Dit is het tweede deel van een artikel over het onderzoek van **Wim van Dooren**, **Dirk de Bock** en **Lieven Verschaffel** naar de rol van intuïties bij het leren van wiskunde. Deel een is verschenen in het vorige nummer van de *Nieuwe Wiskrant*.

Intuïties en intuïtieve regels: Interpretatiekader voor fouten van leerlingen?

Inleiding

Onder vakdidactici wiskunde en wetenschappen is er veel belangstelling voor de concepties en redeneerprocessen van leerlingen in diverse toepassingsdomeinen. Vele onderzoekers hebben daarbij gewezen op bepaalde hardnekkige fouten, misconcepties of preconcepties (dat wil zeggen concepties die niet overeenstemmen met de wiskundig/wetenschappelijk aanvaarde noties), bijvoorbeeld de neiging van veel leerlingen om uit te gaan van een lineair verband tussen grootheden in situaties waar in feite een ander verband aan de orde is (bijvoorbeeld in de meetkunde, De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2003; of in de kansrekening, Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2002).

Het eerste deel van dit artikel verscheen in het vorige nummer van de *Nieuwe Wiskrant*. Daarin beschreven we aan de hand van het werk van de Israëlische onderzoeker Fischbein en onze eigen onderzoekservaringen welke rol intuïties kunnen spelen bij het wiskundig probleemoplossen en hoe ze het redeneerproces (in positieve en negatieve zin) kunnen beïnvloeden.

In dit tweede deel willen we de mogelijke invloed van zogenaamde 'intuïtieve regels' kritisch bekijken. De Israëlische onderzoekers Tirosh en Stavy beweren dat de (correcte en incorrecte) oplossingen van leerlingen bij het oplossen van problemen in wiskunde en wetenschappen vaak verklaard kunnen worden doordat ze een beperkt aantal intuïtieve regels toepassen. Aan de hand van Israëlisch en Vlaams onderzoek gaan we na in welke mate de 'intuitive rules theory' werkelijk kan helpen bij het interpreteren van uiteenlopende fouten van leerlingen.

Deel 2: De verklarende kracht van intuïtieve regels

De theorie van Tirosh en Stavy

In de internationale onderzoeksliteratuur rond wiskundedidactiek werd recent veel aandacht besteed aan de 'intuitive rules theory', die ontwikkeld werd door de Israëlische onderzoekers Tirosh en Stavy (1999a, 1999b; Stavy & Tirosh, 2000). Deze theorie is geworteld in het werk van Fischbein (1987) over intuïties, dat we beschreven in het eerste deel van dit artikel. Volgens de 'intuitive rules theory' zouden leerlingen zich bij het oplossen van diverse problemen in de wiskunde en wetenschappen vooral baseren op 'externe' taakkenmerken, in plaats van door te dringen tot de wiskundige kern van het probleem. De reacties van leerlingen op diverse taken zouden dan kunnen worden geïnterpreteerd alsof ze tot stand komen door het hanteren van een beperkt aantal intuïtieve regels, die worden uitgelokt door die externe taakkenmerken. De twee belangrijkste intuïtieve regels die volgens Tirosh en Stavy opduiken in vergelijkingsopgaven zijn 'Meer *A*–meer *B*' en 'Zelfde *A*–zelfde *B*'.

De eerste regel ('Meer *A*–meer *B*') houdt het volgende in: Leerlingen vergelijken twee objecten die verschillen met betrekking tot een in het oog springende grootheid A ($A_1 < A_2$), en concluderen intuïtief, met betrekking tot een andere grootheid B dat $B_1 < B_2$. Het gebruik van deze regel kan uiteraard tot correcte redeneringen leiden: 'cirkels met een grotere oppervlakte hebben een grotere diameter', 'als $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ dan is $x < y$', enzovoort. Maar in veel gevallen leidt de regel ook tot incorrecte conclusies. Bijvoorbeeld: 'rechthoeken met een grotere oppervlakte hebben steeds een grotere omtrek', '$5a + 6 > 2b + 3$ want de getallen in het linkerlid zijn groter'. Stavy, Tirosh en Tsamir (1997) stelden bijvoorbeeld vast dat 87%, 88%, 38%, 32% en 18% van de leerlingen van vijf, zeven, negen, elf en veertien jaar geloofden dat in figuur 1 hoek *b* groter is dan hoek *a*. Ze beweren dat leerlingen zo redeneerden 'omdat de benen langer zijn'.

