

Tsu is het Japanse woord voor haven en nami betekent grote golf. Sinds december j.l. kent iedereen het woord. De voortplanting van zo'n tsunami blijkt te beschrijven te zijn met behulp van een Korteweg - de Vries differentiaalvergelijking. **Johan van de Leur** gaf er op de afgelopen NWD een voordracht over.

Havengolven

Inleiding

Op Tweede Kerstdag 2004 hebben veel Nederlanders via de televisie kennisgemaakt met het natuurverschijnsel tsunami. We hebben tot ver in januari van dit jaar beelden kunnen zien van de verwoestende werking van de vloedgolf. Deze havengolf (tsu is het Japanse woord voor haven, en nami betekent grote golf) is ontstaan doordat de zeebodem ten westen van noord-Sumatra enkele meters werd opgetild. Dit kwam doordat op die plek over een lengte van ongeveer 1200 kilometer de Indische aardplaat zo'n vijftien meter onder de Birmese plaat is geschoven.

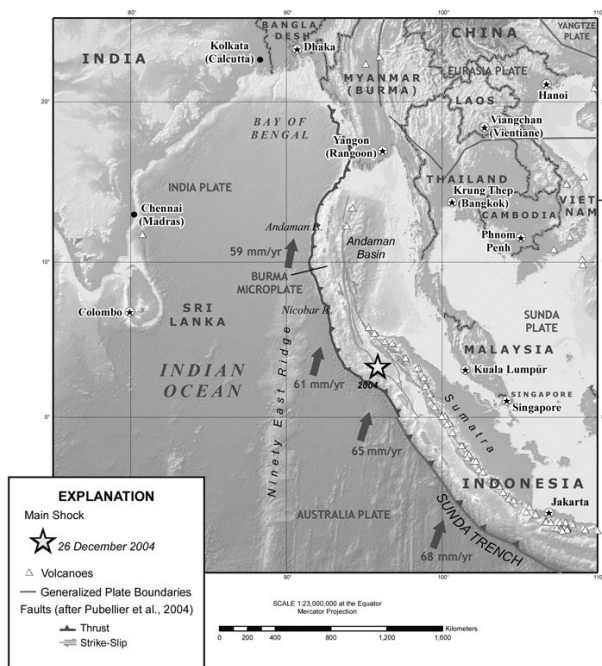


fig. 1 U.S. Geological Survey: Indische plaat schuift onder Birmese plaat.

Deze aardbeving begon om 7:58 uur plaatselijke tijd 255 kilometer van Banda Atjeh, en had een kracht van 9.0 op de schaal van Richter.¹ Daarmee plaatste hij zich als vierde (volgens de nieuwe berekeningen op de tweede plaats) op de ranglijst van zwaarste aardbeving in de wereld

sinds 1900. In de botanische tuin van de Universiteit van Utrecht heeft men de aardbeving ook geregistreerd. Daar heeft de grond 5 millimeter bewogen.

Een tsunami wordt door zeelieden op open zee vrijwel niet waargenomen. De golf is erg lang, soms wel meer dan 100 kilometer en de hoogte slechts enkele meters. Zijn snelheid kan oplopen tot zo'n 700 kilometer per uur. Aan de hand van satellietfoto's hebben wetenschappers van de Amerikaanse National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA) de hoogte van de havengolf van 26 december 2004 kunnen vaststellen. Naarmate de tijd vordert, neemt de hoogte van de golf af. Twee uur na het ontstaan van de aardbeving was de golf 60 centimeter hoog, een uur en 15 minuten later nog maar 40 centimeter, en achtereenvolgens vijf uur na zijn ontstaan 5 tot 10 centimeter. Echter, als de golf in ondiep water komt, stijgt de hoogte, en kan deze oplopen tot wel 15 meter. Als je kijkt naar animaties van de verplaatsing van de tsunami in de Indische Oceaan², dan zie je dat er een raar effect optreedt, namelijk dat de golf kan afbuigen. Dit is goed te zien rond het eiland Sri Lanka. De golf boog ten zuiden van het eiland in noordelijke richting af, waardoor de tsunami ook de westkust van dit eiland kon bereiken.

