal het vergroten en verkleinen, en vervolgens vermenigvuldigen en delen, in plaats van het vergelijken, aftrekken en optellen vooropstelt. Nee, het gaat erom dat Freudenthals leertraject in drieledige zin veelsporig is, wat wil zeggen dat hij niet alleen voor een brede toegang kiest maar ook voor een brede opgang en voortgang opteert.

Terwijl, als gezegd, bij de Wiskobasleergangen betreffende het memoriseren, het automatiseren en algemeen het opereren, na de brede begripsinbedding, een één- à tweesporige verticale mathematisering volgt en daarna weer een brede voortgang ten behoeve van de toepasbaarheid - dit is het eerste verschil met Freudenthals concept. Het tweede belangrijke onderscheid, dat daarmee samenhangt, heeft betrekking op de modelcontext die bij Streefland een dominante plaats krijgt toebedeeld, terwijl zo'n krachtig paradigma bij Freudenthal ontbreekt. Zoals gezegd, is het laatstgenoemde nadrukkelijk niet het gevolg van het feit dat hij vergroten en verkleinen vooropstelt. Want ook bij zo'n aanpak zou een trapsgewijze opbouw met één richtinggevende modelcontext passen - bijvoorbeeld die van de tafelschikkingen waarin het aantal pizza's of het aantal personen multiplicatief wordt gewijzigd waardoor de uitkomsten met een bepaalde factor worden vergroot dan wel verkleind; samenstelling van een en ander kan zowel naar equivalentie als naar vermenigvuldigen van breuken leiden.

Heeft Freudenthal deze smalle opgang over het hoofd gezien? Of stond hij niet achter dit concept van het verticale mathematiseren? In ieder geval heeft hij in het aanvankelijk rekenen voor dezelfde benaderingswijze als bij breuken gekozen, of beter, omgekeerd. Vermenigvuldigen van hele getallen bijvoorbeeld benaderde hij eveneens veelsporig via herhaald bijvoegen, springen, maatverandering, vergroten, combineren, kruisen, oppervlakte bepalen en zo meer (1984). Terwijl deze brede begripsinbedding bij Wiskobas in de jaren tachtig bij het leren van de tafels wordt doorbroken met een smalle opgang van herhaald bijvoegen, dat met behulp van de getallenlijn en de rechthoek wordt gevisualiseerd, waarna vervolgens weer een uitbreiding van de toepassingen plaatsvindt. Overigens hebben de genoemde verschillen in opvatting geen betrekking op meten en meetkunde. De specifieke aard van deze wiskundedomeinen vragen een didactiek die zich niet zonder meer met het kernbegrip veelsporigheid laat beschrijven (zie De Moor, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2004). Is zijn (impliciete) onderwijstheorie van het driezijdig veelsporige mathematiseren bij het *rekenen* later nog ter discussie gesteld of bijgesteld?

In dit verband is het gesprek dat op 11 augustus 1989 plaatsvond wellicht van belang.

We zouden even een artikel van A. Bishop bespreken over internationale aspecten van onderwijsresearch, die gedenkwaardige vrijdag in augustus 1989. Maar het gesprek pakte totaal anders uit. Volkomen onverwacht bracht Freudenthal zijn rol en invloed op de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs ter tafel. In het bijzonder de taken die hij, naar zijn mening, niet goed genoeg had uitgevoerd: 'Je twijfelt wel eens: heb ik het wel goed gedaan?'

Als eerste kritische punt noemde hij de grote nadruk die het Wiskobasteam en ook hijzelf in de jaren zeventig op geïntegreerd, thematisch onderwijs hadden gelegd: 'We moesten veel leren.' Voorts vond hij dat hij te laat op de noodzaak had aangedrongen om nieuwe leergangen te ontwikkelen. En in zoverre hij zich daar zelf mee had ingelaten - bij breuken bijvoorbeeld - dat de ideeën daarover soms een te zware wissel op ontwikkelaars en onderwijsgevenden hadden getrokken: 'Was ik niet te onpraktisch, te idealistisch? Heb ik de ontwikkeling niet opgehouden?'

Mijn reactie liet zich raden: ik achtte zijn twijfels niet gerechtvaardigd. En voorzover ze dat wel waren, betroffen die het Wiskobasteam als geheel en zeker niet hem alleen. Daar kwam nog bij dat we zijn ideeën soms op een andere wijze vormgaven (bij breuken bijvoorbeeld) of in enkele gevallen zelfs terzijde schoven (tafels, cijferend vermenigvuldigen). En ook bij de theorievorming hadden we onze eigen weg gevolgd. Wel bouwden we tot vandaag voort op de fundering die hij vanaf het begin van de IOWO-periode had gelegd. Met zijn realistische onderwijsvisie, zijn aanwijzing over het observeren van leerprocessen (ook van jezelf) als didactisch middel, zijn fenomenologische beschouwingen over het aanvankelijk rekenen, verhoudingen en meten, zijn aandacht voor probleemoplossen, zijn kritische kijk op algemene onderwijsleertheorieën en zo meer.

Maar we waren hem niet in alle opzichten gevolgd en dat was ook niet wat hij zonder meer wilde. Ik herinnerde Freudenthal aan een gesprek in het voorjaar van 1973 tijdens een Wiskobasbijeenkomst in Noordwijkerhout waarin hij mij op het hart drukte dat het Wiskobasteam hem niet als een onaantastbare grootheid moest beschouwen, maar dat ook zijn ideeën kritisch bezien dienden te worden. Dat is, met alle respect, precies wat we deden en waarvoor hij ons alle ruimte had gegeven: praktisch haalbare ontwerpen maken.

Om half één verliet Freudenthal zichtbaar opgelucht mijn kamer, waar ik, beduusd, nog even bij moest komen van de wonderlijke wisseling van rollen die zich onverwacht in dit tweegesprek had voorgedaan.

De vroegere en wellicht deels nog bestaande verschillen van inzicht over het memoriseren, het automatiseren en de leergangontwikkeling waren op die dag nog eens ter tafel gekomen. Maar de cruciale kwestie over de veelsporige benaderingswijze van leergangen bleef verder onbesproken. Hoe dacht Freudenthal daar anno 1989 eigenlijk over?

5 China Lectures (1991)

Biedt 'Revisiting Mathematics Education. China Lectures.', Freudenthals monumentale laatste werk wellicht wat meer duidelijkheid over de kwesties die hier zijn aangestipt?

Dat is inderdaad het geval. Om te beginnen over de structuur van leergangen, speciaal de één- dan wel veelsporige opgang daarin, met de breuken als paradigma:

> ... Streefland's approach towards fractions, within one single but deeply excavated context, is promising, although it has not been continued as far as to reach formal fractions ... (1991, pag.72)

Een voorzichtig positief oordeel dus over een didactische aanpak die hij vroeger zelf niet volgde, of sterker, over een onderwijstheoretische uitwerking die hij tot nu toe niet onderschreef of althans anders gestalte gaf. Over het belang van het éénsporige algoritmiseren laat hij overigens geen enkele twijfel bestaan, maar dat is niet nieuw; net zomin als zijn waardering voor de nieuwe ontwikkelingen op onderwijstheoretisch terrein (1987).

Wel nieuw is zijn opvatting over leerniveaus.

> ... I always knew that my levels differed from those of the Van Hieles and at many opportunities I stressed this and at many occasions; my levels were relative rather than absolute ones, I said, although I gave Pierre Van Hiele the full credit for the level idea as such. I should confess that never before have I as consciously considered that difference as I am doing now. (…) When I hit on reflection as the thing responsible for the jumps in the learning process, the road was prepared for as many discontinuities and levels in a multitude of learning processes as there are significant occurrences of reflection ... (1991, pag.101)[2]

In deze beschouwingen over reflectie en niveaus ballen zich vrijwel alle *major problems* samen die Freudenthal tien jaar eerder op het ICMI-congres formuleerde. Wat is reflectie? Hoe manifesteert reflectie zich? Hoe kan het onderwijs reflectie bij leerlingen en de leraar zelf stimuleren?

Maar de eerste vraag die zich na lezing van Freudenthals diepgaande betoog over leerniveaus opdringt, is toch wel - om mijn eigen terminologie te hanteren - hoe het progressieve mathematiseren per domein concreet kan worden ontleed. Want het is duidelijk dat we met een algemene beschouwing over microniveaus geen didactisch voordeel kunnen behalen indien ons niet duidelijk voor ogen staat op welke componenten van de wiskundige handelingen die sprongen in het leerproces betrekking hebben.

6 Intermezzo: reflectieve terugblik op niveau

Op welke componenten van de rekenhandelingen in bijvoorbeeld het getallengebied tot 100 kan de (sprongsgewijze) voortgang in het leren zich manifesteren? Dit kernprobleem van Freudenthal heeft velen (Menne, 2001; Buys, 2005; en anderen) aan het denken gezet. De uitkomst daarvan komt, wat mijzelf betreft, kort gezegd hierop neer dat drie basiscomponenten in de rekenhandelingen worden onderscheiden:

– de abstractiegraad;
– de aard;
– de algemeenheid van de betreffende handelingen.

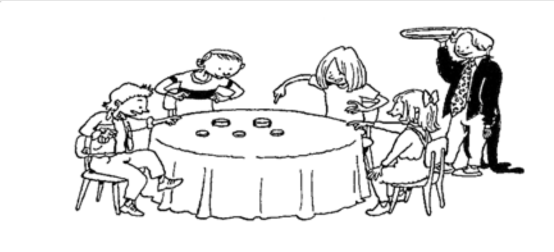
Deze hebben betrekking op het toenemende formaliseren, structureren en toepassen in dit getallendomein.

De progressie in het *formaliseren* beweegt zich binnen en langs de eerdergenoemde stadia van het informele, contextgebonden handelen via het semi-formele, modelondersteunde rekenen naar het formele, vakmatige opereren. Naast en met de contextopgaven vervullen bij optellen en aftrekken bijvoorbeeld met name fysieke bewegingen, tel- en positiematerialen, het visuele model van de (lege) getallenlijn plus een notatieschema als het pijldiagram, een cruciale intermediaire functie. Anders gezegd: de brugfunctie van het modelleren kan op verschillende wijzen gestalte krijgen via contextualiseren, schematiseren en symboliseren, waarbij de leerlingen een belangrijke productieve inbreng hebben.

De voortgang in het structureren vertoont zich bij het (verkort) tellende rekenen, het (decimaal) splitsende rekenen en het (handige) flexibele rekenen en de overgangen daartussen. Het tellende rekenen sluit aan bij het elementaire opzeggen van de telrij, het synchrone bewegen daarbij op een (denkbeeldige) getallenlijn, en het resultatieve tellen van hoeveelheden en grootheden; het is gebaseerd op kennis van de structuur van de telrij en van elementaire rekenfeiten. Bij het splitsende rekenen wordt de tientallige positionele schrijfwijze handig benut; het berust op begrip van het positiesysteem en op kennis van elementaire rekenfeiten. En het flexibele rekenen kenmerkt zich door het inzichtelijke gebruik van de eigenschappen van de basisbewerkingen en de relaties ertussen. Deze drie structuren laten een toenemende complexiteit van de betreffende rekenhandelingen zien: tellen is elementairder dan bijvoorbeeld het doorzien van de relatie tussen aftrekken en (aanvullend) optellen. Ieder van de genoemde handelingsstructuren kan met de onderscheiden formaliseringsniveaus gecombineerd worden. En ze zijn er ook ieder op gericht om via progressief mathematiseren het derde niveau van het formele, vakmatige opereren te bereiken. Daarbij vervult, zoals gezegd, het modelleren in verschillende vormen een belangrijke brugfunctie.
De toename van de toepasbaarheid manifesteert zich in de steeds grotere verscheidenheid van de reële verschijningsvormen waarop de rekenvaardigheden kunnen worden toegepast doordat men in staat is in de betreffende contextopgaven de essentieel wiskundige structuur te onderkennen. De didactische fenomenologie van Freudenthal, maar ook de Wiskobasmaterialen en de realistische reken-wiskundemethoden bevatten een rijke bron aan voorbeelden waarmee de begripsvorming kan worden verbreed en de toepasbaarheid vergroot. Ook in de reikwijdte en complexiteit van de contextopgaven kan per operatie globaal een ordening worden aangebracht: in herhaald optellen bijvoorbeeld wordt makkelijker een vermenigvuldiging ontdekt dan in een combinatieopgave. Net zoals voor probleemoplossen geldt, namelijk dat je dat leert door problemen op te lossen, kun je van het vergroten van de toepasbaarheid beweren dat je dit bereikt door toepassingen te maken en de oplossing ervan samen te bespreken. Daarbij dient dan uiteraard de mate van complexiteit bij de didactische ordening in het oog te worden gehouden.

Toen deze drie parameters met hun onderverdelingen, die ieder ook weer verder verfijnd kunnen worden, waren geïdentificeerd en voor de ontwikkeling van het onderwijs benut konden worden, was het mogelijk om de potentiële voortgang van het leren bij de genoemde componenten en hun samenstel in macroniveaus aan te geven. Aanvankelijk gebeurde dit tamelijk onbekommerd, om niet te zeggen ondoorzichtig, door elementen uit verschillende componenten binnen één niveau-indeling te mengen. Pas recent (zie Menne, 2001) wordt mede aan de hand van voorbeelden helder aangegeven hoe in het formaliseren, het structureren en het toepassen verschillende niveaus kunnen worden onderscheiden, dus hoe het progressieve mathematiseren in het getallendomein tot 100 concreet gestalte krijgt. Daardoor wordt het gericht observeren van leerprocessen en het benutten van die observaties voor het didactisch handelen bevorderd.
Algemeen gesteld, dus los van het rekenen tot 100, is het aan te bevelen om binnen een bepaald leerdomein, via een fenomenologisch-conceptuele analyse, eerst de belangrijkste handelingscomponenten te identificeren. Voor het rekenen als geheel zijn dit globaal dezelfde drie componenten als hiervoor werden genoemd. Maar die dienen dan uiteraard per domein nader gespecificeerd te worden. (Voor het automatiseren en memoriseren kan het wenselijk zijn om daar componenten als de mate van verkorting en beheersing aan toe te voegen.)
Voor meten zullen deze drie parameters maar ten dele gebruikt kunnen worden. Ook voor meetkunde - het ervaren, verklaren en verbinden van ruimtelijke verschijnselen - zullen andere componenten nodig zijn om de significante leerprocessen te kunnen signaleren (De Moor, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2004).