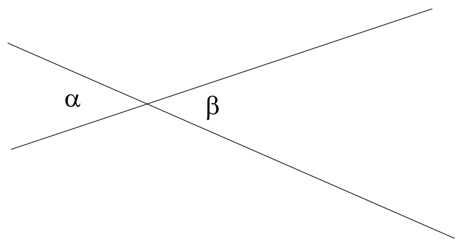
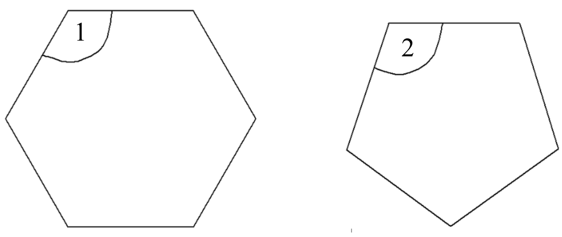


fig. 1 Opgave die de 'Meer A–meer B'-regel uitlokt

De tweede intuïtieve regel wordt ‘Zelfde A–zelfde B’ genoemd: een grootheid A is gelijk bij twee objecten en leerlingen argumenteren intuïtief dat dan ook een andere grootheid B bij deze objecten gelijk moet zijn. Uiteraard leidt ook deze regel vaak tot correcte conclusies (bijvoorbeeld: ‘$x^3 = y^3$ dus moet $x = y$’ of ‘driehoeken met dezelfde basis en hoogte hebben dezelfde oppervlakte’), maar de regel kan ook incorrecte conclusies teweegbrengen (bijvoorbeeld: ‘twee rechthoeken met dezelfde omtrek hebben dezelfde oppervlakte’, ‘als ik voortaan 20% taksen moet betalen, maar vervolgens 20% korting krijg op het totaalbedrag, dan betaal ik evenveel als voorheen’). Een voorbeeld uit het onderzoek van Tirosh en Stavy (1999a) is het volgende: Zij gaven aan leerlingen tussen 9 en 17 jaar de opgave in figuur 2. Respectievelijk 55%, 57%, 50%, 32% en 16% van de negen-, elf-, dertien-, vijftien- en zeventienjarigen geloofde dat hoek 1 even groot is als hoek 2. Tirosh en Stavy stellen dat dit een uiting is van de ‘Zelfde A–zelfde B’ intuïtieve regel, aangezien ‘the most typical justification of younger students was: ‘The sides are equal, so the angles are equal’’ (Tirosh & Stavy, 1999a, p. 55).



Omcirkel je antwoord:
a. Hoek 1 is groter dan hoek 2.
b. Hoek 2 is groter dan hoek 1.
c. Hoek 1 is even groot als hoek 2.
d. Het is onmogelijk om dat te bepalen

fig. 2 Opgave die de ‘Zelfde A–zelfde B’-regel uitlokt

Tirosh en Stavy en hun medewerkers onderzochten de evolutie van incorrecte ‘Meer A–meer B’ en ‘Zelfde A–zelfde B’ redeneringen voor een zeer groot aantal, vaak erg uiteenlopende wiskunde- en wetenschapstaakjes. Een uitvoerig overzicht van dit onderzoek (en van andere onderzoeksresultaten die in dezelfde lijn liggen) kan gevonden worden in hun boek *How students (mis-)understand science and mathematics – Intuitive rules* (Stavy & Tirosh, 2000). De conclusies van al deze onderzoeken waren gelijkluidend: Het antwoordgedrag van leerlingen bij het oplossen van vergelijkingsopgaven kan in hoge mate verklaard en voorspeld worden door het gebruik van deze twee eenvoudige intuïtieve regels.
Replicatieonderzoek in andere landen is evenwel zeldzaam. Bovendien beperken Stavy en Tirosh zich in het rapporteren over hun onderzoek meestal tot de percentages van leerlingen die het juiste antwoord, het ‘Zelfde A–zelfde B’-antwoord of het ‘Meer A–meer B’-antwoord aankruisten op een multiple-choice toets. Vervolgens geven ze meestal enkele ‘typische citaten’ van leerlingen die een bijna letterlijke verwoording zijn van deze intuïtieve regels. Men kan zich dan ook de vraag stellen of de denkprocessen van leerlingen effectief beïnvloed zijn door de intuïtieve regels die men uit hun antwoordgedrag zou afleiden. Het is immers mogelijk dat een volledig andere redenering deze leerlingen aanzette om het ‘Zelfde A–zelfde B’- of ‘Meer A–meer B’-antwoord aan te kruisen. Om hierin meer klaarheid te brengen en om de Israëlische ‘intuitive rules theory’ te toetsen, werd een Vlaamse studie naar het gebruik van intuïtieve regels opgezet. In de rest van dit artikel worden de onderzoeksopzet en de belangrijkste resultaten van deze studie samengevat.