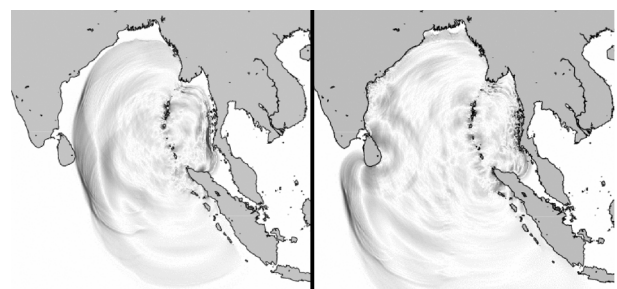


fig. 2 De tsunami buigt af bij Sri Lanka

Dit effect, samen met het stijgen van de golf bij aankomst op de kust, volgt uit het model dat we hier zullen presenteren. De modellering van de tsunami is een ingewikkeld proces. Men moet eigenlijk de theorie van de lange-waargolven toepassen. Omdat dat model te ingewikkeld is om te bespreken, zullen we een ander model bestuderen, namelijk de Korteweg-de Vries differentiaalvergelijking. Dit model geeft een eendimensionale vereenvoudiging

van het tsunami-model weer. Deze vereenvoudiging beschrijft de verplaatsing van de havengolf goed. Guido Schneider en C. Eugene Wayne³ zeggen het volgende over de tsunami: ‘Een bepaalde tijd na de aardbeving splitst de oplossing in twee golfpakketten, één dat naar rechts beweegt en één naar links. Deze golfpatronen ontwikkelen zich onafhankelijk als oplossingen van de KdV-vergelijkingen’. Het splitsen van de golf is duidelijk te zien op allerlei animaties, bijvoorbeeld die van NOAA⁴: één golf beweegt zich in oostelijke en de ander in westelijke richting. De KdV-vergelijking is een partiële differentiaalvergelijking die in 1895 door Korteweg en De Vries werd gepubliceerd. Zij wilden daarmee een effect beschrijven dat in 1834 door de Schot John Scot Russell werd waargenomen. Laten we daarom eerst teruggaan naar de oever van het Union Canal tussen Edinburgh en Glasgow in de zomer van 1834 en Scott Russel aan het woord laten:

‘I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped – not so *the mass of water* in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, *rolled forward with great velocity*, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently *without change of form or diminution of speed*. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, *preserving its original figure* some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called *the Wave of Translation*.’

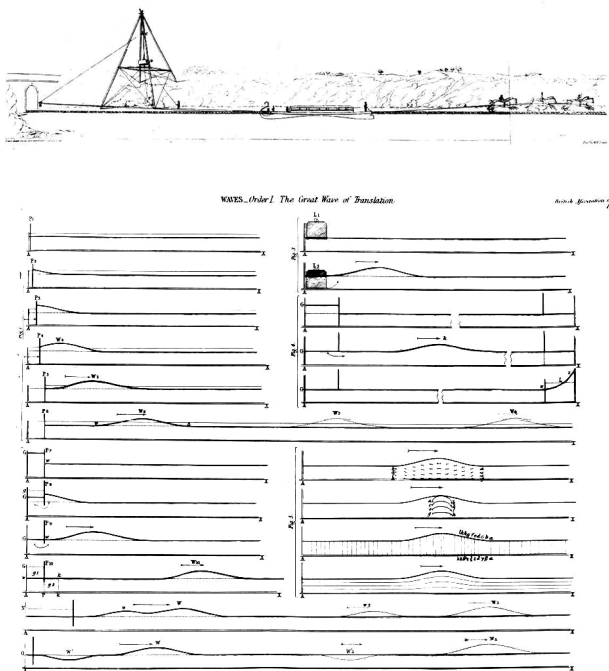


fig. 3 Schetsen van John Scott Russell

John Scott Russell werd zo geobsedeerd door dit verschijnsel, dat hij probeerde zo’n golf in allerlei waterbakken op te wekken (zie bijvoorbeeld zijn tekeningen in figuur 3). Zo bestudeerde hij het door hem waargenomen fenomeen en wist het verband:

$$v = \sqrt{g(h+l)}$$

voor de snelheid v en waterhoogte $h+l$ af te leiden (precieser: l is de diepte van het water, h de hoogte van de golf en g is de gravitatie-constante). De publicaties van Scott Russell waren omstreden. Beroemde tijdgenoten, zoals Airy en Stokes waren ervan overtuigd dat zo’n translatiegolf niet kon bestaan. Het eerste wiskundige bewijs werd echter geleverd door Boussinesq, en iets later, in een betere beschrijving, door Korteweg en de Vries. Deze laatste leidden de volgende differentiaalvergelijking voor golven in een kanaal af:

$$\frac{du}{dt} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{2}{3} \alpha u + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (1)$$

Hierbij is $l+u(x, t)$ de hoogte van de vloeistof op tijdstip t en plaats x boven de bodem van het kanaal:

$$\sigma = \frac{1}{3} l^3 - \frac{Tl}{\rho g}$$

waarin T de oppervlaktespanning, ρ de massadichtheid van de vloeistof en g als voorheen is. α is een kleine willekeurige constante die te maken heeft met de beweging van de vloeistof.

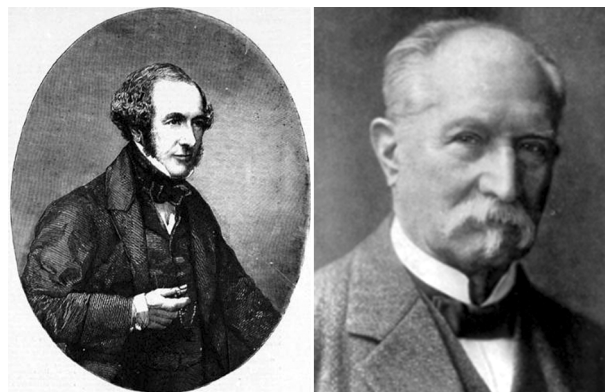


fig. 4 John Scott Russell (l) en Diederik Johannes Korteweg (r)

De KdV-vergelijking is een 1+1-dimensionale partiële differentiaalvergelijking. Het kanaal stelt men eendimensionaal voor, waarbij de diepte l een parameter is die constant wordt verondersteld. Korteweg en De Vries hebben hierbij hun assenstelsel bewegend gekozen. Dat wil zeggen, ze passen de echte plaatsvariabele p zodanig aan dat deze met een uniforme snelheid:

$$\sqrt{gl} - \alpha \sqrt{\frac{g}{l}}$$

meebeweegt. Precieser:

$$x = p + \left(\sqrt{gl} - \alpha \sqrt{\frac{g}{l}} \right) t \quad (2)$$

Door $\frac{du}{dt} = 0$ te nemen, zijn ze in staat om de vorm van de 'Wave of Translation' te berekenen.

Diederik Johannes Korteweg was professor aan de Universiteit van Amsterdam en promotor van Gustav de Vries. Deze laatste verdedigde zijn proefschrift 'Bijdrage tot de kennis der lange golven' waarin de vergelijking wordt gegeven, op 1 december 1894 te Amsterdam. Na zijn promotie wordt De Vries docent aan de HBS en Handelsschool te Haarlem. De invloed van Korteweg op de ontwikkeling van de wiskunde in Nederland is enorm. Zo was hij de promotor van Brouwer en editor van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* van 1897 tot aan zijn dood in 1941. Korte tijd na publicatie in 1895 is de KdV-vergelijking in de vergetelheid geraakt, tot 1965: in dat jaar willen Kruskal en Zabusky een experiment van Fermi, Pasta en Ulam, dat geleiding van warmte door massieve objecten bestudeert, simuleren op de computer. Ze gebruiken daarvoor de Korteweg-de Vries-vergelijking. Voor het eerst nemen ze het effect van elkaar inhalende golven waar. Een grote golf haalt een kleinere golf in. Het vreemde is dat de golven niet samensmelten, maar elkaar echt passeren⁵ (zie figuur 5).

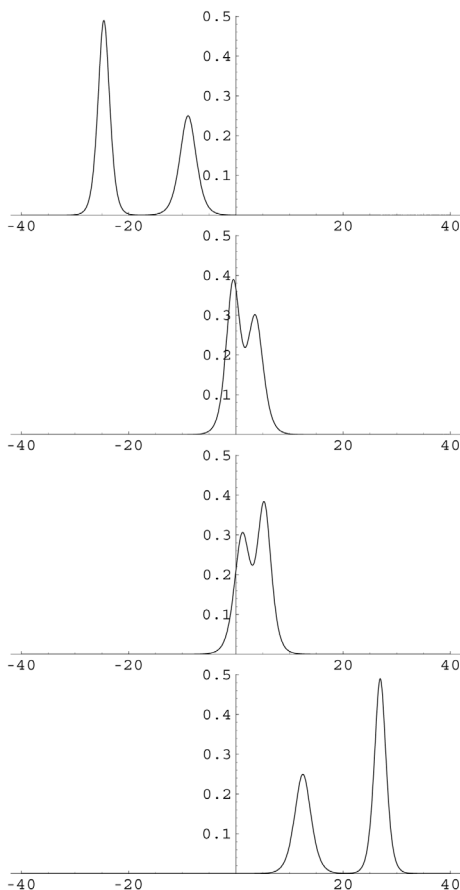


fig. 5 Interactie van solitonen

Omdat de golven meer op deeltjes dan op echte golven

lijken, noemt men deze solitonen. Sinds de simulaties van Kruskal en Zabusky staat de Korteweg-de Vries-vergelijking weer volop in de belangstelling. De vergelijking is wereldberoemd, zo beroemd zelfs dat men enkele jaren geleden het wiskunde-instituut van de Universiteit van Amsterdam heeft omgedoopt in het Korteweg-de Vries Instituut. De KdV-vergelijking is namelijk het prototype van een solitonvergelijking. Dit zijn partiële differentiaalvergelijkingen die solitonen als oplossing hebben. Sinds 1965 duikt de KdV-vergelijking op de meest vreemde plaatsen op. Zo speelt ze een rol bij de beschrijving van de rode vlek op Jupiter. Dit is een megawervelstorm. En rond 1990 komen we ze tegen in de theoretische natuurkunde bij de beschrijving van de Topologische Veldentheorie.

1995 was een speciaal jaar, 100 jaar na de publicatie van de Korteweg-de Vries-vergelijking. Dat jaar stonden KdV en de soliton weer volop in de belangstelling. In Amsterdam werd een internationaal congres gehouden met de toepasselijke titel KdV '95. Daar hebben wetenschappers van over de hele wereld verteld over de nieuwste ontwikkelingen op het gebied van de solitontheorie. Bij een andere conferentie in Schotland werd de translatiegolf opnieuw opgewekt in het Union Canal (zie figuur 6).



fig. 6 De soliton in Union Canal, 1995

We zullen nu de Korteweg-de Vries-vergelijking en de solitonoplossing wat beter bestuderen. We beginnen met aan te nemen dat het water in de oceaan stilstaat, dat wil zeggen we kiezen de constante $\alpha = 0$. Vervolgens elimineren we $\sqrt{\frac{g}{l}}$ uit de vergelijking. Hiervoor herschalen we de tijd, dat wil zeggen we substitueren

$$s = \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (3)$$

We gebruiken nu de kettingregel, namelijk:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial s} = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial u}{\partial s}$$

dus is:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)$$

Ofwel:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{3}{2}u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (4)$$

Voor deze laatste vergelijking zullen we nu de 1-soliton-oplossing afleiden; we gebruiken hiervoor de observatie van Scott Russell. Die schrijft namelijk dat de golf die hij waarneemt niet van vorm verandert en zich met constante snelheid v voortbeweegt. Stel nu dat we zo'n oplossing van de KdV-vergelijking zoeken. Hoewel we de vorm van de functie $u(x, s)$ op een bepaald tijdstip $s = q$ niet kennen, betekent dit echter dat als we de functie toch zouden tekenen op dat tijdstip q , we dezelfde functie zien als op tijdstip $s = 0$ met het verschil dat de functie horizontaal getransleerd is over de afstand qv of $-qv$. Dit houdt in dat $u(x, q) = u(x \pm qv, 0)$, in de woorden van Scott Russell een translatiegolf. We kiezen één van deze mogelijkheden en veronderstellen dat

$$u(x, s) = f(x + vs) = f(\xi) \quad (5)$$

De hoogte van de tsunami h zal gelijk zijn aan het maximum van $u(x, s)$ en dus ook aan het maximum van $f(\xi)$. Als we de kettingregel opnieuw toepassen, levert dit:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = v \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

Als we dit nu samen met (5) invullen in (4), dan krijgen we de volgende differentiaalvergelijking:

$$v \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{3}{2}f \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\sigma \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} \quad (6)$$

We kunnen deze vergelijking nu gewoon integreren, dit kan termsgewijs. In de eerste term aan de rechterkant zien we ongeveer de afgeleide van f^2 staan. We krijgen zo:

$$vf = \frac{3}{4}f^2 + \frac{1}{2}\sigma \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + c_1 \quad (7)$$

Immers als we (7) differentiëren, krijgen we (6). Aangezien we een solitonoplossing zoeken, dat wil zeggen een oplossing die er lokaal als een bult uit ziet, maar daarbuiten nagenoeg nul is, moet de oplossing voldoen aan:

$$f(\xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \approx 0 \quad \text{voor } \xi \text{ groot.} \quad (8)$$

Dit geeft dat $c_1 = 0$ moet zijn. We willen nu (7) met $c_1 = 0$ opnieuw integreren; het is echter eenvoudiger om deze vergelijking eerst met $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ te vermenigvuldigen:

$$vf \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{3}{4}f^2 \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\sigma \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \quad (9)$$

Nogmaals integreren geeft:

$$\frac{1}{2}vf^2 = \frac{1}{4}f^3 + \frac{1}{4}\sigma \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + c_2 \quad (10)$$

Opnieuw, gebruikmakend van de vorm van de soliton, en dus (8) toepassen, levert dat ook $c_2 = 0$. Zo vinden we dat:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{f^2}{\sigma}(2v - f)$$

Laten we even voor het gemak aannemen dat $2v - f > 0$ voor alle $\xi \in \mathbb{R}$. Op zich is dit niet zo'n vreemde veronderstelling, omdat de snelheid van de golf vaak veel groter is dan de hoogte. Dan is:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = f \sqrt{\frac{2v - f}{\sigma}}$$

We kiezen hier $\frac{\partial f}{\partial \xi} = f \sqrt{\frac{2v - f}{\sigma}}$ en laten het geval $\frac{\partial f}{\partial \xi} = -f \sqrt{\frac{2v - f}{\sigma}}$ buiten beschouwing.

Scheiding van variabelen leidt tot:

$$\int d\xi = \sqrt{\sigma} \int \frac{df}{f\sqrt{2v - f}}$$

We zullen nu de primitieven links en rechts van het gelijkteken bepalen. Links is gelijk aan $\xi + k$. Om de rechterkant te berekenen, gebruiken we de substitutiemethode. We vullen:

$$f = \frac{8v}{(e^w + e^{-w})^2} = \frac{2v}{\cosh^2(w)} \quad (12)$$

in; na wat rekenwerk vinden we:

$$\xi + k = -\sqrt{\frac{2\sigma}{v}}w$$

Veronderstel nu voor het gemak van de verdere berekeningen dat $k = 0$ ($k \neq 0$ levert alleen maar een translatie van de variabele ξ en dus ook x op), dan is:

$$w = -\sqrt{\frac{v}{2\sigma}}\xi \quad (13)$$

Ofwel, we vinden dat:

$$f(\xi) = \frac{2v}{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{v}{2\sigma}}\xi\right)}$$

Bedenk nu dat de hoogte van de tsunami gelijk was aan $h = \max f(\xi)$. Dit maximum wordt aangenomen voor $\xi = 0$, dit geeft:

$$v = \frac{h}{2}$$

Uit (2), (3) en (5) halen we dat

$\xi = x + vs = x + \frac{h}{2}s$, $u(x, s) = f(\xi)$, $s = \sqrt{\frac{g}{l}}t$ en $x = p + \sqrt{gl}t$. Dit alles invullend levert de volgende oplossing voor de soliton op plaats p en tijdstip t :

$$\frac{h}{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{h}{4\sigma}}(p + v(h, l)t)\right)} \quad (14)$$

Hierbij is:

$$v(h, l) = \sqrt{gl}\left(1 + \frac{h}{2l}\right) \quad (15)$$

de snelheid van de voortbewegende golf. De vorm van deze tsunamigolf krijgen we door een vast tijdstip te kiezen. We kiezen $t = 0$ en krijgen zo de functie:

$$g(p) = \frac{h}{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{h}{4\sigma}} p\right)}$$

Aangezien $\cosh(x)$ bestaat uit de combinatie van e^x en e^{-x} zal deze functie $g(p)$ rond 0 snel afnemen, en al vrij snel nagenoeg 0 zijn; in figuur 7 zien we een voorbeeld van deze functie.

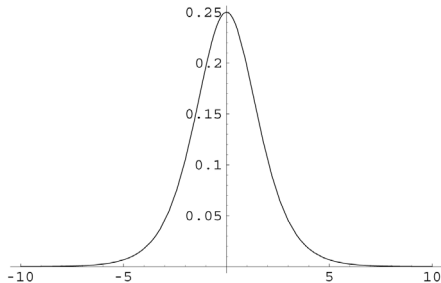


fig. 7 De vorm van de havengolf

In deze beschrijving is de diepte van het water constant genomen. Dit is een redelijke veronderstelling voor zo'n golf op het midden van de oceaan. Daar geeft de KdV-vergelijking het proces goed weer. In de buurt van de kust, waar het water steeds ondieper wordt, zullen we een ander model moeten kiezen met variabele diepte. We zien echter aan de formule voor de snelheid van de soliton dat hoe dieper het water is, des te sneller de golf zich voortbeweegt. Hier kunnen we toch wel iets uit verklaren. De tsunamigolven zijn lange golven, soms wel 100 kilometer lang. Als de voorkant van de golf in ondieper water komt, zal de snelheid aan de voorkant afnemen. De achterkant van de golf bevindt zich dan nog in diep water en remt dus nog niet af. Dit veroorzaakt een stuwende werking waardoor de golf van vorm verandert. De hoogte van de golf zal toenemen. Dit effect neemt men helaas waar bij de kust. De relatie tussen snelheid en diepte van de oceaan verklaart ook het afbuiggedrag van de golf bij Sri Lanka. Een deel van de golf komt in ondiep water en zal dan afremmen. Het andere deel, boven de diepe oceaan, gaat met constante snelheid door. Het gevolg is dat het golfvront afbuigt en zo op de westkust van Sri Lanka terecht kon komen.

Ten slotte kunnen we uit de formule voor de snelheid (15) afleiden dat golven die hoger zijn zich ook sneller voortbewegen. Uit de simulaties van Kruskal en Zabusky blijkt dat de grotere de kleinere zelfs passeert. Echter, de optelling van twee solitonoplossingen (14) met verschil-

lende waarden h is niet langer een oplossing. Zo'n oplossing van twee, of zelfs een willekeurig aantal solitonen bestaat wel. De formules voor deze oplossingen zijn echter ingewikkeld en niet eenvoudig af te leiden. In figuur 5 zien we het effect van twee elkaar passerende golven. Dit deeltjesachtige verschijnsel heeft ook een toepassing binnen de optica. De verplaatsing van licht door een glasvezelkabel wordt beschreven door de niet-lineaire Schrödingervergelijking. Deze vergelijking heeft ook solitonen als oplossingen. Met behulp van deze solitonen, die niet van vorm veranderen, kan men informatie in de vorm van bits versturen.

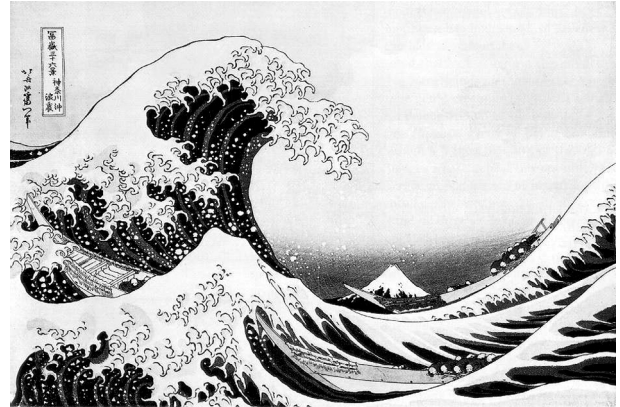


fig. 8 'In the Hollow of a Wave off the Coast at Kanagawa' - gravure van Katsushika Hokusai

Johan van de Leur
Mathematisch Instituut,
Universiteit van Utrecht

Noten

- [1] Voor meer gedetailleerde informatie, zie:
<http://earthquake.usgs.gov/eqinthenews/2004/usslav/>
Nieuwe berekeningen hebben aangetoond dat de kracht zelfs 9.3 zou zijn geweest.
- [2] http://commons.wikimedia.org/wiki/2004_Indian_Ocean_earthquake
- [3] Guido Schneider, C. Eugene Wayne, On the validity of 2D-surface water wave models. GAMM Mitt. Ges. Angew. Math. Mech. 25 (2002), no 1-2, 127-151
- [4] <http://www.pmel.noaa.gov/tsunami/Mov/TITOV-INDO2004.mov>
- [5] Voor een filmpje van dit effect, zie:
<http://www.math.uu.nl/people/vdleur/soli2.gif>

Nationale Wiskunde Dagen 2006

De twaalfde Nationale Wiskunde Dagen zijn gepland op vrijdag 3 en zaterdag 4 februari 2006.

Als wiskundeleraar moet je van tijd tot tijd nieuwe ideeën op kunnen doen en creatief en actief met je vak bezig zijn.

Dat kan door te luisteren naar een goed verhaal, door actief mee te doen in werkgroepen en door met collega's van gedachten te wisselen. De NWD biedt die gelegenheid en is bedoeld voor alle wiskundeleraars die les geven aan leerlingen van 12 tot 18 jaar van ieder schooltype.