Terugblikkend op het voorgaande zou ik overigens willen voorstellen om de term ‘niveau’ spaarzaam en op niet mis te verstane wijze te hanteren, en niet allerlei gedragscomponenten in één niveau-indeling te mengen. Tot zover over de fundamentele niveaukwestie die Freudenthal opwierp. Over hoe het reflectieve denken, dat volgens Freudenthal een cruciale niveauverhogende functie vervult, in het onderwijs gestimuleerd kan worden, valt in algemene zin het volgende op te merken. Er zijn verschillende didactische middelen bedacht om kinderen via anderen en zichzelf over hun eigen handelen te laten nadenken: kinderen zelf opgaven laten ontwerpen en de oplossingen daarvan samen bespreken (Van den Brink, 1986) of verschillende oplossingsmethoden van één opgave te presenteren en te bespreken. Dit vindt steeds plaats in een interactieve onderwijssetting binnen de jaargroep als geheel of in kleine groepjes. Daarbij is ruimte voor uitwisseling van ideeën tussen de leerlingen onderling, de horizontale interactie, en tussen de leerlingen en de leraar, de verticale interactie (Nelissen, 1995). De reflectieve terugblik via de nabespreking en de evaluatie van de verschillende oplossingsmethoden, waaronder die van de eigen aanpak, zijn kenmerkend voor deze didactische organisatie die ook in de lijn van Freudenthals denken ligt. We zullen het voorgaande illustreren met een voorbeeld uit het aanvankelijk rekenen tot 20, naar aanleiding van een videofragment uit het TAL-project - een les van A. Veltman (fig.2).



Kinderen van de speelleerklas (eind groep 2 en 3) werken aan het thema 'restaurant': ze schrijven menukaarten, bestellen eten en drinken, en betalen vastgestelde prijzen. Bij de menukaart ligt een portemonnee met briefjes van 5 euro en munten van 1 euro.
Maureen kiest een coupe ijs voor de waarde van 6 euro en een pannenkoek voor 7 euro. Hoeveel moet ze bij elkaar betalen? De kinderen krijgen even gelegenheid om er over na te denken. Om te beginnen mag Maureen laten zien hoe ze heeft gerekend. En dan komen andere kinderen aan bod.

- Maureen telt eerst 6 munten af en daarna nog 7. Vervolgens telt ze alle munten: 13'.
- Luuk merkt op dat je 3 euro bij 7 euro kunt leggen en dan blijft er bij die andere groep nog 3 euro liggen: '10 en 3 is 13'.
- Thijs wisselt 5 euromunten in voor een briefje van vijf en legt 6 euro's met '5' en '1', en '7' met '5' en '1' en '1'. Hij schuift vervolgens de briefjes van vijf en de euromunten bij elkaar. '10 en 3 is 13'.
- Nick doet hetzelfde, maar hij legt de briefjes en de munten al doende netjes op een rij: '5', '5', '1', '1', '1', is '10, 11, 12, 13.'
- Hannah maakt geen gebruik van het geld: '6 en 6 is 12, en 1 is 13'.
- Er wordt nog een soortgelijke oplossing aangedragen: '7 en 7 is 14, en 1 eraf is 13'.

figuur 2

In bovenstaande oplossingen zijn verschillende graden van abstractie en van rekenstructuren plus combinaties daarvan zichtbaar die in de voorgaande beschouwing werden besproken. Opmerkelijk is dat in deze dwarsdoorsnede van de les, in de onderscheiden oplossingen van de kinderen, de lengte van de leerlijn enigszins zichtbaar wordt. Daardoor krijgt men ook globaal zicht op de sprongen die de kinderen kunnen maken in het leerproces. De leerkracht stimuleert de kinderen om zoveel mogelijk handige oplossingen te vinden. Ze herhaalt nog eens de gevolgde werkwijze die de kinderen lieten zien en verwoordt deze. Vervolgens benadrukt ze kernachtig de handigheid ervan. In een volgende les komt ze op verschillende strategieën terug als er andere opgaven op het onderwijsmenu komen te staan.
Terug nu naar Freudenthal.

7 'Ich bin kein ausgeklügelt Buch ...'

De ruime aandacht die in het Wiskobasproject aan probleemoplossen werd besteed, is mede door Freudenthal aangezet - ik zeg mede, omdat Wiskobasmedewerkers daar eveneens aandacht voor hadden. De rubrieken van H. Jansen en D. Oort in het 'Wiskobas-Bulletin' getuigen daarvan, evenals de inhoudelijke bijdragen in het schoolwerkplan van de ontwerpschool door Van den Brink, Ter Heege, Van Bruggen en Streefland - zie in dit verband ook De Moor (1980). In de laatste publicatie van Freudenthal (1991) komt zijn gerichtheid op probleemoplossen - die vooral ook bleek uit het veelvuldig verspreiden van problemen, puzzels en interessante knipsels - nog wat duidelijker tot uiting dan in zijn voorgaande boeken. De volgende verwijzing naar Polya (2002) spreekt in dit opzicht duidelijke taal:

> ... Polya's repeatedly mentioned work, whose tendency, rather than whose details, can be a source of inspiration - though less of subject matter - for didacticians of mathematics ... (1991, pag.122)

Had Freudenthal voldoende oog voor onderzoek binnen het formele rekensysteem? Uiteraard was dat het geval. Een voorbeeld: het eerste en enige practicum dat hij ooit voor een Wiskobasconferentie (1970) ontwierp, had betrekking op figurale getallen - een puur getaltheoretisch onderwerp waaraan door Wiskobas en later in het TAL-project (Van den Heuvel-Panhuizen, Treffers & Buys, 2001) onder meer ruime aandacht werd geschonken.
Hoe vallen deze formeel gerichte activiteiten te rijmen met de nadruk die in het realistische reken-wiskundeonderwijs op rijke contexten wordt gelegd?
De uitdijende realiteit van de kinderlijke ervaringen gaat geleidelijk aan steeds meer elementen van het formeel reken-wiskundige systeem bevatten. Formele contexten kunnen op termijn dus ook reële contexten worden waarbinnen kinderen betekenisvol wiskundig kunnen opereren en redeneren. Deze interpretatie van 'realistisch' houdt in dat dit onderwijs niet gelijkgesteld mag worden aan dat van de empiristische richting (Freudenthal, 1987). In zijn laatste boek (1991) besteedt Freudenthal nogmaals veel aandacht aan deze kwestie via een diepgaande beschouwing over 'gezond verstand' dat steeds hoger reikt. Overigens is in de reken-wiskundemethoden van de basisschool, enkele uitzonderingen daargelaten, tot nu toe niet een dergelijk 'platte' uitwerking aan het concept van het realistische onderwijs gegeven. Onder invloed echter van nieuwe onderwijsstromingen, lijkt de meer empiristische interpretatie van het realistische reken-wiskundeonderwijs in rap tempo terrein te winnen. Daarbij wordt nota bene Freudenthal als medestander aangehaald - ten onrechte. Al moet gezegd, zoals we eerder zagen, dat sommige van zijn uitspraken daar ook aanleiding toe kunnen geven.

In ‘Schrijf dat op, Hans’ zegt Freudenthal over zichzelf: ‘Ich bin kein ausgeklügelt Buch, aber ein Mensch mit seinem Widerspruch’.

Degene die de moeite neemt om grondig kennis te nemen van zijn gedachtegoed, en dan speciaal van zijn laatste boek (1991) zal echter niet anders dan tot de slotsom kunnen komen, dat Freudenthal dé promotor is van het rijke realistische reken-wiskundeonderwijs waarin uiteraard ook het formele aspect een passende plaats krijgt toegewezen. Passend houdt in dit verband dan in dat formeel niet formalistisch mag zijn, of positief geformuleerd, dat formeel voor de kinderen betekenisvol dient te zijn. Een recent voorbeeld van hoezeer kinderen plezier aan puur rekenen kunnen beleven, is beschreven door De Goeij e.a. (2004) - een paradigma van formeel-realistisch rekenen binnen een magische context op het niveau van het aanvankelijk rekenen, geheel volgens de onderwijsstijl die Freudenthal voorstaat en waarvan hij in zijn laatste boek enkele prachtige voorbeelden laat zien.

8 Slot

Freudenthals invloed op de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs is van beslissende betekenis geweest: hij is de grondlegger van het zogenoemde realistische reken-wiskundeonderwijs (Goffree, 1993). Zijn betekenis als bouwmeester is minder eenduidig bepaald. Freudenthals ideeën over het aanvankelijk rekenen in de allereerste fase (van groep 1 tot groep 3) hebben veel bijval gekregen. Maar zijn rol op het gebied van basisvaardigheden, hoofdrekenen, schattend rekenen en cijferen is klein. Bij meten en meetkunde is zijn invloed weliswaar aanzienlijk te noemen, maar minder direct aanwijsbaar dan men wellicht zou verwachten.
Algemeen geldt dat zijn scherpe kijk op de fenomenologische rijkdom van de wiskundige structuren en op de persoonlijke uniciteit van leerprocessen, hem er kennelijk van heeft weerhouden om globaal uitgelijnde leergangen uit te stippelen. Op één uitzondering na: de leergang voor breuken. Maar juist dit voorbeeld laat zien dat Freudenthals (aanvankelijke?) denkbeelden over het veelsporige leren, of algemener zijn (impliciete) onderwijsleertheorie van rekenen met betrekking tot het verticale mathematiseren, afwijken van de ideeën die de Wiskobasmedewerkers daarover hadden. Wel zijn er aanwijzingen dat Freudenthal zijn opvattingen in dit opzicht later wellicht heeft bijgesteld.

Over Freudenthals theoretische invloed kan grofweg hetzelfde worden opgemerkt als over zijn praktische betekenis: de basis daarvan is door hem met de introductie van talrijke theoretische begrippen gelegd, maar bij het ontwerpen van het onderwijsleertheoretische kader en de specifieke uitwerking daarvan voor langlopende leerprocessen in leergangen heeft hij geen sleutelrol vervuld; net zo min trouwens als bij de introductie en de concrete uitvoering van de concepten van onderwijsontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek, en bij probleemoplossen.

Veel over Freudenthal bleef hier onderbelicht: zijn visie op het specifieke karakter van de wiskunde, zijn standpunt over de toetsproblematiek, zijn voorkeur voor bepaalde didactische groeperingsvormen en zo meer, maar het meest nog zijn persoonlijke uitstraling ook buiten de werksituatie (informele contacten, feestjes, de vrijdagmiddagborrel), zijn intrigerende korte opmerkingen, zijn uitweidingen over schijnbaar futiele observaties van leerprocessen, zijn passie, zijn vermogen om met kleine voorbeelden te verduidelijken dat wiskunde overal aanwezig is, zijn aandacht voor zowel de ‘lagere’ als de ‘hogere’ vormen van wiskunde, zijn respect voor mensen uit de praktijk van het onderwijs, zijn bewondering voor degenen die een helder betoog kunnen houden, zijn scherpe schrijfstijl, zijn onverholen misprijzen voor ontwikkelaars en onderzoekers die geen recht doen aan de wiskunde en aan het kind, geen recht doen aan wiskunde als menselijke activiteit en aan ‘mathematics as an educational task’.

Heeft Freudenthal wel echt bestaan - vroeg ik me in de inleiding af. Zijn didactisch buigzame *one-liners* als ‘wiskunde als menselijke activiteit’, ‘wiskunde leren door geleide (her)uitvinding’, ‘wiskunde leren in een rijke context’ en zo meer, laten zich makkelijk naar eigen goeddunken invullen. Zo kan het gebeuren dat diametraal tegenover elkaar staande onderwijsvernieuwingen toch alle Freudenthal als medestander aanhalen. Freudenthal als ideoloog, de vlag die blijkbaar iedere lading dekt - een positie die hij nu juist zo verfoeide.

Freudenthals initialen *HF* omsluiten de *G*, de *G* van Geleerde, van Gids of hoe men hem passend wil kwalificeren, maar niet de *G* van een hogere macht: Hans Freudenthal was een mens van vlees en bloed - een groot man, (on)navolgbaar.

Noten

1 Het onderscheid tussen model-van als nabeeld en model-voor als voorbeeld is afkomstig van Freudenthal. In ‘Weeding and Sowing’ (1978) besteedt hij er een aparte paragraaf aan. Maar hij gebruikte het onderscheid toen niet in de didactische zin als later door Streefland (1985) werd gedaan. In Treffers en Goffree (1985) en Treffers (1987) werd dit onderscheid niet nadrukkelijk gemaakt omdat de brugfunctie van een model dit verschil impliceert: de verbinding van de modelbrug met de eerste laag wordt door de ‘van-zijde’ gemarkeerd en met de derde laag door de ‘voor-zijde’.
Gravemeijer (1994; 2003) heeft Streeflands onderscheid in ‘van en voor’ overgenomen en als twee gescheiden lagen gepresenteerd en geherformuleerd.

2 Dat Freudenthal de Van Hiele-niveaus als absolute niveaus kwalificeert, is naar mijn mening niet terecht. Van Hiele (1973) spreekt immers uitdrukkelijk over niveaureductie: het rekensysteem bijvoorbeeld dat aanvankelijk als hoogste niveau fungeert, kan vervolgens als basisniveau voor het algebra-onderwijs gaan dienen. Overigens moet ik met betrekking tot Van Hiele ook de hand in eigen boezem steken: ik ben er in de loop van de tijd verschillende keren terecht op gewezen dat de niveaus van de didactische drieslag minder een afspiegeling zijn van de Van Hiele-niveaus dan ik in 'Three Dimensions' (1987) suggereer. In ieder geval ben ik bij de niveau-indeling die toen nader werd uitgewerkt wel sterk door Van Hiele geïnspireerd - laat ik het zo zeggen.

Literatuur

Ahlfors, L.V. e.a. (1962). On the Mathematics Curriculum of the High School. *The Mathematics Teacher*, *55*(3), 191-195.

Brink, F.J. van den (1986). Kinderen als rekenboekauteurs. *Het Jonge Kind*, *13*, 258-260.

Brink, F.J. van den (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen.* Utrecht: OW&OC (proefschrift).

Bruggen, J. van (1975). *Leren cijferen bekeken door een leerpsychologische bril* (interne IOWO-publicatie).

Buijs, K. (2005). Wiskunde leren, een kwestie van steeds gezonderder verstand. In: H. ter Heege, T. Goris, R. Keijzer & L. Wesker (red.). *Freudenthal 100. (Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 24*(3) / *Nieuwe Wiskrant, 25*(1)*)*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 98-105.

Dekker, A., H. ter Heege & A. Treffers (1982). *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas.* Utrecht: OW&OC.

Eicholz, E., e.a. (1970). *Elementair Wiskundig Rekenen.* Assen: Van Gorkum.

Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics so as to be useful? *Educational Studies in Mathematics*, *1*, 3-8.

Freudenthal, H. (1977). Wiskunde-Onderwijs anno 2000. *Euclides, 52, 290-295.*

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing.* Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1981). Major Problems of Mathematical Education. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 133-150.

Freudenthal, H. (1982). Een visie op ons onderwijskundig bezig zijn. *Utrechtse Pedagogische Verhandelingen*, *5*(3), 5-13.

Freudenthal, H. (1984). *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren (1).* Utrecht: OW&OC.

Freudenthal, H. (1987). Theorievorming bij het wiskundeonderwijs - geraamte en gereedschap. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 5*, 4-15.

Freudenthal, H. (1987). *Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven.* Amsterdam: Meulenhoff.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht: Kluwer.

Goeij, E. de & A. Treffers (2004). De magische krachten van getallenvierkanten in groep 4. *Willem Bartjens*, *23*(3), 28-34.

Goffree, F. (1993). HF: Working on Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, *25*(1/2), 21-51.

Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education.* Utrecht: CD-ß Press (proefschrift).

Gravemeijer, K.P.E. (2003). Didactisch gebruik van de lege getallenlijn. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 21*(2), 11-23.