Een Israëlische theorie getoetst …

Door het uitvoeren van een Vlaamse studie naar het gebruik van intuïtieve regels wilden we twee belangrijke vragen beantwoorden. Ten eerste: Laten Vlaamse leerlingen zich in even sterke mate misleiden door de intuïtieve regels als hun Israëlische leeftijdsgenoten? En ten tweede: Kunnen we bewijzen vinden dat het redeneerproces van leerlingen die een ‘Zelfde A–zelfde B’- of ‘Meer A–meer B’-antwoord aankruisen werkelijk beïnvloed werd door die intuïtieve regel?
Met deze bedoelingen werd van 172 leerlingen van de hoogste drie jaren van het secundair onderwijs (respectievelijk 58, 58 en 56 leerlingen van vijftien, zestien en zeventien jaar) een schriftelijke toets afgenomen. De toets bestond uit vijf vergelijkingsopgaven uit verschillende wiskundige deeldisciplines. Om de resultaten te kunnen vergelijken met die van de Israëlische onderzoekers, werden twee opgaven ontleend aan vroegere Israëlische studies. De opgaven werden als meerkeuzevragen met drie antwoordalternatieven aangeboden, waarbij de leerlingen ook telkens hun berekeningen dienden op te schrijven en hun antwoordkeuze moesten verantwoorden. Van de incorrecte alternatieven was er steeds één in overeenstemming met ‘Meer A–meer B’ en één met ‘Zelfde A–zelfde B’. Het correcte antwoord was niet in overeenstemming met een van deze intuïtieve regels.

We beperken ons in dit artikel tot de resultaten van twee opgaven, namelijk de opgaven die we (zo letterlijk mogelijk) vertaalden uit vroegere Israëlische studies. Het gaat om het zogenaamde ‘kubussenprobleem’ en het ‘kansenprobleem’. Ten behoeve van de lezers zijn alle opgaven die we gebruikten in dit onderzoek terug te vinden op de website van de *Nieuwe Wiskrant*, met telkens wat meer uitleg over de mogelijke ‘Meer A–meer B’- en ‘Zelfde A–zelfde B’-fouten die leerlingen kunnen maken, en een mogelijke verantwoording voor het correcte antwoord. Op die manier kunnen de opgaven uit het onderzoek ook in de klas worden gebruikt. De resultaten die we met die opgaven verkregen in onze Vlaamse studie (evenals een meer gedetailleerde beschrijving van de onderzoeksopzet) kunnen overigens gevonden worden in Van Dooren, De Bock, Weyers en Verschaffel (2004).

Het kubussenprobleem

De eerste opgave die we overnamen uit Israëlisch onderzoek was het kubussenprobleem. Die wordt weergegeven in figuur 3.

Hieronder zie je twee kubussen van verschillend formaat.
Is de verhouding tussen de oppervlakte en het volume in kubus 1 groter dan / gelijk aan / kleiner dan de verhouding tussen de oppervlakte en het volume in kubus 2?

