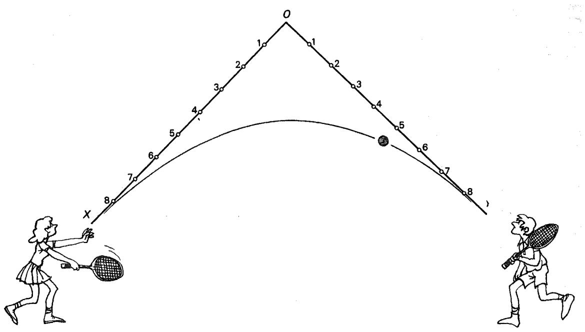
Wat te bewijzen is (29)

Rubriek

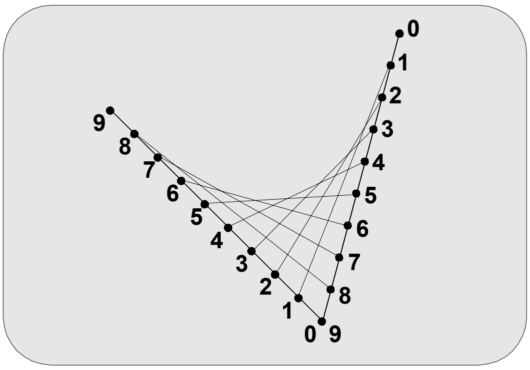
Je hebt wel eens zien tennissen. De bal maakt een boog door de lucht. Dat gebeurt bij andere sporten ook wel! Kun je zo'n boog tekenen met een rechte liniaal?

Aldus begon het eerste werkboek van een sympathieke wiskundemethode uit de jaren zeventig, *Passen en Meten*.



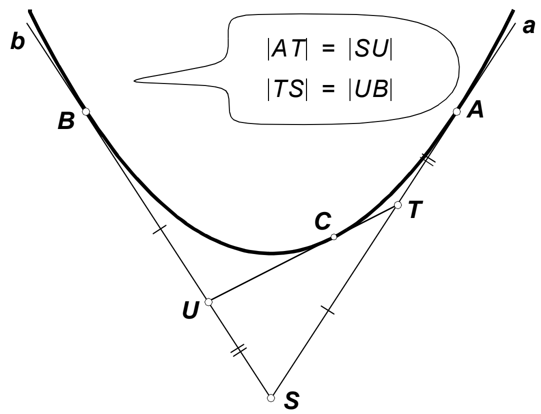
In het plaatje moesten de leerlingen de punten 8, 7, 6 enzovoort op de lijn *OX* (zeg maar *x*-as) door middel van een rechte lijn verbinden met de punten 1, 2, 3 enzovoort op de lijn *OY* (of *y*-as). Die rechte lijnen bleken dan precies te raken aan de voorgetekende boog, een heuse parabool. In de opgave was het de auteurs erom te doen de leerlingen op speelse wijze de relatie $x + y = 8$ te laten ontdekken. In een volgende opdracht stond er:

je kunt zo'n figuur anders maken. Bijvoorbeeld gekleurd draad rijgen door gaatjes in karton. Of ijzerdraad spannen langs spijkers in een plankje.

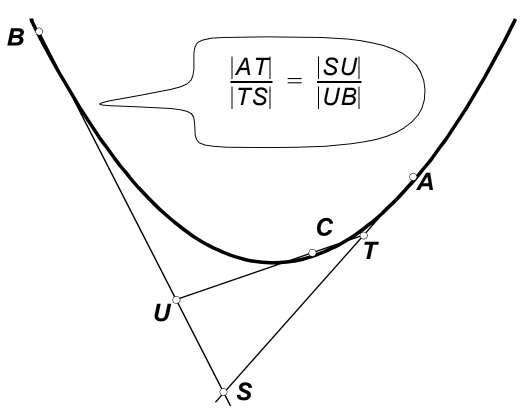


De kromme die de *omhullende* is van de verbindingslijnen van de in deze figuur gelijkgenummerde punten van twee equidistante puntenreeksen is inderdaad een parabool. Daarbij merk ik op dat de dragers van de puntenreeksen zelf ook raaklijnen zijn van de parabool en dat de raakpunten juist de eindpunten zijn van de beide reeksen. Voortzetting van de beide puntenreeksen in twee richtingen (met gebruikmaking van alle gehele getallen, negatief en positief) levert een complete parabool op.
De vraag is natuurlijk hoe je dat bewijst.