Heege, H. ter (1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 375-389.

Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buys & A. Treffers (red.) (2001). *Kinderen leren rekenen.* Groningen: Wolters Noordhoff.

Heuvel-Panhuizen, M. van den & K. Buys (red.) (2004). *Jonge kinderen leren meten en meetkunde.* Groningen: Wolters Noordhoff.

Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en inzicht.* Purmerend: Muusses.

Jong, R. de (red.) (1977). De abakus. *Wiskobas-Bulletin, leerplanpublikatie 6.*

Lange, J. de (1979). Contextuele problemen. *Euclides*, *55*(2), 50-60.

Menne, J.J.M. (2001). *Met sprongen vooruit.* Utrecht: CD-ß Press (proefschrift).

Moor, E. de (1980). Gevarieerd rekenen. *Wiskobas-Bulletin, leerplanpublikatie 11.*

Moor, E. de (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde.* Utrecht: CD-ß Press (proefschrift).

Nelissen, J. (1987). *Kinderen leren wiskunde.* Gorcum: De Ruiter (proefschrift).

Nelissen, J. (1995). Interactief reken-wiskundeonderwijs. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 14*(1), 35-44.

Polya, G. (2002). The goals of mathematical education (1) en (2). *Mathematics Teaching, 181*/*182*, 6-8 en 42-45.

Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron. *Nieuwe Wiskrant, 5*(1), 60-68.

Streefland, L. (1988). *Realistisch breukenonderwijs.* Utrecht: OW&OC (proefschrift).

Treffers, A. (1975). De kiekkas van Wiskobas. *Wiskobas-Bulletin, leerplanpublikatie 1.*

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions.* Dordrecht*:* Reidel.

Treffers, A. & F. Goffree (1985). Rational Analyses of Realistic Mathematics Education - the Wiskobas Program. In: L. Streefland (ed.). *Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2,* Utrecht: OW&OC, 97-123.

Lately, Freudenthal has been assigned an almost mythical quality. This status falls far short of the mark though. His undeniable stature in the field of mathematics education has a human measure. Based on five core questions an attempt is made to realistically present that measure. Especially the (implicit) didactical theory of the multi-threaded approach, that finds its blueprint in the learning trajectory for fractions, is given much attention. The doubts Freudenthal had about his own significance for the development of and research into mathematics education are also highlighted. The impact of Freudenthal's legacy is examined in a reflective review. I will end on a personal note.

De verbeelding van het mathematisch-didactisch denken

Wil Oonk
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

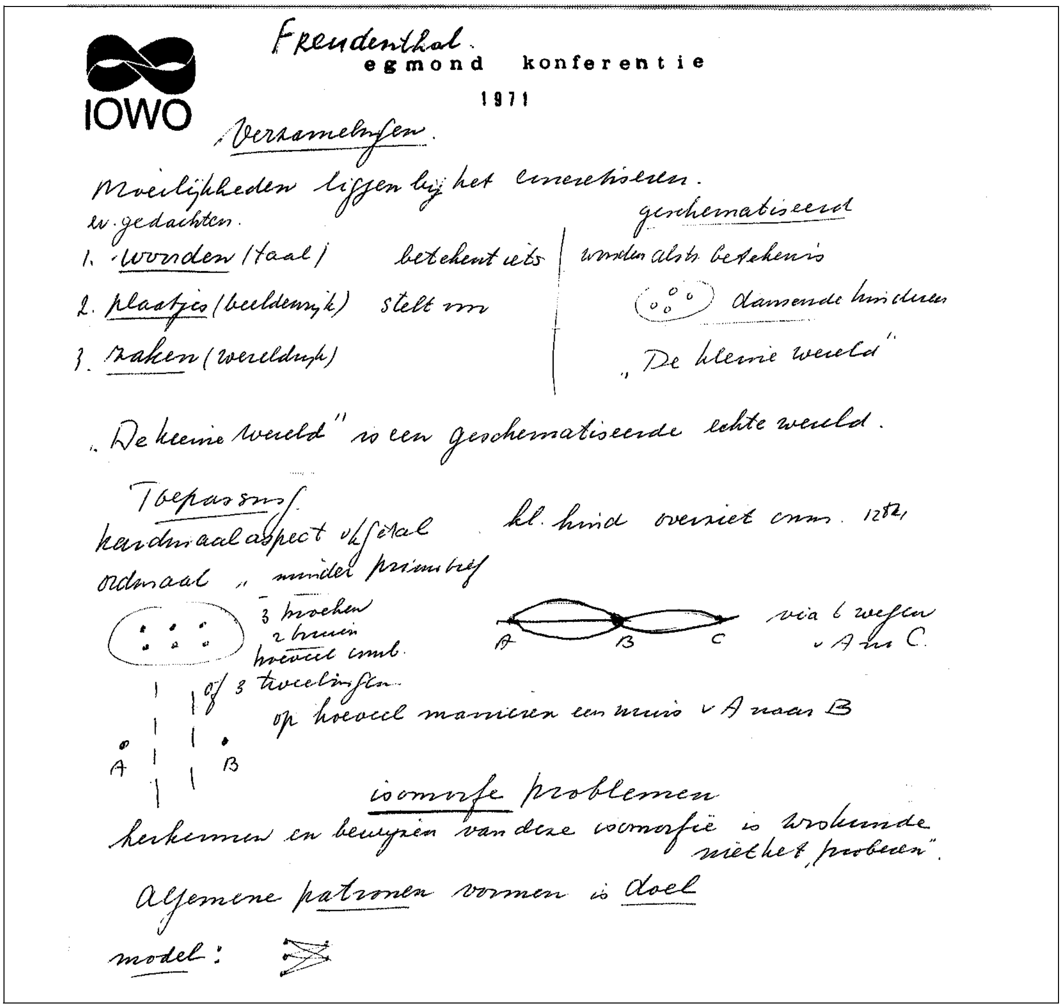
Waarom en waardoor heeft Freudenthal zoveel invloed gehad op mijn professionele werk als leraar in het basis- en voortgezet onderwijs, in het HBO en - nu nog steeds - op mijn werk als onderzoeker? Hoe is die invloed te karakteriseren? Ik wil graag reageren op die vragen aan de hand van enkele voorbeelden. Hopelijk zijn het voor de lezer voorbeelden die hout snijden, want: 'Het kost veel minder moeite de lerende met een douche van talloze voorbeelden te overspoelen, dan naar het ene - paradigmatische - voorbeeld te zoeken dat het hem doet' (Freudenthal, 1984, pag.102).
Met vier voorbeelden probeer ik te illustreren hoe Freudenthals verbeelding van het denken mijn eigen denken heeft gestimuleerd op verschillende niveaus.

1 Isomorfie in 1971

Mijn eerste kennismaking met zijn ideeën was op de vijfdaagse(!) Wiskobasconferentie in Egmond in oktober 1971. Het was toen al een gewoonte om het werken in practica en korte presentaties af te wisselen met enkele plenaire lezingen, deze keer een lezing van Freudenthal met als thema 'verzamelingen'.
Hoewel de Wiskobasbeweging vooral ontstond als een reactie op het mechanistische rekenonderwijs, was op dat moment het realistisch reken-wiskundeonderwijs als zodanig nog niet in beeld. Met inmiddels een analyse van de (vier) stromingen in het Nederlandse primaire reken- en wiskundeonderwijs bij de hand (Treffers, 1978), kun je nu vermoeden dat er ten tijde van de conferentie in 1971 bewust of onbewust bij Freudenthal en zijn team van alles door het hoofd heeft gespeeld over mogelijke keuzes voor de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs in Nederland.
Wellicht ging het toen nog om de afweging tussen twee stromingen die destijds in Europa opgeld deden: de structuralistische aanpak van Papy en anderen, in belangrijke mate gefundeerd door de logica en de verzamelingentheorie en de empirische richting zoals die in het Nuffield-project tot uitdrukking kwam, met het accent op ervaringsgerichte activiteiten en de toepassing van veel materialen. Op de conferentie in 1971 was de invloed van die stromingen achteraf beschouwd duidelijk zichtbaar, onder andere door een practicum waarin de opdracht was een pagina te analyseren uit de methode 'Denken en rekenen', een methode uit het structuralistische kamp, en anderzijds een meetpracticum met voorbeelden uit het Nuffield-project.

Het college van Freudenthal was kennelijk bedoeld om de conferentiegangers gedegen kennis mee te geven; mijn aantekeningen van die lezing (fig.1) zijn illustratief voor de inhoud ervan. Wat mij vooral opviel in de lezing, was de subtiele wijze waarop betekenis werd gegeven aan ingewikkelde wiskundige begrippen, nota bene voor een gezelschap dat behalve uit wiskundigen ook voor een groot deel bestond uit pedagogen. Het begrip isomorfie was een van de begrippen die aan de orde kwam; het was tot dan toe voor mij, die in de avonduren bezig was zijn wiskundestudie af te ronden, een abstract, formeel begrip uit de moderne algebra (Loonstra, 1963). Het wiskundig geworstel om de isomorfie van algebraïsche systemen te bewijzen vond ik zeker niet onaardig, maar Freudenthal leerde mij het denken over isomorfie te verbeelden aan de hand van 'kinderlijk' eenvoudige probleempjes als 'de muis en de kaas', de 'broeken en de truien' of het wegenprobleem (fig.1).
Pas daardoor werd me de kracht van het begrip 'isomorfie' werkelijk duidelijk, namelijk het feit dat ogenschijnlijk totaal verschillende systemen of probleemsituaties dezelfde wiskundige structuur kunnen hebben en daardoor ook dezelfde wiskundige eigenschappen gemeen hebben. Opeens zag ik in dat kinderen veel meer en diepgaander wiskunde zouden kunnen leren dan ik tot dan toe voor mogelijk hield; dat was voor mij - die zich nog niet geheel ontworsteld had aan het mechanistische systeem - op dat moment een openbaring.
Het inspireerde me om in de week na de conferentie een practicum voor mijn Pabo-studenten te ontwerpen, waarbij ze onder andere moesten uitzoeken en verwoorden welke van de volgende situaties dezelfde achtergrondstructuur hebben:

– Hoeveel verschillende getallen van drie cijfers kun je maken met de drie getallenkaartjes 5, 6 en 7?


Freudenthal.
egmond konferentie
1971
IOWO
Verzamelingen.
Moeilijkheden liggen bij het concretiseren.
v. gedachten.
geschematiseerd
1. woorden (taal) betekent iets | woorden als betekenis
2. plaatjes (beeldenrijk) stelt voor | dansende kinderen
3. zaken (wereldrijk) | „De kleine wereld"
„De kleine wereld" is een geschematiseerde echte wereld.
Toepassing.
kardinaal aspect v.h. getal kl. kind overziet
ordinaal „ minder primitief
3 broeken
2 truien
hoeveel comb.
of 3 tweelingen
op hoeveel manieren een muis v A naar B
A B C
via 6 wegen v A n C.
A B
isomorfe problemen
herkennen en bewijzen van deze isomorfie is wiskunde
niet het proberen".
Algemene patronen vormen is doel
model:

figuur 1: aantekeningen van de lezing van Freudenthal in 1971

– Ik heb in de kast drie shirts, twee truien en één broek; hoeveel verschillende combinaties (shirt, broek, trui) kan ik maken om me te kleden?
– Hoeveel verschillende getallen van drie cijfers kun je maken met de cijfers 5, 6 en 7?
– Hoeveel verschillende routes zijn er van *A* via *B* en *C* naar *D*, als er drie wegen zijn van *A* naar *B*, twee wegen van *B* naar *C* en één weg van *C* naar *D*?
– Hoeveel getallen van drie cijfers kun je maken?

Overigens heeft de combinatoriek, bron voor het soort problemen die Freudenthal in zijn lezing aanboorde, nooit een hoge vlucht genomen op de basisschool, wellicht door het geïsoleerde karakter van dat leerstofgebied en de relatie met het meer op het voortgezet onderwijs gerichte kansrekenen. Gaandeweg ontstond er ‘netwerkbreed’ een heel andere opvatting over wiskunde leren door kinderen en Freudenthal zou de eerste zijn die zijn eigen bedenksels en schrijfsels uit die eerste tijd zou relativeren tot aan afwijzen toe.
In 1984 wijdde hij in ‘Dididactische fenomenologie’ een heel hoofdstuk aan verzamelingen; daarin wordt de ‘verzamelingenleer’ in de schoolwiskunde - met de Venndiagrammen en logiblokken - beschreven als puur taalverschijnsel en valse concretisering (Freudenthal, 1984, pag. 49).

2 Tekst, context en geïntegreerd leren

Freudenthal vertolkte in zijn rede, na het verlenen van het eredoctoraat aan hem op 10 juni 1977, kernachtig wat er bij mij en ik denk bij veel anderen in die tijd leefde. Ik citeer een alinea uit de tekst van die rede die ik zorgvuldig bewaard heb (Euclides, 52(9)).

> … Het onderwijs dat wij ontwikkelen is door een ander mensbeeld bepaald en tevens door een andere kijk op de wiskunde - niet als leerstof, maar als menselijke activiteit. Ik heb het eerder driewerf gekenmerkt als:
> – aan de realiteit gelieerd,
> – nabij de kinderen,
> – maatschappelijk relevant,
> en vat deze kenmerken thans samen in één dat alle overkoepelt: menswaardig, de mens als lerende, als onderwijsgevende, als begeleider van onderwijs en als schepper van onderwijs waardig.

> Wiskunde is voor ons een menselijke activiteit, zei ik, een activiteit én menselijk. (…)

In de jaren hierna kreeg die visie een steeds verfijnder invulling en dat verschafte veel stof tot nieuwe overpeinzing. Freudenthal droeg daar onder meer aan bij met zijn wiskundig didactische doordenkingen in Willem Bartjens. Enkele ervan zijn me tot op de dag van vandaag bijgebleven, zoals het artikeltje in het meinummer van 1982. Hij opent dat artikel met een selectie van ingeklede vraagstukjes uit Binets intelligentietesten, met de vragen van de onderzoeker en de antwoorden van een kind:

> Als je voor 6 cent snoep in de winkel koopt en je betaalt met 10 cent, hoeveel krijg je dan terug?. Het kind antwoordt: 'Ik heb nog nooit 10 cent gehad en als ik het had zou ik geen snoep kopen, snoep maakt mijn moeder'.

De onderzoeker probeert een ander vraagstukje:

> Als jullie met 10 kinderen op school zijn en 6 kinderen krijgen de mazelen, hoeveel komen dan op school? Het kind geeft nu als antwoord: 'Geen, want de anderen zouden bang zijn voor de mazelen en thuisblijven'.

Freudenthal vond dit verslag in een vermaard boek van Klineberg (1944) en zegt daarover onder meer:

> Over het gemeten *I.Q.* van bovengenoemd negerjongetje of meisje ontbreken mij de gegevens. Als de andere Binetvragen navenant werden beantwoord, zal het kind wel voor debiel zijn verklaard ...

Er valt uit deze reactie veel op te maken, ook over de mens Freudenthal, maar ik beperk me even tot de vakinhoud. Zo'n soort vraagstuk, dat in bovenstaand voorbeeld om een aftrekking 10 – 6 vraagt, noemt hij een tekst. Context is naar zijn opvatting veel meer, dat is wat er niet bij wordt verteld, wat voortvloeit uit de situatie of door de situatie wordt opgeroepen. Contexten bestaan in de verbeelding en in de realiteit. Hij onderscheidt in het artikel drie wereldjes van kinderen die als bron voor het wiskundeonderwijs kunnen gelden: de eigen wereld van het kind, de in het rollenspel getransformeerde wereld van de volwassene en de sprookjeswereld.

Ik herkende de wereldjes in het toenmalige ontwikkelwerk van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO) in de jaren zeventig en liet studenten van de Pedagogische Academie onder andere de trits ervaren van 'Het kabouterdorp' (sprookjeswereld voor de kleuters), 'Bouwen met blokken' (getransformeerde wereld van de volwassene voor de middenbouw) en 'Belvia' (beeld van de echte wereld voor de brugklas). Het leerstofgebied - ruimtemeetkunde, bouwen met blokken - is hetzelfde, de context en de activiteiten zijn aangepast aan het ontwikkelingsniveau van de kinderen.

Tekenend voor hem is de twijfel die hij in het artikel uit over het gebruik van sprookjeswerelden in het wiskundeonderwijs: de echte wereld van het kind staat immers bol van wiskunde, als je er maar goed naar kijkt. Inderdaad geven de sprookjeswerelden de ontwerper van onderwijs meer armslag dan hij in de echte zou hebben, maar is het niet een teken van gemakzucht als de stof van de leerpakketten niet allereerst in de echte wereld wordt gezocht?

> Tot op heden heb ik die vraag niet beantwoord en zal ook hier mezelf en anderen het antwoord schuldig blijven. Het was weer eens piekeren en daar bleef het bij.
> (Freudenthal, 1982, pag. 132)

Aanleiding voor Freudenthals gepieker over het al of niet sprookjeswerelden voor leerlingen creëren, blijkt een geïllustreerd boekje van enkele Berlijnse auteurs.[1] Aan de hand van het onderwerp 'Lunch' uit dat boekje maakt hij duidelijk hoezeer een dergelijk thema een diepe en rijke bron kan zijn voor het leren van wiskunde, maar ook van talloze andere vaardigheden: van inkoopplanning en omgaan met geld tot leren deelnemen aan het verkeer en het omgaan met elkaar en met volwassenen. Het valt op hoezeer Freudenthal geraakt is door die aanpak; hij zegt daarover:

> Wat me trof, was de vanzelfsprekendheid waarmee hier 'de situatie' in het echte leven is gezocht.

Op mijn beurt werd ik als opleider aangenaam verrast door antwoorden op vragen waar ik al lange tijd mee rondliep, zoals de vraag naar hoe een wiskundeleerproces voor leerlingen van de basisschool, maar ook voor aanstaande leraren, zo natuurlijk mogelijk zou kunnen verlopen en ook: in welke zin geïntegreerd leren daaraan zou kunnen bijdragen.

In de eerste plaats sprak mij vooral het voorbeeld aan dat Freudenthal zelf voorleefde, in de zin dat hij het leren van kinderen tot in de kleinste details serieus nam. Internationaal befaamd door publicaties op het gebied van de hogere wiskunde zoals de topologie, zag hij de wiskunde en bijbehorende didactiek voor jonge kinderen absoluut niet als iets van een lagere orde.
Typerend voor zijn werk vind ik de nadruk die hij legt op de *vanzelfsprekendheid* die het wiskunde leren van kinderen zou moeten karakteriseren, een eenvoudig begrip dat ik in latere publicaties van hem ook aantref; anders dan het containerbegrip *natuurlijk leren* raakt het de kern van de zaak. Juist ook in die zin verschafte het artikel mij nieuwe inzichten: geïntegreerd leren kan bijdragen aan vanzelfsprekend leren van wiskunde, voor kinderen en (aanstaande) leraren. Het inspireerde mij om te zoeken naar wiskunde in de krant, in kinderboeken, in de straat of op de markt en ik stimuleerde studenten hetzelfde te doen.

Mijn interesse voor geïntegreerd leren groeide en ik omarmde de voorspelling die Freudenthal deed ter gelegenheid van zijn afscheid als hoogleraar-directeur van het IOWO in 1976:

Er is geen wiskundeonderwijs meer in 2000, het is verdwenen. Er is geen vak meer, wiskunde geheten, geen wiskundeles op het rooster, geen wiskundeboekje om te onderwijzen. Zeg niet: 'De advocaat van de duivel.'

Ik ben de duivel zelf. Als ik terugkijk op mijn activiteit bij het IOWO en u vraagt me wat ik denk dat mijn belangrijkste bijdrage was, dan zeg ik: hun met mijn gezag als wiskundige garanderen dat hetgeen zij aan het ontwikkelen waren, echte wiskunde is, dat om jezelf als wiskundige waar te maken, je geen minderwaardigheidscomplexen bij anderen hoeft te kweken door middel van verzamelingenleer, propositie-calculus, groepentheorie, vectorruimten en andere hoogdravende onverteerde theorie, dat je wiskunde overal kunt ontdekken, met je blote oog en met het gezond verstand, dat het kenmerk van wiskunde is, zo voor zichzelf te spreken, dat je je niet hoeft uit te sloven om anderen ervan te overtuigen dat het waard is om te kennen, te leren, te onderwijzen. Dit is nu het soort wiskunde dat we in Wiskobas zijn begonnen en dat Wiskivon gaat voortzetten. Mijn bescheiden verdienste is het geweest het af te stempelen als echte wiskunde.

Als wiskunde is het zo echt en zo overtuigend dat ik er zeker van ben dat het in de toekomst wordt onderwezen. Maar tegelijkertijd en om dezelfde reden is het de soort die je niet als losstaand vak kunt onderwijzen. Het is er om beleefd en uitgeleefd te worden, net als lezen, schrijven, knutselen, tekenen, zingen, ademhalen, in een geïntegreerd onderwijs. In 't algemeen vormend onderwijs zal er in 2000 meer wiskunde worden opgedaan dan ooit tevoren, al zal het niet als afzonderlijk vak onderwezen worden - tenzij op hogere leeftijden, in gespecialiseerd onderwijs.
(Freudenthal, 1976, pag. 294)

Door latere publicaties (Treffers, 1978; De Lange, 1979; Freudenthal, 1983; Gravemeijer, 1994) werd ik mij bewust van de eenzijdige component van het voornamelijk horizontaal mathematiseren in geïntegreerd onderwijs; niettemin verschafte Freudenthal mij met zijn artikel in 'Willem Bartjens' in 1982 een waardevolle impuls op een geschikt moment. In de jaren daarna werden door de ontwikkelaars allengs meer doordachte pakketten ontworpen ten behoeve van rijke leeromgevingen voor kinderen, ik denk in het bijzonder aan de situaties die in samenspraak met kinderen werden ontwikkeld (Ter Heege, 1985; Van den Brink, 1989; Goffree, 1993). Juist de inbreng van de kinderen zelf geeft aanleiding voor vanzelfsprekend leren.

3 Observeren, reflecteren, mathematiseren en didactiseren

Met mijn keuze voor dit viertal als derde voorbeeld om de karakteristieke trekken te achterhalen van de invloed die Freudenthal op mij heeft gehad, maak ik een sprong in de tijd naar de jaren negentig en daarna. Laat ik beginnen met het onderwerp dat gaandeweg voor mij favoriet is geworden: reflecteren. In mijn beleving is de basis daarvoor gelegd in de landelijk werkgroep OGLO.[2] Voor het eerst in mijn loopbaan proefde ik toen hoe het verder dóórdenken en schrijven over de discussies in de groep vruchten afwierp voor mijn eigen voortgang in het denken over de materie - de didactiek van de negatieve getallen - waarmee we bezig waren. Gesterkt door die eigen ervaring kon ik studenten daarna gemakkelijker warm maken voor het reflecteren, juist door het perspectief van het 'vooruit denken via het terugblikken'. Toch was ik aanvankelijk nog niet bij machte om alle studenten, maar ook collega's, voldoende te overtuigen van de cruciale rol van het reflecteren in het leren (en onderwijzen). Was het inderdaad niet de zoveelste modegril van - vooral - onderwijskundigen? Oude wijn in nieuwe zakken? Was reflecteren niet gewoon een synoniem voor 'nadenken'? Het waren juist die vragen en twijfels die ik herkende in de verhalen en publicaties van Freudenthal over zijn eigen denk- en leerproces met betrekking tot het fenomeen reflecteren. Zo reflecteert hij in 'China Lectures' over zijn worsteling met het concept reflecteren als hij terugdenkt aan het voorbereiden van een paper in 1979 over 'Bewijzen in het wiskundeonderwijs' voor een conferentie in Klagenfurt:

With a view on the evidence now available, I would describe my state of mind at the time I set out my paper as reflecting more consciously than ever before on the idea of reflecting, and more precisely, on how reflective thinking develops. At that time (1979), while wrestling with the problem of how proving arises, I felt for the first time the need for a more compact term for thinking about one's own (and other people's) thinking, and when I hit on 'reflection' I realised it was not as colourness as I had thought before. If I now use the term, there is an undertone of physics in it: reflecting as mirrors do, mirroring (...).

So from mirroring oneself in someone else follows - as the night the day - the mirroring of oneself in one's own person, that is introspection. It becomes reflecting on oneself, on what one did, felt, imagined, thought, on what one is doing, feeling, imagining, thinking. Reflecting, once started, is an activity we perform every moment, in order to determine our course of action, yet, as a mental exercise, it can become an aim itself. (Freudenthal, 1991, pag.104).

Sindsdien beschouwt Freudenthal het reflecteren als 'de krachtige motor van de wiskundige inventie' en geleid heruitvinden betekent dan dat de 'leider' reflectief denken uitlokt. Tijdens een gedachtenwisseling met hem over geleid heruitvinden, op een zonnig terras in Boedapest samen met H. Meijer en H. Jansen tijdens de ICME VI in 1988, illustreerde hij zijn opvatting nog eens met zijn uitgekiende voorbeeld van de elkaar middendoor delende diagonalen van een parallellogram.

Ik vertel het enigszins door mij aangepaste verhaal in twee delen, om te laten zien hoe ik het nadien gebruikte om mijn studenten bewust te laten worden van drie zaken: wat geleid (her)ontdekken is, welke rol reflecteren

daarbij speelt en ten derde het belang van observatie en reflectie gekoppeld aan het stellen van kernvragen, als middel om in de hoofden van wiskunde lerende kinderen te kijken.
Het verhaal[3] begint met een vraag:

> Waarom delen de diagonalen van een parallellogram elkaar middendoor? Natuurlijk kun je die eigenschap bewijzen met behulp van stellingen over congruentie van driehoeken, maar dat is niet het soort antwoord dat verwacht wordt. Vrijwel iedereen zal zich bewust zijn van deze eigenschap vóór hij of zij enig idee had van meetkunde. De vraag is *hoe* je het wist. Wat was de bron van die kennis?
>
> Na zoveel jaren wiskunde(les) zul je er niet in slagen het op te roepen, 'tenzij je verandert en wordt als een jong kind'.

Hier onderbreek ik het verhaal van zo-even om de lezer uit te dagen het probleem 'als een jong kind' te benaderen. Schroom niet om er papier en een schaar bij te pakken, maar 'mentaal handelen' kan uiteraard ook die 'verheffing' tot kinderlijk handelen en denken verbeelden. Lees hierna hoe Freudenthal zijn verhaal vervolgt:

> Zo'n verandering - 'worden als een jong kind' (wo) - vereist een grotere krachtsinspanning dan de meeste mensen er aan wensen te besteden; het is veel gemakkelijker om kleuters te observeren die aan het spelen zijn met bijvoorbeeld een verzameling mozaïektegels. Zij weten door het te draaien dat elk parallellogram weer in zijn eigen hol past en daarmee wordt 'de stelling bewezen'; inderdaad, door die draaiing worden beide diagonalen ook rondgedraaid, terwijl hun snijpunt gefixeerd blijft.
> Probeer het experiment uit met een jong kind! Teken een parallellogram met zijn diagonalen. Laat het kind eigenschappen van de figuur ontdekken en maak als het noodzakelijk is de weg vrij voor de speciale eigenschap die je in gedachten hebt: de diagonalen delen elkaar middendoor. Vraag: 'Waarom denk je dat ze dat doen?' 'Omdat ik het kan zien.' 'Hoe zie je het?' Blijf aandringen op een antwoord. Afhankelijk van de leeftijd van het kind, zul je eventueel een antwoord krijgen dat op die leeftijd kan worden beschouwd als een valide bewijs, verkregen door 'idee-zoeken',[4] reflecteren dus.

Wat me treft in deze 'narrative' en vele andere verhalen van Freudenthal zijn de verbanden die hij legt tussen observeren, reflecteren, mathematiseren en didactiseren. Juist het beeld van deze samenhang heeft me geholpen meer grip te krijgen op de relatie tussen de theorie en de praktijk van het reken-wiskundeonderwijs.

4 De verbeelding van het denken

Het huwelijk tussen theorie en praktijk

Al in mijn eigen 'kweekschooltijd' (1957-1960) kreeg ik belangstelling voor de theorie-praktijk problematiek in het onderwijs. In het bijzonder waren het de ideeën van de pedagoog en filosoof Dewey (1859-1952) die tot mijn verbeelding spraken en wel zodanig dat ik zijn werk tot afstudeeronderwerp van de 'akte volledig bevoegd onderwijzer' (voorheen hoofdakte) maakte. Zijn gedachten over samenwerken, sociale interactie en integratie van theorie en praktijk zag ik als cruciale tegenhangers van het - zeker in die tijd - overheersende 'éénrichtingsverkeer' tussen leraar en leerlingen. In zekere zin zie ik Dewey's ideeën als wegbereiders van de leer- en onderwijsprincipes van het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Opvoeden gebeurt volgens Dewey (1933) door het creëren van een juiste omgeving die uitlokt tot handelen. In school kunnen kinderen, door samen te werken met andere kinderen en met volwassenen, leren hoe zich de cultuur heeft ontwikkeld, hoe uitvindingen tot stand zijn gekomen en zo meer. In kort bestek kunnen kinderen deze ontwikkelingsgang zelf nog eens doormaken. Het is een idee dat gelijkenis vertoont met Freudenthals *guided reïnvention*-principe; juist door die gelijkenis heb ik het werk van Freudenthal en zijn team waarschijnlijk ook ervaren als een geschenk uit de hemel op het goede moment en kregen de ideeën die Dewey aandroeg voor mij handen en voeten. Freudenthal zag de theorie-praktijk relatie vooral vanuit de niveautheorie[5] van Van Hiele; hij noemt het echtpaar Van Hiele-Geldof, met wie hij bevriend was, zelfs de belichaming van het huwelijk tussen theorie en praktijk. Hij formuleerde zijn eigen, meer uitgebreide interpretatie van de niveautheorie, zowel wat betreft de leerstofgebieden als de concepten (leerniveaus, praktijk, theorie). Zoals ik zijn werk nu begrijp, interpreteer ik zijn opvatting van het begrip 'praktijk' als ingevuld door horizontaal mathematiseren en didactiseren, het begrip 'theorie' - of liever 'theoretiseren' - kan dan worden geduid met verticaal mathematiseren en didactiseren. Als geen ander is Freudenthal het voorbeeld van iemand bij wie theorievormingsprocessen werden gevoed door de praktijk en omgekeerd. Met verhalen uit de praktijk probeert hij essentiële elementen uit de theorie onder de aandacht te brengen; zoals ik in de paragraaf hiervoor schets, komt de relatie tussen theorie en praktijk tot uitdrukking in de samenhang tussen observeren, reflecteren, mathematiseren en didactiseren. Freudenthal vond dat je theorieën niet kunt doorzien aan de hypothesen en stellingen, maar aan concrete voorbeelden: de verbeelding van het denken over wiskunde leren, daar gaat het bij hem om.

De vier voorbeelden die ik heb uitgekozen om wat gewaar te worden van de invloed die Freudenthal heeft gehad op mijn professionele werk, tonen het bewust worden van die verbeelding op verschillende niveaus. Het eerste voorbeeld 'isomorfie in 1971', laat zien dat het denken over tot dan toe voor mij abstracte wiskundige begrippen als 'isomorfie', uit zijn geïsoleerde formele vorm werd verdreven door het verbeelden van dat begrip in voor zelfs kinderen bevattelijke contexten, schema's en modellen. Die verbeelding van het denken vindt vooral plaats door een uitgekiend spel van 'weglaten' (decontextualiseren) en 'toevoegen' (schema's en modellen) van zaken.

Het tweede voorbeeld gaat dieper in op het leren van kinderen. Het voorbeeld toont de invloed die Freudenthals ideeën over vanzelfsprekend, geïntegreerd leren van wiskunde hebben gehad op mijn denken, ideeën die onder andere zijn uitgewerkt in de 'wereldjes van Wiskobas'.

Met het derde en vierde voorbeeld probeer ik te illustreren hoe Freudenthals verbeelding van het denken over de samenhang tussen observeren, reflecteren, mathematiseren en didactiseren, mij op het spoor heeft gezet van betekenisvol denken over de theorie-praktijk problematiek van het reken-wiskundeonderwijs. Waar zich de invloed in de twee eerste voorbeelden vooral manifesteert als het - vrijwel direct - toepassen van ideeën, gaat het in de twee laatste voorbeelden veel meer om een verandering van houding en wijze van denken.

Ongetwijfeld zal Freudenthal nog veel meer met me gaan doen ...

Noten

1 De titel van het boekje luidt: *Aktionslässe situationsorientierte Lernangebote für Fünfjährige (2).*
2 OGLO staat voor Ontwikkelgroep Leraren Opleiding; deelnemende ontwikkelaars waren opleiders van VO, Pabo, NLO, ULO en MO-opleidingen. De groep stond onder leiding van F. Goffree, eindproduct was het boek 'Tegengesteld, wiskundedidactiek op de grens van basis- en voortgezet onderwijs, toegespitst op negatieve getallen.'
3 Zie: Freudenthal (1991), pag.100.
4 Ik ben er niet zeker van of 'idee-zoeken' een goede vertaling is van *thought-searching* (Freudenthal 1991, pag.100).
5 De niveautheorie beschrijft niveaus in het leerproces van leerlingen (Van Hiele, 1973; Freudenthal, 1991).

Literatuur

Brink, F.J. van den (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen*. Utrecht: OW&OC, Universiteit Utrecht (proefschrift).

Dewey, J. (1933). *How we think*. Buffalo/New York: Prometheus books.

Freudenthal, H. (1976). Wiskunde-onderwijs anno 2000. Euclides, *52*(8), 294.

Freudenthal, H. & F. Oort (1977). Erepromotie. Rede uitgesproken ter gelegenheid van het verlenen van een eredoctoraat aan Prof. Dr. H. Freudenthal, 10 januari 1977. *Euclides, 52*(9).

Freudenthal, H. (1982). Wiskundig didactische doordenkingen. *Willem Bartjens, 1*(3), 132.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1984). *Appels en Peren. Wiskunde en Psychologie*. Apeldoorn: Walraven.

Freudenthal, H. (1987). Theorievorming bij het wiskundeonderwijs. Geraamte en gereedschap. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 5*(3).

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Goffree, F. & K. Buys (red.). (1989). *Tegengesteld*. Baarn: Bekadidact.

Goffree, F. (1993). *Kleuterwiskunde*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht, Freudenthal Instituut (proefschrift).

Heege, H. ter (1985). Tweemaal twee voorbeelden van 'realiteit'. *Willem Bartjens, 5*(1), 12-15.

Lange, J. de (1979). Contextuele problemen. *Euclides, 55*, 50-60.

Loonstra, F. (1963). *Inleiding tot de Algebra*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht*. Utrecht: IOWO (proefschrift).

Why and how was my professional work so strongly influenced by Freudenthal, as teacher in elementary, secondary and higher education and now still in my work as a researcher? How to characterise that influence? I would like to respond to those questions with some examples. Hopefully these will wash, because: 'It needs less efforts to provide the learner with innumerable examples than to search the one and only - paradigmatic - example that makes the difference'. (Freudenthal, 1984. p. 102).

With four examples I will try to illustrate how Freudenthal's imaginative thinking stimulated my own thinking on several levels.

Walking with Bastiaan

Bastiaan is 5 years and 4 months old (5,4). Walking along a river. He found a beautiful thin wooden plank. All of a sudden he asks: 'If I throw it into the water, will it tilt?' I let him try it on the path, but before announcing the conclusion he throws the plank into the water and states that it is floating on its flat side. Numerous queries on floating and sinking follow: why some tree was covered by the water, why iron ships are better than wooden ones, why a bottle will sink.

(Educational Studies in Mathematics, 8, 1977, 4*)*

Hij gooide boeken uit de trein

Rainer Kaenders
Technische Universiteit, Delft

Als de ooievaar ze niet brengt, hoe ontstaan de kleine kinderen dan in het echt? Het antwoord is: door iets dat veel mooier en opwindender is. Als in deze metafoor het ooievaarssprookje de schoolwiskunde voorstelt en de werkelijkheid de 'echte' wiskunde, dan missen we het een en ander op school. Rainer Kaenders schrijft wat Hans Freudenthal hierover zei.

1 Inleiding

> 'Verleden zomer trok ik - op een conferentie van een week - nogal eens op met iemand die ik toen voor het eerst was tegengekomen en die mij bij herhaling liet weten hoe verbaasd hij was een totaal andere Freudenthal te hebben ontmoet dan hij uit mijn geschriften had gedestilleerd,'

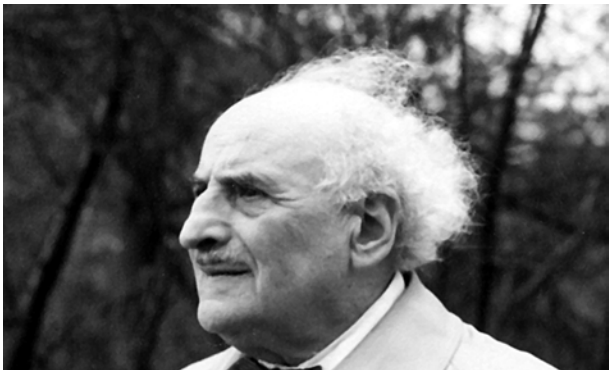
… vertelt Hans Freudenthal in zijn herinneringen van 1987. Ikzelf heb ook het gevoel met Hans Freudenthal op te trekken - maar dan alleen met zijn geschriften. Er blijft voor mij niets anders meer over dan de Freudenthal die ik uit zijn werk kan destilleren.

Zijn boeken begeleiden en inspireren mij bij vele gelegenheden. Alleen bij Polya vind ik een vergelijkbare rijkdom aan visie, ideeën, paradigma's, perspectieven en methodes om na te kunnen denken over wiskundeonderwijs. Het object van beschouwing, onderzoek en ontwikkeling - het daadwerkelijk plaatsvindende wiskundeonderwijs - is iets dat veel te complex is om tot op de bodem te kunnen doorgronden. En juist dit besef vind ik nergens zo goed verwoord als in Freudenthals 'Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht (1978)'. De nadruk ligt op 'Vorrede' want hij beweerde in 1978 met nadruk dat er geen wetenschap van het wiskundeonderwijs bestond. Natuurlijk, iedereen die met wiskundeonderwijs te maken heeft weet dat je er meer of minder van af kunt weten. Zeker is ook dat de relevantie hiervan bijzonder groot is, meer dan een miljoen Nederlandse kinderen krijgen toch reken- en wiskundeonderwijs - dag in, dag uit. Maar wat betekent dat weten over wiskundeonderwijs eigenlijk, wat zijn wetenschappelijke uitspraken over iets dat zo ingewikkeld is? De uiteenlopende interpretaties van grootschalige studies als Third (nu: Trends in) International Mathematics and Science Study (TIMSS) en Programme for International Student Assessment (PISA I en II) maken onze hulpeloosheid met zicht op algemene uitspraken hierover nog weer eens extra duidelijk. Toch zijn grootschalige statistieken over randvoorwaarden en gegevens van het onderwijs nodig omdat zij belangrijke informatie verschaffen en onmisbaar zijn voor beleidsmakers. Ik ken echter niemand die de beperkingen van statistisch onderzoek met betrekking tot inhoudelijke aspecten van het wiskundeonderwijs zo duidelijk onder ogen heeft gezien als Freudenthal. Ruim dertig jaar geleden deed de International Association for the Evaluation Achievement (I.E.A.) soortgelijke studies naar wiskundeonderwijs, net als nu de Oragnisation for Economic Co-operation and Development (OECD), met deels waardevolle en deels eveneens twijfelachtige opvattingen over het leren van wiskunde.

2 Een wetenschap van het wiskundeonderwijs

Zoals gezegd, ook Freudenthal voelde zich in zijn 'Vorrede' niet in staat om een wetenschap van wiskundeonderwijs in het leven te roepen. Wel kon hij formuleren waar een dergelijke wetenschap aan zou moeten voldoen en was hij voldoende thuis in de cultuurgeschiedenis van andere wetenschappen om geloofwaardig aan te tonen hoe ook andere wetenschappen vergelijkbaar lang in het duister tastten. De 'Vorrede' is nogal fundamenteel opgezet. In het eerste hoofdstuk '*Wat is wetenschap*?' zet hij wetenschap af tegen techniek, filosofie en ingenieurskunst - allemaal even belangrijke en waardevolle menselijke activiteiten. Uiteindelijk bevat zijn antwoord drie simpele criteria voor wetenschap: relevantie, consistentie en openbaarheid.

Vervolgens twee hoofdstukken '*over onderwijs*' en '*over onderwijswetenschap*' waarin Freudenthal uitgebreid twee zaken bespreekt die nu weer overal in de analyse van onderwijsproblemen de kop opsteken: taxonomy, atomization. Hij was een fel tegenstander van elke vorm van leerdoeltaxonomie (*lege dozen*), zoals die ook nu in verschillende landen als reactie op PISA weer in opkomst zijn. Bovendien verzette Freudenthal zich tegen atomization, het atomistisch opdelen van vaardigheden en leerdoelen in kleine stapjes zoals bijvoorbeeld sommige Nederlandse vervolgopleidingen tegenwoordig weer doen als zij hun verwachtingen over beginnende studenten willen formuleren. Ook al kon hij niet zeggen wat een wetenschap van het wiskundeonderwijs wel is, zo maakte hij overtuigend duidelijk wat een wetenschap van het wiskundeonderwijs niet is. Samen met statistici trok hij de betekenis van de toepassing van statistische machinerie op onderwerpen die kwalitatief nog niet begrepen zijn in twijfel en wees hij nadrukkelijk op de gevaren hiervan. Algemene onderwijskunde moest volgens hem ontstaan vanuit de didactiek van de vakken. In die zin vond hij dat de wiskundedidactiek een heel stuk dichterbij de status van een wetenschap stond dan de onderwijskunde - allemaal dikke knuppels in het hoenderhok!



Nadat hij op een goede scholastische manier korte metten had gemaakt met sterk verspreide en invloedrijke opvattingen over de epistemologie van het wiskundeonderwijs van zijn tijd - pas daarna in het laatste hoofdstuk - formuleerde hij voorzichtig prille principes van een mogelijke wetenschap van wiskundeonderwijs, waarvan hij dacht dat er ooit rekening mee moest worden gehouden. Dit deed hij nooit door simplificering. Liever liet hij het dan in het midden. In de Engelse uitgave van dit boek 'Weeding and sowing' vindt men bijvoorbeeld de moeilijk te vertalen passage:

> 'Guiding means striking a delicate balance between the force of teaching and the freedom of learning. It depends on such a perplexing manifold of hardly retrievable and only vaguely discernible variables that it seems inaccessible to any general approach.'

Principes die hij bijvoorbeeld wel uitgebreid beschreef waren: discontinuïteit in het leerproces, de verbinding van de leerprocessen van leerling en leraar, didactische fenomenologie, verandering van perspectief, locale ordening, mathematiseren, paradigmatische voorbeelden of het onderscheid tussen apprehensie en comprehensie bij het verwerven van abstracte begrippen, waarop wij later nog terug zullen komen. Nu, reeds vijftien jaar na zijn dood, is juist dit boek onder het stof van de boekenkasten verdwenen. Laatst hoorde ik dat het boek in een Nederlandse universiteitsbibliotheek bij de uitgesorteerde boeken werd aangetroffen.

3 Wiskundig-didactisch onderzoek

Voor Freudenthal was wiskundig-didactisch onderzoek een geheel, bestaande uit hermeneutische beschouwingen over wiskunde (zoals didactische fenomenologie), kwalitatieve beschrijving van wiskundige leerprocessen en de praktijk van wiskundeonderwijs, als ook ontwikkelingsonderzoek met implementatie door onder meer curriculumontwikkeling.

Hij zag niets in didactische inzichten die niet uiteindelijk leidden tot verbetering van het daadwerkelijk onderwijs en die ook niet bijdragen aan de ontwikkeling van docenten:

> 'Scheiding van ontwerp en realisering is slecht: het is niet alleen objectief verkeerd omdat het feedbackpad onnodig lang wordt; het is echter ook subjectief verkeerd omdat het tussenpersonen aan de informatie over leerprocessen ontbreekt die hun eigen leerproces kan bevorderen.'

En:

> 'Mijn doel is een geïntegreerde docententraining, waarbij in het bijzonder vakonderwerpen en didactische componenten elkaar doordringen[1] …'

Zelfs in de curriculumontwikkeling gaf Freudenthal de voorkeur aan een dergelijke werkwijze:

> 'In curriculumontwikkeling is de eenheid van de ontwerpcyclus: voorbereiding en verdere training van de docent, implementatie in de lespraktijk en evaluatie, terug naar een revisie van het ontwerp, een veel meer belovende strategie; het is dezelfde man die het lesmateriaal ontwerpt, die de les voorbereidt en de klas aanstuurt en die dan de uitvoering en het ontwerp evalueert. De activiteiten waarbij hij zelf betrokken is, worden door een team geobserveerd. Dit waarborgt dat de bedoelingen achter het ontwerp uit de verf komen, dat niet functionerend lesmateriaal meteen wordt bijgesteld en opnieuw wordt uitgeprobeerd in een tijdelijk verschoven cyclus in een parallelklas.'[2]

Deze visie op didactisch onderzoek is ook voor mij de leidraad voor het onderzoek dat ik samen uitvoer met zes ervaren wiskundedocenten van drie verschillende scholen in het Nijmeegse AZL-project. Voor ons is Freudenthal een van de grondleggers van deze manier van werken.

In de beoordeling van andermans onderzoek wilde hij precies weten onder welke omstandigheden en met welke methodologie er werd gewerkt. In 'Mathematik als pädagogische Aufgabe' treft men bijvoorbeeld een appendix aan waarin hij ingaat op onderzoek van Piaget. Aan de hand van concrete vragen en de omstandigheden waaronder deze aan de leerlingen werden voorgelegd, gaf hij stevige kritiek op de door Piaget getrokken conclusie dat kinderen eerst aantallen en dan getallen zien. Dit kon hij doen, omdat het onderzoek openbaar was. Trouwens, bij de PISA-studies zou hij dit niet kunnen doen; hier zijn de daadwerkelijk aan de leerlingen voorgelegde vragen geheim.

4 Bildungsideale

Freudenthal zag wiskundeonderwijs 'als pedagogische opdracht' 'Mathematik als eine pädagogische Aufgabe I en II, 1973' zoals hij ook zijn funderend werk noemde. Wiskundeonderwijs had in zijn visie niet op de eerste plaats de taak om kinderen voor de arbeidsmarkt of het vervolgonderwijs klaar te stomen. 'Echt opvoedend werk betekent: vanuit eerlijke overtuiging de goede weg voor opvoeding te zoeken.
Onderwijskunde/pedagogiek zou in de eerste plaats de rationele verantwoording van deze eerlijke overtuigingen moeten zijn.'[3] Met zijn opvattingen over onderwijs als middel tot 'Bildung' (zoiets als groei, bewustwording, vorming en emancipatie) stond hij bewust in de traditie van Duitse verlichters als Immanuel Kant en Wilhelm von Humboldt. Freudenthal raakt juist hiermee bij mij een gevoelige snaar. Culturele achtergrond zit diep. De beroemde definitie die Kant in een opstel 'Berlinische Monatsschrift. Dezember-Heft 1784. S. 481-494' van verlichting gaf ('Ausgang des Menschen aus der selbstverschuldeten Unmündigkeit') kun je rechtstreeks vertalen naar het wiskundeonderwijs: vrijmaking van de wiskundeleraar uit zijn zelfveroorzaakte onmondigheid. Kant schrijft verder:

> 'Het is zo gemakkelijk onmondig te zijn. Heb ik een boek dat voor mij denkt, een voorganger die voor mij een geweten heeft, een arts die mijn dieet voorschrijft enzovoort, zo hoef ik mij niet zelf te vermoeien. Ik heb het niet nodig om te denken, als ik maar kan betalen; anderen zullen de onaangename zaken wel van mij overnemen.'[4]

Op de feestrede ter aanleiding van tien jaar Wiskobas op 19 maart 1979 zei Freudenthal:

> 'Ik houd van een mentaliteit van het zelf willen doen, van niet slaafs in het leidsel lopen.'

Soms denk ik: net als op pakjes sigaretten staat: roken brengt uw gezondheid ernstige schade toe, zo zou verplicht bij elke leerboekserie op de kaft moeten komen te staan: slaafs volgen van deze leerboeken brengt uw bekwaamheid ernstige schade toe. Dat de oorzaak voor zulk schadelijk gedrag niet alleen bij docenten maar ook bij hun organisaties te zoeken is, is nog tot daaraan toe.

5 Een zwemleraar gezocht die zelf kan zwemmen

Zo luidde een advertentie uit een Frans provincieblad die Freudenthal in 'Mathematik als pädagogische Aufgabe' tot ondertitel verhief van het hoofdstuk 'de wiskundeleraar'. Hij gaf in zijn geschriften herhaaldelijk blijk van bewondering voor goede leraren. Hij vergat daarbij niet op te merken dat zij iets kunnen waarvan hij zelf dacht het niet te kunnen. Onmisbaar was voor hem echter dat een wiskundeleraar over diepe, brede en gedegen kennis van wiskunde moet beschikken en een duidelijke visie moet hebben opgebouwd op de wiskunde. De vergelijking met de zwemleraar maakt de onwenselijke gevolgen van een tekort aan wiskunde plastisch duidelijk. Freudenthals boeken en publicaties zijn geschreven voor onderwijsmensen met een stevige wiskundige achtergrond.

6 'New Math' en wiskundige onzin

Het lijkt mij een - niet in de laatste plaats ook door Freudenthal aangespoord - mythe dat de Royaumont-conferentie van 1959, en in het bijzonder het 'à bas Euclide' van Dieudonné, het startschot gaf voor de beweging die later 'New Math' werd genoemd. Eveneens lijkt het mij een mythe dat Freudenthal dit in Nederland in zijn eentje wist tegen te houden.
Het is aardig om de toespraken van Marshall H. Stone en Jean Dieudonné op die conferentie nog eens te lezen. Wat zij zeggen is zo gek nog niet en hun uitspraken kunnen moeilijk verantwoordelijk worden gesteld voor de latere 'New Math' excessen. Freudenthal wilde in wezen de leerlingen dezelfde wiskunde laten leren die ook Stone en Dieudonné voor ogen hadden - de echte wiskunde zoals zij deel uitmaakt van de menselijke cultuur. Zijn kritiek op 'New Math' richtte zich veel meer op de methode van wiskundeleren, de geïsoleerdheid en de onwiskundige manier van wiskunde bedrijven die deze stroming later kenmerkte.

In 'Mathematik als pädagogische Aufgabe' richtte hij zich niet tegen de verzamelingenleer en andere wiskundige verworvenheden. Hij vroeg zich eerder af wanneer, waar en hoe deze begrippen in het wiskundige leerproces moesten worden ingebracht. Zijn opvatting was: als deze dingen binnen deze filosofie per se zo vroeg moeten worden gedaan, dan moet je op z'n minst de allergrootste onzin voorkomen die daarmee uitgehaald kan worden:

> 'Nu, kort geleden sloeg ik een leerboek open waar de functie $[n, a] \rightarrow na$ expliciet als een afbeelding van de paarverzameling werd ingevoerd, die uit Z en de verzameling L van de letters wordt gevormd, naar de verzameling, geloof ik, van de monomen - ik heb het boek gelijk uit de trein gegooid wat zeker volledig onverantwoord was.'

7 Antididactische inversie

Wij zeiden het al, het waren niet de wiskundige inhouden van 'New Math' waar Freudenthal zich tegen uitsprak - dit was ten slotte de moderne wiskunde waar hijzelf ook deel van uitmaakte - nee, het waren de methodes waarmee deze wiskunde werd onderwezen. Het ontbreken van relaties met iets wat voor kinderen betekenis heeft, *Beziehungslosigkeit,* was bijvoorbeeld een belangrijk punt in zijn kritiek. Vanzelfsprekend hoorde hier ook eerder geleerde wiskunde bij. Hij zette grote vraagtekens bij de introductie van wiskundige begrippen uitsluitend via de axiomatische en logisch deductieve methode.

> 'Whoever is familiar with the mathematical method and methodology, knows what part is played by the inversion: the final result of the developmental process is chosen as the starting point for the logical structure in order to finish deductively at the start of the development. This genetic-logical inversion expresses itself as a didactical - or rather anti-didactical - inversion.'

Dat wil niet zeggen dat hij de rol van axiomatiek en deductiviteit heeft ontkend of onderschat. Het ging om de volgorde.

> 'Kinderen zouden het leerproces van de mensheid moeten herhalen, niet zoals het feitelijk heeft plaatsgevonden, maar eerder hoe het gebeurd zou zijn als mensen in het verleden een beetje meer hadden geweten wat wij nu weten.'[5]

Dit noemde hij 'geleide heruitvinding' en hij formuleerde een hele bundel aan alternatieve benaderingen die wiskunde in een breder epistemologisch perspectief zette: lokale ordening, *Beziehungshaltigkeit*, didactische fenomenologie van wiskundige structuren. Deze opening van het epistemologisch perspectief gaf meteen ook ruimte voor niet-cognitieve leerdoelen, zoals vaardigheden en heuristische kennis zoals hij l991 in zijn 'China lectures' uitvoerig heeft toegelicht. *Guiding to an activity: reinvent mathematising rather than mathematics.* Hij wist dat denkactiviteit het leren pas mogelijk maakt. Dit is tegenwoordig een algemeen aanvaard element in moderne leertheorieën.

> 'Since I stressed mathematics as an activity my answer to the question 'where to?' will be: 'to an activity'.'

De geleide heruitvinding was voor hem een geschikt principe om dit te bereiken. Dat leerlingen hun eigen wiskundige problemen vinden die een eigen productiviteit tot gevolg hebben, beschouwt hij als wezenlijk hiervoor. Deze verschuiving naar niet-cognitieve leerdoelen leidde later tot 'Realistic Mathematics Education (RME)', een door Adri Treffers ingevoerde samenstelling door Freudenthal en Treffers geformuleerde kenmerken van goed wiskundeonderwijs. Ondanks de genuanceerde formulering van dit begrip, zijn er veel mensen met RME op de loop gegaan om de mathematisering van het onderwijs te rechtvaardigen.

Freudenthal dacht over elk begrip dat hij lanceerde diep en uitgebreid na. De 'China lectures' zijn er een indrukwekkende getuigenis van. RME komt niet van hem. Evenals de doorknede pleitbezorgers van RME, maar anders dan veel schoolboekauteurs, zag hij een belangrijke verantwoordelijkheid voor de docent weggelegd waar het gaat om een beeld van realiteit:

> 'The lack of more substantial objectives can be made up for asking what the learner is expected to mathematise. This can be answered in one word: Reality. What kind of reality? The learner's own reality as laid open to him by his guide.'

8 Beziehungshaltigkeit

> 'Unter all den Argumenten für das Unterrichten einer von den Anwendungen isolierten Mathematik kann ich nur das eine verstehen - das der Inkompetenz,'

… schold Freudenthal 1973 in 'Mathematik als eine pädagogische Aufgabe'. Relevante en echte toepassingen zijn moeilijk - meestal veel moeilijker dan de general abstract stuff waarmee 'New Math' te bedde ging. 'New Math' behelsde vormen van abstractie die verwijderd waren van het voorafgegane abstractieproces en daardoor beziehungslos en geïsoleerd werden. De relatie met relevante toepassingen was ver te zoeken. Helaas is dit thans niet anders. Toepassingen krijgen ook nu amper de ruimte omdat de hiervoor nodige wiskundige technieken en vaardigheden ontbreken. De wiskundeopleidingen op universiteiten, juist die van aanstaande docenten, leiden mijns inziens ook nu nog vaak aan *Beziehungslosigkeit,* zoals de wiskundeleraar Frans Pagen dit in het 'Nieuw Archief voor Wiskunde' (5/3, nr. 3, 2002) verwoordde:

> 'Daarna leek de universiteit veel op de middelbare school en heb ik wel veel formele wiskunde geleerd (en weer vergeten), maar weinig over de betekenis van die wiskunde.' 'Ik leerde ook dat de wiskunde blijkbaar verworden is tot een wildgroei van allerlei specialisaties. Zo zeer, dat het blijkbaar niet meer mogelijk is om een inhoudelijk geïntegreerd overzicht ervan te geven. Ik moest het doen met de classificatie uit de bibliotheek.'

9 Het ooievaarssprookje

Als de ooievaar ze niet brengt, hoe ontstaan de kleine kinderen dan in het echt? Het antwoord is: door iets dat veel mooier en opwindender is.

> 'Het is het oude lied van de twee wiskundes; naast de serieuze een schoolwiskunde, een ooievaarssprookje. Alleen kan dit ooievaarssprookje de echte wiskunde onmogelijk vervangen. Inmiddels word je van de fabrikanten van deze nieuwe wiskunde als vertegenwoordiger van de oude wiskunde niet serieus genomen.'[6]

De geweldige metafoor van het ooievaarssprookje uit 'Mathematik als eine pädagogische Aufgabe' is een van de mooiste en meest subtiele vergelijkingen tussen wiskunde en seks die ik ken. Haarscherp ziet Freudenthal hier een oud probleem onder ogen. Het is een lang bekende neiging van wiskundeonderwijs dat deze zijn eigen versie van wiskunde probeert te scheppen. Eentje die beter in de schoolse verwachtingen van leraren en leerlingen past, maar die op een gegeven moment aan relevantie inboet. Er ontstaan verschillende denkcategorieën: argumenten die in de traditionele wiskunde gelden verliezen hun betekenis in de schoolwiskunde en andersom.

> 'Wij hebben dit al eerder aan de orde gesteld, de filosofie van de twee wiskundes, de één een ooievaars-sprookje van de ander. F. Klein sprak van het dubbele vergeten: een keer de schoolwiskunde vergeten als je naar de universiteit komt, en omgekeerd de universiteitswiskunde vergeten zodra je als leraar terugkeert op school.'[7]

10 Voor abstractie en formalisering

Abstractie is het wezen van wiskunde. Natuurlijk wilde Freudenthal leerlingen scholen in hun abstractievermogen. Net als alle wiskundigen wist hij dat abstractie dingen makkelijker maakt en niet moeilijker. De formalisering, een wezenlijk aspect in een abstraheringsproces, was voor hem als leerdoel van uiterst groot belang:

> 'Ondertussen wil ik toch wel opmerken, dat het formaliseren, ook al is het tot nu toe meestal binnen de wiskunde beoefend, in de toekomst tot de meest overdraagbare bezigheid van de wiskundige zal worden. Niets hebben alle menselijke terreinen van werkzaamheden meer gemeen dan de tendentie tot taalmatige uitdrukking; de bewuste analyse van de mogelijkheden van taalgebruik zoals dat door de wiskundige wordt beoefend, moet haar gevolgen elders doen rijpen.'[8]

Als je kijkt hoeveel wiskundigen tegenwoordig in beroepen werken waarvoor vroeger economie of rechten als geschikte opleiding werden beschouwd, en zeker als je naar informatica kijkt, dan zie je dat zijn voorspellingen bewaarheid zijn geworden. Freudenthal wilde de abstractie bevorderen, ondanks alle misbruik die in zijn naam wordt gepleegd om abstractieprocessen te omzeilen.
Hij pleitte er zelfs voor om meer abstractie in het wiskundeonderwijs te brengen. Een voorbeeld hiervan is zijn voorstel uit de 'Vorrede' om bij het verwerven van algemeenheid een onderscheid te maken tussen comprehensie en apprehensie.

> 'Ik gebruikte de woorden comprehensie en apprehensie om twee manieren van het verwerven van algemeenheid te onderscheiden. Ik voelde me vrij de termen comprehensie en apprehensie scherper te vatten dan ik ze tegenkwam, en ik deed dit niet zonder een beetje etymologie op de achtergrond. Comprehensie, het 'samennemen', apprehensie, het opnemen. Algemeenheden door het verzamelen van vele details, versus het oppakken van een structuur, en is het maar door een voorbeeld, één enkel voorbeeld.'[9]

Sommige begrippen moeten volgens hem niet door geleidelijk algemener wordende contexten worden voorbereid, maar rechtstreeks abstract worden ingevoerd, dan is een enkel paradigmatisch voorbeeld voldoende om de wezenlijke kenmerken van deze abstractie te verhelderen.

> 'De gebruikelijke methode in het traditionele reken- en algebraonderwijs bestaat erin de operaties in te voeren en de hiervoor geldende wetten door middel van voorbeelden te bevestigen; in tegenstelling hiertoe streeft de meetkundige en algebraïsche methode, mits goed begrepen, rechtstreeks naar algemeenheid. Zoals ik heb benadrukt, voorbeelden zijn geen slechte dingen, als ze maar echt exemplarisch zijn, dat wil zeggen paradigmatisch.'[10]

11 'No Math' beweging

Freudenthals perspectief op de 'New Math' beweging laat vele parallellen zien met de situatie van nu; je zou bijna kunnen zeggen, de tijd van de 'No Math' beweging. Daarom is het door hem gevormde begrippenkader en zijn kritiek op de toestanden van 'New Math' een wezenlijke achtergrond voor mijn kritische beschouwingen over de huidige situatie. De antididactische inversie is vervangen door antididactische omissie (zie mijn artikel in het 'Nieuw Archief voor Wiskunde', vijfde serie, deel 4, nr. 2, 2003), de vele vormen van wiskundige onzin in lesmateriaal zoals 'New Math' die kende, zien er in 'No Math' anders uit, maar zijn even erg. In beide gevallen is er een schoolwiskunde ontstaan die het contact met de echte wiskunde heeft verloren. Echte toepassingen zijn ook nu weer zoek, omdat de daarvoor benodigde wiskundige vaardigheden en inzichten ontbreken. Net als toen is de beleidsmatige reflex op zulke crisissen door middel van atomisering en taxonomie te reageren eveneens weer een concrete bedreiging. Er is echter een verschil: wellicht dat wij kunnen leren van de ervaringen van toen.

12 Van hem valt nog steeds veel te leren

Ik heb nog lang niet alles gelezen wat hij, Freudenthal, over didactiek heeft geschreven. Toen hij overleed zat ik in mijn vierde studiejaar in Bonn. Achteraf denk ik vaak dat ik hem graag een keer had meegemaakt. Was hij echt zo'n baasje zoals sommigen beweren? Klopt het dat hij zelfs tegen een minister zijn stem mocht verheffen? Hoe ging deze intellectuele titaan om met de meer bescheiden mensen in zijn omgeving? Was zijn bewondering voor het vakmanschap van wiskundedocenten gebaseerd op gelijkwaardigheid? Hoe zou hij nu tegen het instituut aankijken dat zijn naam draagt? Ik zal het nooit weten en eigenlijk is het ook niet meer belangrijk. Zijn werk spreekt voor zich.

Met dank aan Nellie Verhoef en Ed de Moor voor constructief commentaar op dit artikel.

Noten

1 'Separating design and realisation is detrimental: it is not only objectively wrong since the feedback path becomes unnecessarily long; but also subjectively since intermediaries lack the information about learning processes that can promote their own learning processes.' (alle vertalingen door RK).
'My goal is integrated teacher training, where in particular the subject matter and the didactical component should penetrate each other …' (Freudenthal, 'Vorrede zu einer wissenschaft vom Mathematikunterricht, 1978'.)

2 In curriculum development the unity in the cycle of design, preparation and further training of the teacher, guidance in the classroom and evaluation, back to revision of the design, is a more promising strategy; it is the same man who designs the teaching matter, who prepares and guides the teacher's performance in the classroom, and who evaluates the performance and the design, in which the activities he himself is accompanied are observed by a team. This serves to guarantee that the intentions behind the design are asserted, that malfunctioning teaching matter is immediately repaired and tried out anew in a temporarily shifted cycle in a parallel class.

3 Wahre erzieherische Tätigkeit ist: nach ehrlicher Überzeugung den rechten Weg zur Erziehung zu suchen. Erziehungswissenschaft soll in erster Linie das vernünftige Verantworten dieser ehrlichen Überzeugung sein.

4 Es ist so bequem, unmündig zu sein. Habe ich ein Buch, das für mich Verstand hat, einen Seelsorger, der für mich Gewissen hat, einen Arzt, der für mich die Diät beurteilt usw, so brauche ich mich ja nicht selbst zu bemühen. Ich habe nicht nötig zu denken, wenn ich nur bezahlen kann; andere werden das verdrießliche Geschäft schon für mich übernehmen.

5 Children should repeat the learning process of mankind, not as it factually took place but rather as it would have done if people in the past had known a bit more of what we know now.

6 Es ist das alte Lied der zwei Mathematiken; neben der seriösen eine Schulmathematik, ein Storchenmärchen. Nur kann dieses Storchenmärchen die richtige Mathematik unmöglich machen. Inzwischen wird man von den Fabrikanten dieser Neuen Mathematik als Vertreter der alten Mathematik nicht ernst genommen.

7 Wir haben das schon früher erwähnt, diese Philosophie der zwei Mathematiken, die eine Strorchversion der anderen. F. Klein sprach vom doppelten Vergessen: Einmal die Schulmathematik vergessen, wenn man die Universität bezieht, und umgekehrt die Universitätsmathematik, wenn man als Lehrer zur Schule zurückkehrt.

8 Inzwischen möchte ich aber schon sagen, dass das Formalisieren, wenn auch bis jetzt meist innerhalb der Mathematik geübt, sich in der Zukunft als die am wirksamsten transferable Tätigkeit des Mathematikers erweisen wird. Nichts ist nämlich allen menschlichen Wirkungsgebieten so sehr gemeinsam als die Tendenz zum sprachlichen Ausdruck; die bewusste Analyse der sprachlichen Möglichkeiten, wie sei vom Mathematiker geübt wird, muß ihre Folgen anderswo zeitigen.

9 I used the words comprehension and apprehension to distinguish two ways of acquiring generalities. I took the liberty of moulding these terms comprehension and apprehension more sharply than I found them, and I did so not without a bit of etymology in the background. Comprehension, the 'taking together', 'apprehension', 'the taking on'. Generalities by gathering many details, versus seizing a structure, albeit by an example, by one example.

10 The usual method of traditional arithmetic and algebra instruction is to introduce the operations and corroborate the laws governing them by examples; as opposed to this the geometric and the algebraic method, if truly understood, aim straightforwardly at generality. As I have stressed, examples are not a bad thing, if only they are really exemplary, that is paradigmatic.

If the stork doesn't bring them, then what is the actual origin of babies? The answer is: something much more beautiful and exciting. If, in this metaphor the stork tale represents the math at school and reality represents pure mathematics, it is clear that we miss something in school. Rainer Kaenders writes down what Hans Freudenthal has had to say on this subject.

Freudenthals vervulde toekomstvisie

Edu Wijdeveld

Op twee fundamentele momenten in de jaren zestig uit professor Freudenthal een toekomstvisie over de ontwikkelingsgang naar gemoderniseerd wiskundeonderwijs, die hij in de jaren zeventig zelf zou helpen vervullen:
a de modernisering van het leerplan wiskunde is primair een kwestie van modernisering van het wiskundeonderwijs, veel meer dan modernisering van de wiskundeleerstof;
b modernisering van het wiskundeonderwijs is een permanente aangelegenheid, die geïnstitutionaliseerd dient te worden.
Beide visies kon hij (mede) zelf gestalte geven als hoogleraar-directeur van het in 1971 opgerichte Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO).

1 Wiskunde*onderwijs*

Op 19 juli 1961 installeerde de toenmalige staatssecretaris van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, drs. G.C. Stubenrouch, de ‘Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde’ (CMLW). Deze commissie weerspiegelde het Nederlandse antwoord op de oproep van de internationale OEEC-conferentie te Royaumont (1959) om de verouderde schoolopleidingen in de wiskunde aan te passen aan moderne (lees: Bourbakistische) wetenschappelijke ontwikkelingen in dat vakgebied.[1]
De belangrijkste opdracht voor de CMLW luidde dan ook:

> Welke moderne delen van de wiskunde zouden, van de zijde van de wetenschap gezien, geschikt zijn voor invoering bij het VHMO,[2] met het oog op de verkleining van de kloof die bestaat tussen de universitaire wiskunde en de schoolwiskunde?

Ook diende nagegaan te worden:

> … op welke wijze differentiatie zou kunnen worden aangebracht in het wiskundeprogramma met het oog op de leerlingen die een bijzondere aanleg voor wiskunde blijken te bezitten.

Verder vroeg de staatssecretaris aan de commissie om aan de hand van schoolexperimenten na te gaan welke de didactische mogelijkheden waren op dit gebied en om de leraren daar via heroriënteringscursussen op voor te bereiden.

Samengevat luidt de opdracht aan de CMLW: ontwerp een programma voor het VHMO dat beter voorbereidt òp en aansluit bij recente ontwikkelingen in de universitaire wiskunde.

De samenstelling van de commissie, in meerderheid bestaande uit hoogleraren van verschillende universiteiten, is daar dan ook op afgestemd.

De CMLW gaat zeer voortvarend aan de slag en formeert in zijn eerste vergadering subcommissies voor de heroriëntering van leraren en voor schoolexperimenten. Deze laatste commissie krijgt de opdracht een ß1- en ß2-programma te ontwikkelen voor de bovenbouw-VHMO en de mogelijkheid te onderzoeken van ‘experimenten met geselecteerde leerlingen’.
Professor Freudenthal, die tijdens die eerste vergadering van de CMLW in Amerika vertoeft, reageert op de notulen van die bijeenkomst met een brief, waarin hij onder meer constateert:

> ... Een discussie die hoofdzakelijk draait om een splitsing in ß1 en ß2 legt mijns inziens de accenten minder juist. Het voornaamste resultaat hiervan kan zijn een prachtig programma van de speciaal wiskundige richting, waaraan er naar mijn overtuiging weinig behoefte is. Ik zie geen noodzaak om wiskundige stof af te wentelen van universiteit en hogeschool naar het VHMO.

En vervolgens:

> ... Ik heb diverse malen, naar bekend zal zijn, betoogd dat ik de modernisering van het leerplan zoals deze op het ogenblik door velen wordt gepropageerd, geen urgent probleem acht en wel niet omdat ik aan moderne wiskunde een hekel zou hebben, maar omdat in diverse voorstellen de introductie van moderne leerstof als principieel doel wordt gezien. Dientegenover zie ik als eerste en enige urgentie een verbetering van het wiskunde*onderwijs*. (cursief: EW)

En ten slotte:

> ... Uit het voorgaande zal ook duidelijk zijn, dat de modernisering in de onderbouw en wel in de eerste klasse zal moeten beginnen.

Wat was het effect van deze vroege kritiek van Freudenthal? Kennelijk niet veel, want in 1985 schrijft hij daarover:

> ... Het enige effect van mijn brief was voorlopig dat er een subcommissie onderbouw als speeltuin voor mij werd ingericht.

Een wat suggestief commentaar, omdat in die eerste CMLW-vergadering wel degelijk sprake was van onderbouwexperimenten, al werden die voor een later tijdstip voorzien. Hoe het ook zij, op dat moment - augustus 1961 - zal professor Freudenthal weinig vermoed hebben, dat exact tien jaar later - augustus 1971 - het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO) zou worden opgericht, dat uitgerekend onder zijn leiding zulke belangrijke bijdragen heeft geleverd aan juist die modernisering van het wiskunde*onderwijs*.

2 Een instituut

In september 1963 organiseert de CMLW een eerste heroriënteringscursus voor leraren wiskunde-VHMO. Onder leiding van hoogleraren en wetenschappelijke staf, werken de leraren in drie universiteitssteden vijf dagen lang aan onderwerpen uit de moderne wiskunde.

In haar vergadering van 28 november 1963 constateert de commissie dat de cursus door de staf en leraren als een groot succes is ervaren. Een herhalingscursus staat al gepland voor januari 1964. En nu wordt voorgesteld ook voor september 1964 een vervolgcursus te organiseren met nieuwe onderwerpen. Aldus wordt besloten.
De voorzitter, professor H.Th.M. Leeman, stelt daarop de principiële vraag aan de orde of de CMLW ook naar de toekomst de aangewezen instantie is om dergelijke cursussen blijvend te organiseren. Daarop reageert professor Freudenthal onder meer met de opmerking dat gezien het feit dat modernisering van het wiskundeonderwijs een permanente aangelegenheid zal zijn, er naar de toekomst:

> … misschien een apart instituut zou moeten komen.’

Aan de betreffende subcommissie wordt dan gevraagd voorstellen te formuleren over de voortgang en organisatie van de werkzaamheden van de commissie. Dat resulteert in een ‘Rapport van de CMLW inzake permanente activering van de leraren in de wiskunde’, dat in juli 1964 aan de staatssecretaris - inmiddels mr. J.H. Grosheide - wordt aangeboden. Na een opsomming van werkzaamheden die de commissie voorziet voor de permanente modernisering van het wiskundeonderwijs, bepleit zij in dit rapport:

> ... een eigen studiecentrum in te richten, in de vorm van een interuniversitair instituut, met aan het hoofd een hoogleraar-directeur.

Op 31 maart 1965 licht de CMLW haar voorstellen toe in een audiëntie, maar eerst op 24 november 1967 komt daarop een voorlopig afwijzend antwoord, omdat men:

> ... eerst de landelijke ontwikkelingen op dit terrein wil afwachten.

Inmiddels hadden de werkzaamheden van de Commissie zich in de jaren 1961-’67 (vanaf 1963 onder leiding van professor F. van der Blij) aanzienlijk verbreed en verdiept. Naast schoolexperimenten onder- en bovenbouw en jaarlijkse cursussen voor leraren voortgezet onderwijs had de CMLW op verzoek van de staatssecretaris, zij het aarzelend, ook de gigantische organisatie van de heroriëntering - en later begeleiding - van leraren MULO[3] op zich genomen.
In het zicht van de naderende invoering van de zogenoemde ‘Mammoetwet’ per 1 augustus 1968, had de commissie zich ook bereid verklaard - eerder dan voorzien - leerplannen op te stellen voor MAVO, HAVO en VWO.

Dan volgt wat men welhaast een kat en muis-spel kan noemen. Enerzijds vraagt de staatssecretaris de CMLW haar werkzaamheden uit te breiden (en stelt de commissie daar een tweetal wetenschappelijke medewerkers voor beschikbaar), maar anderzijds wordt het steeds dringender verzoek (mei 1968) om een ‘permanente regeling’ afgewezen onder verwijzing naar de toekomstige regeling van de leerplanontwikkeling (februari 1969). Maar de Commissie Organisatie Leerplan Onderzoek (COLO), die deze kwestie moet regelen, wordt eerst op 28 mei 1969 geïnstalleerd.

De CMLW ‘betreurt’ het standpunt van de staatssecretaris, en meldt dat de werkzaamheden zich langzamerhand in een zodanig kritiek stadium bevinden, dat

> … wij de mogelijkheid onder ogen moeten zien, dat zij voor een belangrijk deel opgeschort moeten worden.

Nu had de commissie dat ‘kritieke stadium’ in zekere zin ook aan zichzelf te danken. In het vertrouwen dat haar wens voor een eigen instituut eerlang gehonoreerd zou worden, had zij haar werkzaamheden óók op eigen initiatief uitgebreid. Naast reeds bestaande activiteiten ten behoeve van MAVO, HAVO, VWO en later LBO, MBO en HBO, had zij bijvoorbeeld zelf experimenten voor statistiek en computerkunde ingericht en in het bijzonder een omvangrijk project ten behoeve van het basisonderwijs en de onderwijzersopleiding (Pedagogische Akademie) op zich genomen. Immers, reeds vanaf 1966 waren er in de boezem van de CMLW initiatieven genomen voor een project ten behoeve van de modernisering van het rekenwiskundeonderwijs in het basisonderwijs en op de onderwijzersopleiding. Een rapport van een desbetreffende werkgroep (1967) was door de CMLW overgenomen en toegezonden aan de staatssecretaris, die daarop toestemming gaf voor inrichting van het project 'Wiskobas', dat met haar tienjarenplan het geheel van de overige werkzaamheden van de CMLW leek te gaan overtreffen. Een landelijke infrastructuur werd opgezet, conferenties werden belegd en er werden ontwerpscholen aangetrokken (basisonderwijs en pedagogische akademie) waar intensieve experimenten zouden plaatsvinden, mede leidend tot landelijke heroriëntering van onderwijzers.

Ten behoeve van dit project kreeg de CMLW toestemming nog een tweetal medewerkers aan te trekken, maar al spoedig bleek dat deze kleine staf - drie medewerkers in totaal - het Wiskobasproject onmogelijk integraal kon onderhouden, ook niet nadat in het voorjaar van 1970 tot tweemaal toe reducties waren aangebracht in de planning. Moties vanuit landelijke werkgroepen aan de CMLW, leidden ertoe dat de commissie - sedert september 1969 onder leiding van professor Freudenthal - zich opnieuw tot de staatssecretaris wendde (mei 1970). Wederom volgden enkele toezeggingen, maar garanties voor de regeling van uiteenlopende rechtsposities van medewerkers, alsmede voor huisvesting, productie en continuïteit bleven uit, onder verwijzing naar uitkomsten van de COLO. Ten einde raad wendt de staf van het Wiskobasproject zich in juni 1970 rechtstreeks tot de staatssecretaris met een ultimatieve motie voor adequate voorzieningen.
De CMLW is niet geheel *amused* met deze *move* van haar medewerkers, maar stelt zich onder leiding van professor Freudenthal toch op achter de eisen van de Wiskobasstaf.
En mede omdat het project zich in de jaren 1967-'70 reeds enige landelijke bekendheid had verworven, verschijnen er in de kranten artikelen over wat toen heette 'Wiskobasta' en worden er in de Kamer vragen over gesteld. Als gevolg daarvan neemt de staatssecretaris zelf het initiatief. Na een telefoongesprek met professor Freudenthal, nodigt hij de CMLW uit een memorandum op te stellen over de vormgeving en inhoud van een eventueel in te richten instituut. In een tweetal audiënties in het najaar van 1970 licht de CMLW dit memorandum toe en er volgt een laatste overleg (7 januari 1971) waarbij professor Freudenthal onder meer de garanties geeft zich te zijner tijd te zullen conformeren aan de uitkomsten van de COLO.
Op 26 januari 1971 volgt dan de verlossende brief van staatssecretaris Grosheide met toestemming tot instelling van het lang verbeide 'Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs',[4] dat per 1 augustus 1971 van start gaat, met Freudenthal als hoogleraar-directeur.
En zo kon hij wederom zélf gestalte geven aan zijn in 1963 geuite visie over de toekomstige statuur van de wiskundeonderwijsontwikkeling.

Ten slotte: het was op de plenaire vergadering van het eerste werkweekend van het voltallig IOWO-personeel, dat professor Freudenthal, als laatste aan de beurt zijnde om zijn verwachtingen uit te spreken over de tijd die voor ons lag, in dat onnavolgbare accent de onvergetelijke woorden sprak: 'Tja …, nou ja …, ik zou zo zeggen, laten we maar gewoon aan het werk gaan'.
En dat deden we, en hijzelf niet in het minst!

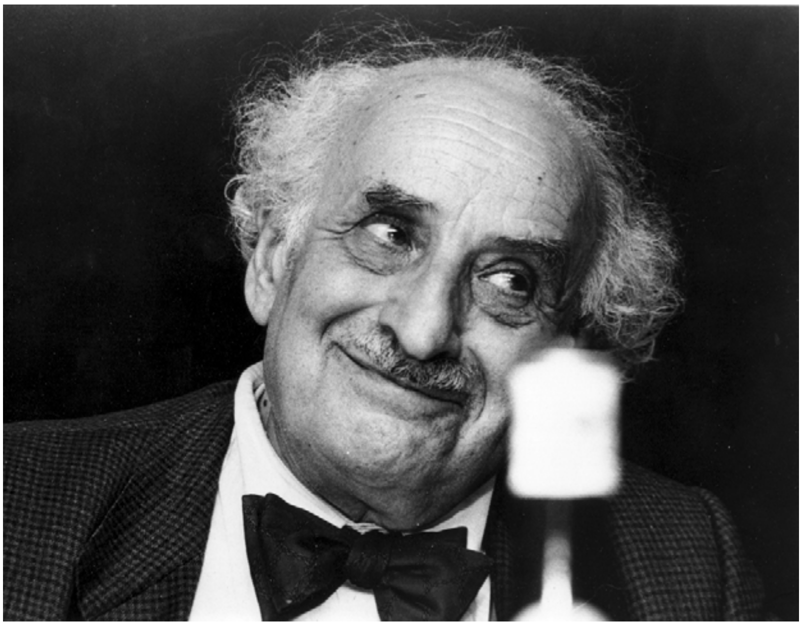
Noten

1 Daarbij wordt wel verondersteld dat deze conferentie een rechtstreeks gevolg zou zijn van het zogenoemde Sputnik-effect: de schokgolf die over Amerika en Europa trok, als gevolg van het oplaten van de eerste Russische ruimteraket. Daarbij zou de westerse wereld zich pijnlijk bewust geworden zijn van de achterstand die zij in wetenschappelijke ontwikkeling had opgelopen ten opzichte van de USSR. Zie in dit verband echter E.W.A. de Moor (199). *Van vormleer naar realistische meetkunde*, 375 e.v.
2 VHMO, het toenmalige 'voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs'
3 MULO, het toenmalige 'Meer Uitgebreid Lager Onderwijs' (vgl. MAVO).
4 De aanvankelijk geopperde naamgeving voor het instituut: Instituut Leerplan Ontwikkeling Wiskunde, anticiperend op toenmalige COLO-ideeën, werd door professor Freudenthal verworpen: meer dan om leerplanontwikkeling ging het hem immers om onderwijsontwikkeling, conform zijn brief van 23 augustus 1961.

Literatuur

Wijdeveld, E. (2003). Omzien in verwondering. *Euclides*, *78*(5).

At two fundamental moments in the course of the sixties, professor Freudenthal expresses a vision of the future on the process of modernization of mathematics education, that he himself in the course of the seventies would help to be realized:
a modernization of the mathematics curriculum is primarily a question of modernization of mathematics education, much more than modernization of mathematics content;
b modernization of mathematics education will be a permanent affair and should be institutionalised.
As professor-director of the Institute Development Mathematics Education (IOWO), founded in 1971, he (also) could give shape to both visions.



Korte biografie van Hans Freudenthal

1905:	Hans Freudenthal wordt op 17 september geboren in Luckenwalde, Duitsland.
1923:	Freudenthal studeert wiskunde, natuurkunde en filosofie in Berlijn.
1923:	Eindexamen Friedrichschule.
1923-1928:	Freudenthal studeert wiskunde, natuurkunde en filosofie in Berlijn en Parijs.
1930:	Promotie: ‘Über die Enden topologischer Räume und Gruppen’ bij H. Hopf en L. Bieberbach.
1930:	Freudenthal komt naar Nederland als assistent van L.E.J. Brouwer.
1942:	Freudenthal schrijft het nimmer voltooide noch gepubliceerde ‘Rekendidactiek’.
1946:	Freudenthal wordt tot hoogleraar benoemd in Utrecht. Inaugurale rede: ‘5000 jaren internationale wetenschap’.
1950:	Freudenthal wordt voorzitter van de Wiskunde Werkgroep van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs.
1951:	Freudenthal wordt lid van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.
1954:	Freudenthal wordt voorzitter van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.
1960:	Eredoctoraat van de Humboldt Universität Berlin.
1966:	Freudenthal wordt president van International Commission on Mathematics Instruction.
1971:	Mede op initiatief van Freudenthal wordt het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs opgericht, later OW&OC, later Freudenthal Instituut. Freudenthal wordt hoogleraar directeur van het IOWO.
1972:	Eredoctoraat van de Friedrich-Alexander Universität Nürnberg.
1973:	‘Mathematics as an educational task’ verschijnt.
1974:	Eredoctoraat van de Vrije Universiteit Brussel en van de York University Toronto.
1977:	Eredoctoraat van de Universiteit van Amsterdam.
1990:	Manuscript ‘Revisiting mathematics education. China lectures’ voltooid.
1990:	Hans Freudenthal overlijdt op 13 oktober.

Panama-Post - Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk

Een uitgave van het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.

Redactieadres

R. Keijzer, Freudenthal Instituut, Postbus 9432,
3506 GK Utrecht. Tel.: 030-263 55 63
e-mail: panamapost@fi.uu.nl
internet: www.fi.uu.nl/panama/panamapost

Vormgeving

Vakwerk vormgeving en reclame, Dirksland.

Drukwerk

Drukkerij Wilco bv, Amersfoort.

Abonnementen

Abonnementsprijs € 32,- (2005).
Abonneren *uitsluitend* schriftelijk.
Betaling na ontvangst van acceptgirokaart.
Voor NVORWO-leden kost het lidmaatschap inclusief een abonnement op 'Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk' € 30,-.
De kosten voor het lidmaatschap van de NVORWO inclusief een abonnement op dit tijdschrift en op het tijdschrift 'Volgens Bartjens' bedragen € 48,50.
Losse nummers € 10,- per exemplaar, exclusief verzendkosten.

Het tijdschrift verschijnt vier keer per jaar (circa 225 pagina's).

Abonnementen-administratie:
Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, Freudenthal Instituut,
Postbus 9432, 3506 GK Utrecht.

Aanwijzingen voor auteurs

Artikelen bestemd voor 'Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk' worden aangeboden aan de hoofdredactie. Ieder artikel wordt vervolgens beoordeeld op actualiteit, kwaliteit en relevantie voor de doelgroep van het tijdschrift. De hoofdredactie stelt na deze beoordeling auteurs in kennis van het gevormde oordeel en geeft aan onder welke voorwaarden het aangeboden artikel in aanmerking komt voor plaatsing. De hierbij gevolgde procedure is vastgelegd in het redactiestatuut van dit blad. Een exemplaar hiervan kunt u aanvragen bij de hoofdredactie.

De tekst van een artikel kunt u via e-mail elektronisch aanbieden, waarbij de tekst is opgemaakt in een gangbare tekstverwerker. Illustraties worden zo mogelijk ook elektronisch aangeboden, waarbij voor iedere afbeelding in een apart bestand wordt gemaakt.
Bij het aanleveren van illustraties geeft u nauwkeurig aan waar de afbeelding in de tekst bedoeld is.

Voor meer informatie zie:
www.fi.uu.nl/panama/panamapost

Panama

Panama richt zich primair op de uitvoering en coördinatie van nascholingsactiviteiten ten behoeve van het reken-wiskundeonderwijs. Een en ander geschiedt in nauwe samenwerking met de onderzoeksactiviteiten van het Freudenthal Instituut. 'Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk' is het begeleidende tijdschrift van Panama.

Informatie: J. Verwaal
Postbus 9432, 3506 GK Utrecht, tel: 030-2635541.
e-mail: panama@fi.uu.nl

NVORWO

In het tijdschrift worden ook de mededelingen van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken Wiskunde Onderwijs (NVORWO), zoals actieplannen, verslagen van werkgroepen en regionale afdelingen opgenomen. De NVORWO stelt zich de bevordering en belangenbehartiging van het reken-wiskundeonderwijs (van vier tot veertien jaar) in al haar facetten ten doel. Het lidmaatschap van deze vereniging staat open voor iedere belangstellende.

secretariaatsadres: B. Heijman,
p/a Postbus 9432, 3506 GK Utrecht, tel.: 030-2635565.

ISSN 0928-7175

De Nieuwe Wiskrant
Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs

is een publicatie van het Freudenthal Instituut. Het bericht over ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs, het zwaartepunt ligt bij het voortgezet onderwijs.
De Nieuwe Wiskrant verschijnt viermaal per schooljaar, in een omvang van minstens 40 pagina's.

Artikelen
Artikelen worden bij voorkeur digitaal ontvangen, vergezeld van een afdruk op papier en eventuele illustraties van een zo goed mogelijke kwaliteit.
Het redactieadres is:
Freudenthal Instituut, t.a.v. Nathalie Kuijpers
Postbus 9432, 3506 GK Utrecht, tel. 030-2635501
fax. 030-2660430, e-mail: wiskrant@fi.uu.nl

Homepage Nieuwe Wiskrant
http://www.fi.uu.nl/wiskrant

Abonnementen
De abonnementsprijs voor 2004/2005 bedraagt € 21,50.
Studentenabonnementen € 15,- (onder overlegging kopie collegekaart).
Collectief abonnement € 13,- per abonnement bij minimale afname van 20 stuks.
Losse nummers € 6,50 exclusief verzending.
Abonneren kan *uitsluitend* schriftelijk of via e-mail.
Betaling pas na ontvangst van de acceptgirokaart.
Abonnementen lopen van augustus tot augustus en worden zonder tegenbericht verlengd. Opzeggingen dienen vóór 1 juli schriftelijk te worden doorgegeven.

Ledenadministratie
Wil Hofman-de Ruiter

Advertenties
Het is mogelijk een advertentie in de Nieuwe Wiskrant te plaatsen. Tarieven op aanvraag bij het redactieadres.

Bureauredactie
Ellen Hanepen
Ank van der Heiden-Bergsteijn
Nathalie Kuijpers

ISSN: 0928-7167

Drukwerk
Wilco, Amersfoort

The 'Nieuwe Wiskrant' ('New Mathpaper')

is published four times a year by the Freudenthal Institute.
It reports on developments in Mathematics Education, more in particular in secondary education.

Articles
Articles should be sent to:
Freudenthal Institute
attn. Nathalie Kuijpers
P.O. Box 9432, 3506 GK Utrecht
the Netherlands

Subscriptions
Subscriptions should be sent to the publisher:
Freudenthal Institute
Utrecht University
P.O. Box 9432
3506 GK Utrecht
the Netherlands

The annual subscription rate is € 30,-.

International banking details/internationale betalingsgegevens:

IBAN: NL79 PSTB 0000 2299 52
BIC: PSTBNL21

o.v.v. Nieuwe Wiskrant