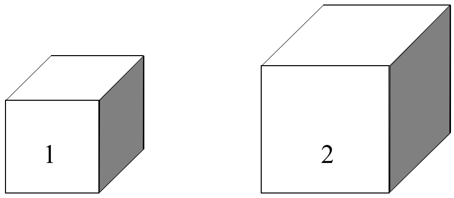


fig. 3 Het kubussenprobleem

De incorrecte antwoordalternatieven voor dit probleem zijn 'kleiner dan' en 'gelijk aan'. Deze alternatieven kunnen respectievelijk worden geïnterpreteerd als antwoorden in overeenstemming met 'Meer *A*–meer *B*' ('Hoe groter de kubus, hoe groter de verhouding') en 'Zelfde *A*–zelfde *B*' ('Het zijn allebei kubussen, dus de verhouding is dezelfde'), terwijl het correcte antwoord 'groter dan' geen van deze regels volgt. Een overzicht van de antwoorden op dit probleem in de Israëlische en Vlaamse studie wordt gegeven in Tabel 1.

Tabel 1: Percentages 'Zelfde A–zelfde B', 'Meer A–meer B' en correcte antwoorden op het kubussenprobleem in iedere leeftijdscategorie in de Israëlische en Vlaamse studies

	Israëlische studie			*Vlaamse studie*		
Leeftijd:	15	16	17	15	16	17
'Zelfde *A* –zelfde *B*	41%	45%	55%	39%	43%	39%
'Zelfde *A* –zelfde *B*	24%	19%	24%	16%	21%	16%
Correct	35%	36%	21%	45%	36%	45%

Het kubussenprobleem werd oorspronkelijk ontworpen door Livne (1996). Livne gaf dit probleem aan leerlingen van vijftien, zestien en zeventien jaar en stelde vast dat heel wat leerlingen het 'Zelfde *A*–zelfde *B*'-antwoord aankruisten, en dat dit aantal zelfs nog toenam met de leeftijd. Ongeveer eenvijfde van de leerlingen koos het 'Meer *A*–meer *B*'-antwoord. Opvallend was ook de daling in het aantal correcte antwoorden van 35% bij de vijftienjarigen tot 21% bij de zeventienjarigen. De resultaten van dit onderzoek werden meermaals door Tirosh en Stavy (2000) aangehaald als bewijs voor de 'Zelfde *A*–zelfde *B*'-regel. Ze rapporteren dat 'typical explanations were: 'Cube 1 and Cube 2 have the same geometrical shape, hence the ratio surface area to volume is the same regardless of their size'; 'The surface area and the volume in Cube 1 are proportionally smaller than in Cube 2 and therefore the ratio is constant'.' (Tirosh & Stavy, 2000, p. 49).

Zoals uit Tabel 1 blijkt werd in Vlaanderen een min of meer gelijkwaardige verdeling vastgesteld, maar er was geen echte stijging van het aantal 'Zelfde *A*–zelfde *B*'-antwoorden en geen daling van het aantal correcte antwoorden. Wat leren we echter wanneer we kijken naar de redeneerprocessen achter die antwoorden? We trachtten die redeneerprocessen af te leiden uit de berekeningen die de leerlingen op het antwoordblad neerschreven en/of uit de rechtvaardiging die ze gaven voor het gekozen antwoord.

Wanneer de leerlingen een 'Zelfde *A*–zelfde *B*'-antwoord gaven, dan werd in de meerderheid van de gevallen (64%) ook een 'Zelfde *A*–zelfde *B*'-rechtvaardiging of berekening teruggevonden. Meestal verwezen de leerlingen dan naar de gelijke vorm van de twee kubussen ('Omdat het allebei kubussen zijn' of 'Kubussen hebben altijd dezelfde vorm, en als je een kubus vergroot, dan moet de verhouding tussen de oppervlakte en het volume hetzelfde blijven') of naar de lineaire toename van de oppervlakte en het volume bij een vergroting (bijvoorbeeld 'als de oppervlakte van een kubus verdubbelt, dan wordt het volume ook verdubbeld'). Die laatste redenering ligt uiteraard zeer dicht bij de 'lineariteitsillusie', de overtuiging bij vele leerlingen dat de oppervlakte of het volume van een figuur *k* keer toeneemt als die figuur *k* keer vergroot wordt (zie De Bock et al., 2003).

Bij de zeldzame gevallen dat het 'Meer *A*–meer *B*'-antwoord werd aangekruist was slechts 17% ook echt vergezeld van een 'Meer *A*–meer *B*'-redenering (bijvoorbeeld 'De zijden in kubus 2 zijn groter, dus de verhouding is ook groter')! Een grondiger analyse van alle andere berekeningen en rechtvaardigingen leerde ons dat 53% van de leerlingen die een 'Meer *A*–meer *B*'-antwoord gaven de omgekeerde verhouding (dat wil zeggen de volume/oppervlakte-verhouding) hadden berekend, wat uiteraard tot het 'Meer *A*–meer *B*'-antwoordalternatief in plaats van het correcte alternatief leidde. Andere fouten die we vaak vaststelden waren het gebruik van een verkeerde formule voor de oppervlakte en/of het volume van een kubus) of eenvoudigweg rekenfouten die leidden tot de conclusie dat de verhouding in kubus 2 groter was dan die in kubus 1.

Wanneer leerlingen een correct antwoord gaven, dan ging dat in slechts 57% van de gevallen gepaard met een correcte berekening en/of verantwoording (bijvoorbeeld:

$$\textit{oppervlakte} = 6z^2 \text{ en } \textit{volume} = z^3 \cdot \frac{6z^2}{z^3} = \frac{6}{z} ,$$

en als *z* in kubus 2 groter is dan is de verhouding in kubus 2 kleiner'). 1% van de correcte antwoorden bevatte geen berekeningen of verantwoording, hetgeen betekent dat 42% van de correcte antwoorden het gevolg was van onjuiste berekeningen (voornamelijk de toepassing van verkeerde formules voor oppervlakte en/of volume) of rekenfouten, die toevallig tot het juiste antwoord hadden geleid.

Het kansenprobleem

De tweede opgave die we aan de Israëlische onderzoeken ontleenden was:

'De familie Peeters heeft twee kinderen en de familie Janssens heeft vier kinderen. Is de kans dat de familie Peeters één zoon en één dochter heeft groter dan / gelijk aan / kleiner dan de kans dat de familie Janssens twee zonen en twee dochters heeft?'

De incorrecte alternatieven 'kleiner dan' en 'gelijk aan' zijn, respectievelijk, in overeenstemming met 'Meer *A*–meer *B*' ('Meer kinderen, meer kans') en 'Zelfde *A*–zelfde *B*' ('Zelfde verhouding jongens/meisjes, zelfde kans'), terwijl het correcte antwoord 'groter dan' geen van deze regels volgt. De kansen voor beide families (1/2 voor de familie Peeters en 3/8 voor de familie Janssens) kunnen makkelijk worden berekend, bijvoorbeeld door gebruik te maken van een boomdiagram. Tabel 2 geeft de resultaten voor het kansenprobleem zoals ze gevonden werden in de Israëlische en in de Vlaamse studie.

Tabel 2: Percentages 'Zelfde A–zelfde B', 'Meer A–meer B' en correcte antwoorden op het kansenprobleem in iedere leeftijdscategorie in de Israëlische en Vlaamse studies

	Israëlische studie			*Vlaamse studie*		
Leeftijd:	15	16	17	15	16	17
'Zelfde *A* –zelfde *B*	57%	50%	62%	33%	24%	36%
'Zelfde *A* –zelfde *B*	19%	8%	8%	3%	9%	5%
Correct	24%	42%	30%	64%	67%	59%

Tirosh en Stavy (1999b) gaven dit probleem aan leerlingen tussen twaalf en zeventien jaar, en ook voor dit probleem werd aanvankelijk een stijging van het aantal 'Zelfde *A*–zelfde *B*'-antwoorden vastgesteld (respectievelijk 33%, 45% en 58% van de twaalf-, dertien- en veertienjarigen – de rest is aangegeven in Tabel 2) en een aanvankelijke daling van het aantal correcte antwoorden (46%, 37% en 25% bij de twaalf-, dertien- en veertienjarigen). Het aantal 'Meer *A*–meer *B*'-antwoorden bij de twaalf- tot vijftienjarigen lag dus rond 20% waarna dit daalde tot 8% bij de zestien- en zeventienjarigen.

Zoals uit tabel 2 kan worden afgeleid verschilden de Vlaamse resultaten voor dit kansenprobleem grondig van die in Israël. Er werden nauwelijks 'Meer *A*–meer *B*'-antwoorden gevonden, en de percentages 'Zelfde *A*–zelfde *B*'-antwoorden in Vlaanderen waren veel lager dan in Israël. Dit betekent dan uiteraard ook dat er veel meer correcte antwoorden op het kansenprobleem werden gegeven dan in de Israëlische studies. De analyse van de redeneerprocessen leerde ons het volgende:

Wanneer de leerlingen een 'Zelfde *A*–zelfde *B*'-antwoord hadden aangekruist, dan werd dit in de meeste gevallen (73%) ook veroorzaakt door een 'Zelfde *A*–zelfde *B*'-redenering. Meestal waren de leerlingen dan overtuigd dat de kans in beide families gelijk was aan $\frac{1}{2}$ (bijvoorbeeld 'Het maakt niet uit hoeveel kinderen er in een gezin zijn. De kans om evenveel jongens als meisjes te hebben is $\frac{1}{2}$'). Heel wat redeneringen verwezen expliciet naar de gelijke verhoudingen in beide families om de gelijke kans te rechtvaardigen (bijvoorbeeld 'Bij de familie Janssens zijn er dubbel zoveel jongens, maar ook dubbel zoveel kinderen in totaal, dus de kans blijft even groot'). Opnieuw lijkt zo'n redenering sterk op wat we vroeger vaststelden in ons onderzoek naar de 'lineariteitsillusie' in de kansrekening (zie Van Dooren et al, 2002; Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens & Verschaffel, 2003). Veel leerlingen geloven bijvoorbeeld dat de kans om met een dobbelsteen minstens twee keer een vijf te gooien in zes pogingen even groot is als de kans om minstens een keer een vijf te gooien in drie pogingen (aangezien zowel het aantal vereiste successen als het aantal pogingen dubbel zo groot zijn).

De weinige leerlingen die het 'Meer *A*–meer *B*'-antwoord gaven, maakten in 70% van de gevallen ook een 'Meer *A*–meer *B*'-redenering. Ze geloofden dat er met meer kinderen een grotere kans is om evenveel jongens als meisjes te hebben (bijvoorbeeld 'Bij de familie Janssens zijn er meer 'pogingen', dus een grotere kans om een jongens-meisjesbalans te hebben' of 'Veronderstel dat beide families al twee zonen hebben. Dan heeft de familie Peeters geen kans meer om evenveel jongens als meisjes te hebben, maar de familie Janssens kan nog twee kinderen krijgen, dus is er nog altijd een kans').

De meest opvallende vaststelling was wellicht de volgende: Hoewel de Vlaamse leerlingen veel meer correcte antwoorden gaven dan hun Israëlische leeftijdsgenoten, bleek dat slechts 5% van die correcte antwoorden ook tot stand kwam door een juist redeneerproces. Dit compromitteert natuurlijk de betere resultaten van de Vlaamse leerlingen. 13% van de antwoorden van de Vlaamse leerlingen bevatte geen berekeningen of verantwoordingen, en maar liefst 82% van de correcte antwoorden was het gevolg van een andere, foutieve redenering. Een analyse van deze foutieve redeneringen leerde ons dat er drie belangrijke verklaringsgronden waren:

44% van de leerlingen was onderhevig aan de zogenaamde 'equiprobability bias' (zie bijvoorbeeld Lecoutre, 1992). Volgens die misvatting hebben alle gebeurtenissen een even grote kans: Bij de familie Peeters zijn er drie mogelijke combinaties ('twee zonen', 'een zoon en een dochter' of 'twee dochters'), zodat men denkt dat elke combinatie 33,33% kans heeft. Bij de familie Janssens zijn er vijf mogelijke combinaties ('vier zonen', 'drie zonen en een dochter', 'twee zonen en twee dochters', 'drie

dochters en een zoon' en 'vier dochters'), zodat men denkt dat elke combinatie 20,00% kans heeft. Uiteraard is die redenering onjuist, maar ze leidt wel tot de (juiste) conclusie dat de familie Peeters de meeste kans heeft.
Een tweede categorie van foute redeneringen (38% van de antwoorden) was gebaseerd op de veronderstelling dat 'hoe meer mogelijkheden er zijn, hoe minder kans iedere mogelijkheid heeft'. Hoewel die veronderstelling in dit geval juist was, werd zo'n redenering als onjuist beschouwd omdat ze zeker niet altijd waar is, en omdat de kansen voor beide gebeurtenissen niet berekend werden.
Een laatste belangrijke categorie van foutieve redeneringen (10% van de antwoorden) was toe te schrijven aan een interpretatiefout. Deze leerlingen veronderstelden dat 'een zoon en een dochter' en 'twee zonen en twee dochters' respectievelijk opgevat moesten worden als 'eerst een zoon en dan een dochter' en als 'eerst twee zonen en dan twee dochters', hetgeen leidt tot kansen van $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{16}$.

Besluit

In hun onderzoek toonden Tirosh en Stavy aan dat de 'intuitive rules theory' kan helpen bij het interpreteren van bepaalde fouten bij leerlingen, met name wanneer ze vergelijkingsvraagstukken in erg uiteenlopende gebieden van de wiskunde en wetenschappen oplossen. Leerlingen zouden zich dan op de externe kenmerken van een taak baseren en redeneren dat wanneer een bepaalde grootheid A toeneemt, een andere grootheid B ook moet toenemen ('Meer A–meer B'), of dat wanneer een bepaalde grootheid A dezelfde blijft, een andere grootheid B ook dezelfde moet blijven ('Zelfde A–zelfde B').
Globaal genomen tonen de resultaten van ons replicatieonderzoek aan dat Vlaamse leerlingen zich in het algemeen minder sterk laten misleiden door deze eenvoudige intuïtieve regels dan hun Israëlische leeftijdsgenoten en dus meer correcte antwoorden geven. De studie toonde ook aan dat de intuïtieve regels (en vooral dan de 'Zelfde A–zelfde B'-regel) in bepaalde gevallen inderdaad het redeneerproces van leerlingen beïnvloeden. Maar de belangrijkste bevinding is wellicht dat een foutief antwoord in overeenstemming met een van de intuïtieve regels niet noodzakelijk betekent dat de leerling in realiteit ook zo'n intuïtieve redenering volgde. Leerlingen maakten vaak andere fouten of waren behept met bepaalde misconcepties die niets te maken hebben met deze intuïtieve regels, en die een alternatieve verklaring vormden voor het foutieve antwoordgedrag. Er lijkt dus enige voorzichtigheid geboden ten opzichte van zulke algemene theorieën die pretenderen dat ze het antwoordgedrag van leerlingen over verschillende wiskundedomeinen heen kunnen voorspellen.

Slotbeschouwing

De 'intuitive rules theory' van Tirosh en Stavy en de notie 'intuïtie' zoals deze werd ontwikkeld en onderzocht door Fischbein, hebben veel gemeenschappelijke kenmerken. Zo hebben de intuïtieve regels net als intuïties de eigenschap dat ze verder reiken dan gegeven feiten, zelfevident zijn, het denken beïnvloeden en de probleemsituatie globaal benaderen. Bovendien werd in het onderzoek vastgesteld dat er zowel qua onterechte intuïties als qua onjuiste antwoorden in lijn met een intuïtieve regel vaak een evolutie is met de leeftijd van de leerlingen, hetzij een toename of een afname van het aantal foute antwoorden met de leeftijd, die al dan niet het gevolg is van formeel onderwijs.
Maar ondanks de gemeenschappelijke gronden zijn er toch enkele grondige verschillen. De notie 'intuïtie' zoals Fischbein ze opvatte is erg inhoudelijk georiënteerd. Voor een welbepaalde probleemsituatie (bijvoorbeeld een trekking van zes lottoballen uit een set van 40) probeerde Fischbein te begrijpen welke regels of heuristieken leerlingen met welbepaalde wiskundige achtergrond (met betrekking tot kansrekening, onafhankelijke steekproeftrekkingen, …) zouden hanteren bij het beoordelen van de kans van een bepaalde lotto-uitkomst (namelijk regels met betrekking tot de 'representativeness' van die uitkomst), en hoe die beoordelingsregels bij die leerlingen precies konden ontstaan.
De 'intuitive rules theory' is daarentegen veeleer vormgeoriënteerd: Tirosh en Stavy beweren dat vergelijkingstaken die beantwoorden aan een bepaalde vorm (bijvoorbeeld een gegeven grootheid $A1$ is groter dan $A2$ en er moet een vergelijking gemaakt worden tussen $B1$ en $B2$) een bepaald antwoord zullen uitlokken bij veel leerlingen (namelijk een 'Meer A–meer B'-antwoord), aangezien de leerlingen zich in hoge mate zouden concentreren op de externe kenmerken van die taak.
Dus waar Fischbein zich hoofdzakelijk concentreerde op het confronteren van de wiskundige aspecten en vereisten van een bepaald probleem enerzijds en de (al dan niet op school verworven) wiskundige achtergrondkennis van leerlingen anderzijds, heeft het inhoudelijke karakter van die taak nauwelijks belang in de 'intuitive rules theory'. Volgens ons heeft dit een grote impact op de waarde van beide theoretische benaderingen. De belangrijkste criteria die Schoenfeld (2002) presenteerde voor het beoordelen van wiskundedidactische theorieën zijn de voorspellende en de verklarende kracht.
De voorspellende kracht lijkt in hoge mate aanwezig in de notie 'intuïtie': Fischbein toonde aan dat leerlingen in hoge mate consequent reageren met hun intuïties, en dat veel van die intuïties maar moeilijk te veranderen zijn. Wanneer we de wiskundige achtergrond van een leerling in een bepaald 'misconceptierijk' gebied van de wiskunde goed kennen, dan kunnen we ook voorspellen hoe die leerling zal reageren op bepaalde problemen. Ook de 'intuitive rules theory' lijkt heel wat voorspellende kracht te hebben: Wanneer we weten dat een bepaald wiskundig probleem bepaalde uiterlijke kenmerken heeft, kunnen we voorspellen dat heel wat leerlingen een 'Meer A–meer B'- of 'Zelfde A–zelfde B'-fout gaan maken. Onze

Vlaamse studie heeft echter uitgewezen dat dit zeker niet altijd het geval is (zie ook Van Dooren et al., 2004). Onze studie toonde overigens ook aan dat een tweede opvatting van 'voorspellende kracht' niet opgaat: We hebben vastgesteld dat er geen of nauwelijks leerlingen zijn die voor vier of vijf van de vijf aangeboden vraagstukken antwoordden in lijn met een van de intuïtieve regels. Zelfs wanneer leerlingen geen enkel van de aangeboden vraagstukken correct konden oplossen, gebeurde het slechts zelden dat zij consistent een van de intuïtieve regels gingen hanteren.

Wat de verklarende kracht betreft hebben we gepoogd in dit artikel duidelijk te maken dat de notie 'intuïtie' heel wat fouten van leerlingen inzichtelijk kan maken, en dat we de oorsprong van die fouten vaak kunnen achterhalen door een analyse van de betrokken wiskundige concepten en de confrontatie met de wiskundige achtergrond en de ervaringen van de leerlingen. Wat de 'intuitive rules theory' betreft hebben we aangetoond dat antwoorden van leerlingen die schijnbaar het gevolg zijn van een 'Meer *A*–meer *B*'- of 'Zelfde *A*–zelfde *B*'-redenering vaak door heel andere fouten zijn veroorzaakt, zodat de verklarende kracht van de 'intuitive rules' volgens ons eerder beperkt is. In sommige gevallen kan die theorie wellicht een interpretatiekader zijn voor de fouten van leerlingen, maar er lijkt veel voorzichtigheid geboden.

Wim Van Dooren, Aspirant van het Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek (FWO) Vlaanderen en Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie (CIP&T), K.U. Leuven

Dirk De Bock, Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie (CIP&T), K.U. Leuven en EHSAL, Europese Hogeschool Brussel

Lieven Verschaffel, Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie (CIP&T), K.U.Leuven

Deze publicatie is tot stand gekomen in het kader van de Onderzoekstoelage OT-2000-10 van het Onderzoeksfonds van de Katholieke Universiteit Leuven en werd onder meer gepresenteerd op de Nationale Wiskundedagen 2004.