Een van de heuristische principes bij het zoeken naar een bewijs is de aanpak om het probleem van een andere kant te bekijken; dit wordt dan 'blikwisseling' genoemd.
In dit geval houdt het in dat ik uitga van een parabool met twee raaklijnen *a* en *b* (de dragers van de 'spijkers') om vervolgens te kijken naar het gedrag van een wandelende raaklijn ten opzichte van deze beide lijnen.
In eerste instantie beschouw ik een symmetrische situatie, dat wil zeggen waarbij de raakpunten van *a* en *b* (zeg *A* en *B*) gespiegeld liggen ten opzichte van de symmetrieas van de parabool en waarbij, als gevolg daarvan, het snijpunt *S* (van *a* en *b*) op die symmetrieas ligt.
Een derde raaklijn (raakpunt *C*) snijdt *AS* in *T* en *BS* in *U*. Nu is er een stelling die zegt dat de lijnstukken *AT* en *SU* even lang zijn en dat geldt dan ook voor *TS* en *UB*.



Omdat er (precies) één parabool bestaat die de lijnen *AS* en *BS* in *A* en *B* raakt, garandeert deze eigenschap dat de omhullende van de verbindingsrechten, zoals op de plank met spijkers, (een deel van) een parabool is.
Als ik de eis van symmetrie laat vervallen, kan de stelling nog worden verruimd. Er geldt dan namelijk dat de lijnstukken *AT* en *TS* dezelfde verhouding hebben als *SU* en *UB*. In deze vorm komt de stelling al bij Apollonius voor.



Van deze ‘stelling van Apollonius’ geef ik nu eerst een analytisch bewijs. Omdat alle parabolen gelijkvormig zijn en omdat het een uitspraak over gelijke verhoudingen betreft, kan ik zonder de algemeenheid geweld aan te doen, uitgaan van de parabool met vergelijking $y = x^2$.
Veronderstel nu dat A, B en C respectievelijk de coördinatenparen $(a\ ,\ a^2)$, $(b\ ,\ b^2)$ en $(c\ ,\ c^2)$ hebben.
De raaklijn in A heeft dan de richtingscoëfficiënt $2a$ en zijn vergelijking is dus:

$$y - a^2 = 2a(x-a) \text{ ofwel } y = 2ax - a^2$$

Evenzo zijn de lijnen met vergelijking $y = 2bx - b^2$ en $y = 2cx - c^2$ de raaklijnen in respectievelijk B en C.
De x-coördinaat van het punt S wordt gevonden uit:

$$2ax - a^2 = 2bx - b^2$$

en dus:

$$x_S = \frac{a^2 - b^2}{2(a-b)} = \tfrac{1}{2}(a+b)$$

Net zo geldt:

$$x_T = \tfrac{1}{2}(a+c) \quad \text{en} \quad x_U = \tfrac{1}{2}(b+c)$$

Nu volgt:

$$x_A - x_T = \tfrac{1}{2}(a-c) = x_S - x_U$$
$$x_T - x_S = \tfrac{1}{2}(c-b) = x_U - x_B$$

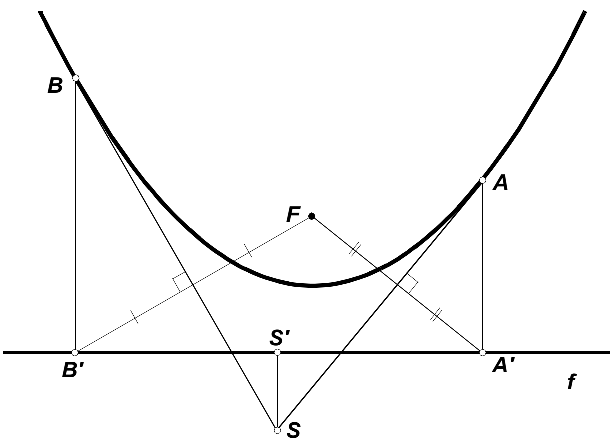
Dus met A', B', S', T', U' als loodrechte projecties van achtereenvolgens A, B, S, T, U op de x-as, geldt:

$$|A'T'| = |S'U'| \quad \text{en} \quad |T'S'| = |U'B'|$$

waaruit direct volgt:

$$\frac{|AT|}{|TS|} = \frac{|SU|}{|UB|}$$

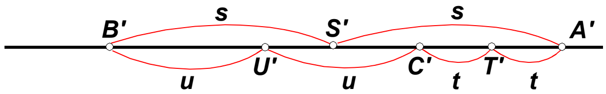
In dit analytische bewijs speelt de x-as de rol van de lijn waarop de lijnstukken AT, TS, SU en UB worden geprojecteerd. Die rol kan worden overgenomen door de richtlijn van de parabool en dat resulteert in een mooi synthetisch bewijs.



Laat nu F het brandpunt en f de richtlijn zijn van de parabool. A en B liggen op de parabool en A' en B' zijn hun projecties op de lijn f.
Sinds de herinvoering van onderwerpen uit de klassieke meetkunde in het VWO is er weer aandacht voor het feit dat de raaklijnen in A en B aan de parabool de middelloodlijnen van de lijnstukken FA' en FB' zijn. Het begrijpen daarvan berust erop dat de parabool per definitie de ‘conflictlijn’ is tussen het ‘eiland’ F en de ‘kustlijn’ f.
Elk punt buiten A op de lijn AS ligt even ver van F en A' en dus dichter bij f dan bij F, dat wil hier zeggen ‘onder’ de parabool.
Het snijpunt S van de middelloodlijnen van FA' en FB' ligt dus op de derde middelloodlijn van driehoek $FA'B'$.
Kortom de loodrechte projectie S' van S op f is juist het midden van $A'B'$.
Merk op dat dit in overeenstemming is met het analytisch verkregen resultaat $x_S = \tfrac{1}{2}(a+b)$.

Evenzo geldt, bij projectie van de eerder genoemde punten C, U en T op f, dat T' en U' de middens zijn van $A'C'$ en van $B'C'$.
Dat geeft de volgende situatie met:

$$|A'S'| = s\,,\ |A'T'| = t \text{ en } |B'U'| = u:$$



Er volgt:

$$t + u = \tfrac{1}{2}|A'B'| = s$$

en dus:

$$|A'T'| = t = s - u = |S'U'|$$
$$|U'B'| = u = s - t = |T'S'|$$

waarmee de kous af is.
Merk op dat de raaklijnen in A, B en C aan de parabool van rol kunnen verwisselen, waaruit volgt dat:

$$\frac{|AT|}{|TS|} = \frac{|SU|}{|UB|} = \frac{|TC|}{|CU|}$$

In feite was dit ook Apollonius’ stelling. Deze uitgebreide gelijkheid leert ons niet alleen dat de omhullende van de verbindingslijnen van corresponderende punten op de lijnen AS en BS een parabool is, maar ook waar precies het raakpunt op elk van die raaklijnen ligt.

Als toetje een derde bewijs voor de lezers die bekend zijn met projectieve meetkunde. De lijnen die de ‘spijkers’ op a en b verbinden, brengen een projectiviteit tot stand tussen twee puntenreeksen en omhullen om die reden een kegelsnede (stelling van Steiner). Omdat de oneigenlijke punten van a en b bij die projectiviteit een koppel vormen, raakt de oneigenlijke rechte als verbindingslijn van die punten aan de kegelsnede en bijgevolg is er sprake van een parabool.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl