Wim van Dooren, Dirk de Bock en **Lieven Verschaffel** hebben onderzoek verricht naar de rol van intuïties bij het leren van wiskunde. Doe voor u verder leest even een gedachtenexperiment: een ladder staat tegen een muur, ziet u het voor u? De ladder schuift weg zodat hij plat op de grond komt te liggen. Welke baan beschrijft het midden van de ladder?

Intuïties en intuïtieve regels: Interpretatiekader voor fouten van leerlingen?

Inleiding

Onder vakdidactici wiskunde en wetenschappen is er veel belangstelling voor de concepties en redeneerprocessen van leerlingen in diverse toepassingsdomeinen. Veel onderzoekers hebben daarbij gewezen op bepaalde hardnekkige fouten, misconcepties of preconcepties (dat wil zeggen, concepties die niet overeenstemmen met de wiskundig/wetenschappelijk aanvaarde noties), bijvoorbeeld de neiging van veel leerlingen om uit te gaan van een lineair verband tussen grootheden in situaties waar in feite een ander verband aan de orde is (bijvoorbeeld in de meetkunde, De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2003; of in de kansrekening, Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2002).
In het eerste deel van dit artikel onderzoeken we in eerste instantie welke rol intuïties kunnen spelen bij het wiskundig probleemoplossen en hoe ze het redeneerproces (in positieve en negatieve zin) kunnen beïnvloeden. Daarbij zullen we ingaan op het werk van de Israëlische onderzoeker Fischbein, maar we zullen ons betoog onderbouwen en illustreren met onze eigen (onderzoeks)ervaringen.
Het tweede deel van dit artikel zal verschijnen in het volgende nummer van de *Nieuwe Wiskrant*. Daarin zullen we de mogelijke invloed van zogenaamde 'intuïtieve regels' kritisch bekijken. De Israëlische onderzoekers Tirosh en Stavy beweren dat de (correcte en incorrecte) oplossingen van leerlingen bij het oplossen van problemen in wiskunde en wetenschappen vaak verklaard kunnen worden doordat ze een beperkt aantal intuïtieve regels toepassen. Aan de hand van Israëlisch en Vlaams onderzoek gaan we na in welke mate de 'intuitive rules theory' werkelijk kan helpen bij het interpreteren van uiteenlopende fouten van leerlingen.

Deel 1: Intuïties en wiskundig probleemoplossen

De theorie van Fischbein
Het onderzoek naar de rol van intuïties bij het wiskundig probleemoplossen werd vooral geïnspireerd door het werk van de Israëlische onderzoeker Efraim Fischbein (1920-1998). Een intuïtie werd door hem gedefinieerd als een inzicht dat 'implies an extrapolation beyond the directly accessible information' (Fischbein, 1987, p. 13). Met andere woorden: intuïties zijn veronderstellingen die *verder reiken dan de gegeven feiten*. Verdere kenmerken van intuïties – onderscheiden door Fischbein – zijn dat ze *zelf-evident* (onmiddellijk en zonder verdere argumenten aannemelijk) zijn, het *denken* spontaan en sterk *beïnvloeden* en dat de probleemsituatie er *globaal* door wordt benaderd (in plaats van diepgaand wiskundig geanalyseerd). Uit deze beschrijving van intuïties volgt logischerwijs dat intuïties vaak correct zijn. We nemen bijvoorbeeld intuïtief aan dat de kortste afstand tussen twee punten de rechte lijn is die deze twee punten verbindt[1], ook al kunnen we dat niet onmiddellijk zien voor elke gegeven set van twee punten, en hebben we er ook nooit een algemeen bewijs van gezien. Maar intuïties kunnen ook misleidend zijn. Zo nemen we ook makkelijk aan dat het geheel altijd groter is dan elk van zijn delen, maar zodra er oneindigheid in het spel is, gaat deze intuïtie niet meer op. Er zijn bijvoorbeeld niet meer gehele getallen dan er even gehele getallen zijn, hoewel de even getallen maar de 'helft' van alle gehele getallen uitmaken. Een eenvoudiger voorbeeld is dat heel wat leerlingen er spontaan van uitgaan dat een deling altijd kleiner maakt, waardoor ze een fout zoals '20 : 0,5 = 10' maar moeilijk zullen opmerken. De uitgebreide ervaring die leerlingen aanvankelijk hebben met delingen door (positieve) getallen groter dan 1, samen met een opvatting van delen als 'in stukken verdelen' van een bepaalde grootheid maken deze intuïtieve misvatting erg hardnekkig.

Enkele voorbeelden
Fischbein verrichte heel wat empirisch onderzoek naar de intuïties die leerlingen hebben met betrekking tot diverse wiskundige problemen. Vaak probeerde hij daarbij na te gaan hoe die intuïties evolueerden met de leeftijd (en dus ook met de evoluerende wiskundekennis en onderwijservaring) van de leerlingen. Zo gaf hij bijvoorbeeld de volgende taak aan leerlingen tussen tien en zestien jaar (Fischbein & Schnarch, 1997):

‘In een lottospel moet men 6 getallen kiezen uit een totaal van 40. Peter koos 1, 2, 3, 4, 5 en 6. Tine koos de getallen 39, 1, 17, 33, 8 en 27. Wie heeft het meeste kans om te winnen?’

Uiteraard hebben beiden evenveel kans om dit lottospel te winnen, omdat ieder groepje van zes getallen evenveel kans maakt om getrokken te worden. Maar heel wat leerlingen – 70% van de tienjarigen, 55% van de twaalfjarigen, 35% van de veertienjarigen en 22% van de zestienjarigen – dachten dat Tine de meeste kans heeft om te winnen. Men kan immers intuïtief redeneren dat het erg onwaarschijnlijk is dat een geordende reeks zoals 1, 2, 3, 4, 5, 6 (die bovendien dan nog eens bestaat uit de eerste zes getallen) getrokken wordt. Een ‘willekeurige’ reeks zoals die van Tine lijkt veel ‘representatiever’ voor het proces van willekeurige lottotrekkingen (en lijkt dus veel waarschijnlijker) dan een regelmatige reeks zoals die van Peter. Nochtans, wanneer men de exacte kans van beide gebeurtenissen berekent (een analytische in plaats van een globale benadering van de situatie), dan zal men snel ontdekken dat beide trekkingen even waarschijnlijk zijn. Fischbein toont aan dat deze onterechte intuïtie (die hij de ‘representativeness bias’ noemde) afneemt met de leeftijd. Maar zelfs wiskundig geschoolden zijn niet altijd volkomen ongevoelig voor misleidende intuïtieve redeneringen, zoals we tijdens ons optreden op de Nationale Wiskundedagen 2004 mochten ondervinden. We legden het aanwezige publiek van ongeveer tachtig personen het volgende probleem voor:

‘U ziet hier een ladder tegen de muur staan (figuur 1). Het middelpunt van de ladder is aangegeven. Boven- en onderaan is de ladder ingesmeerd met zeep, en de ladder begint plotseling te schuiven. Beschrijf de baan van het middelpunt van deze ladder.’

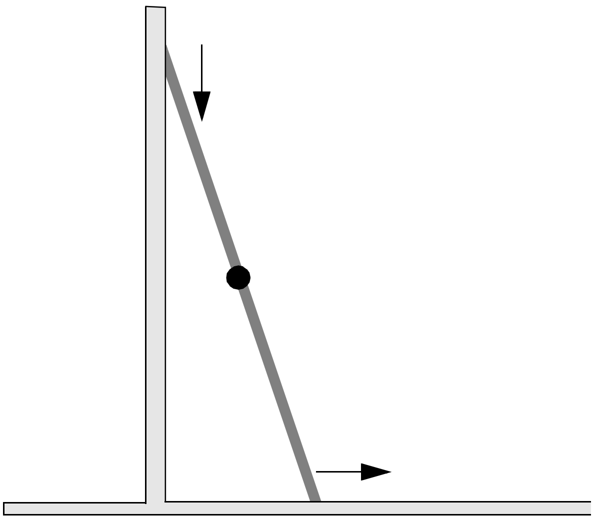

fig. 1 Ladderprobleem voorgelegd aan het publiek op de Nationale Wiskundedagen

De toeschouwers kregen een halve minuut om een schets te maken van de baan van het middelpunt van de ladder. Bij de inventarisatie van de oplossingen bleek dat slechts drie van de ongeveer tachtig aanwezigen de juiste baan (figuur *2a*) hadden getekend. De anderen maakten een onjuiste tekening die lijkt op figuur *2b*.

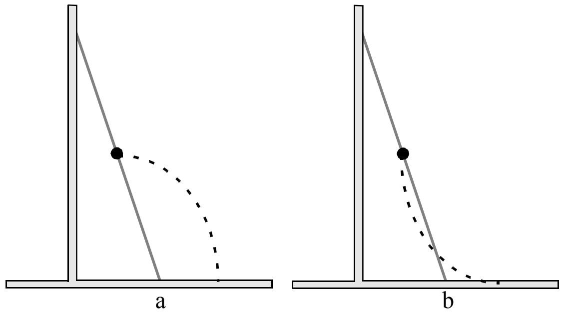

fig. 2 Juiste en onjuiste (intuïtieve) oplossing ladderprobleem

Hoewel figuur *2a* (een gedeelte van een kwartcirkel) dus de enige juiste oplossing is, was bijna iedereen spontaan geneigd om te veronderstellen dat het middelpunt van de ladder zich bewoog zoals in figuur *2b*. Velen waren bovendien erg zeker van die veronderstelling. We kunnen die redenering een intuïtieve redenering noemen omdat deze (1) verdergaat dan de onmiddellijke feiten (men kon de baan van het middelpunt niet zien), (2) erg evident leek voor de meesten, (3) het gedrag duidelijk en spontaan heeft beïnvloed en (4) niet gebaseerd is op een wiskundige analyse van de situatie, maar eerder op een ‘globaal’ inzicht/aanvoelen. We moeten wel erkennen dat we de intuïtieve redenering enigszins hebben uitgelokt door de deelnemers slechts dertig seconden de tijd te geven, zodat ze de situatie niet wiskundig *konden* analyseren en dus wel moesten afgaan op hun eerste, globale indrukken. Wellicht tekenden velen dan ook een baan zoals in figuur *2b* omdat ze zich fixeerden op de pijltjes die zijn aangegeven in figuur 1 (en de punten ertussen ‘interpoleerden’), ofwel omdat ze zich de ladder in de diverse posities voorstelden (hetgeen eruitziet zoals in figuur 3), en zich concentreerden op de omhullende kromme van die ladders.

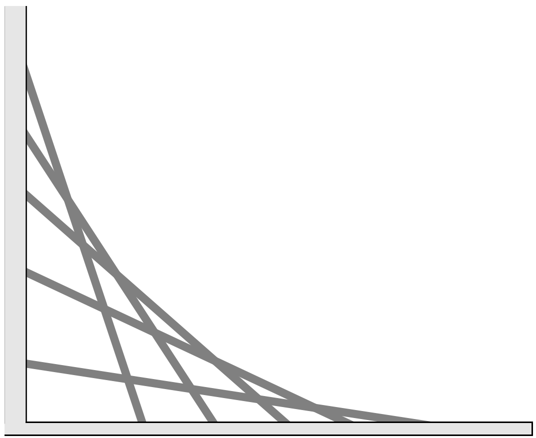

fig. 3 Een verklaring voor de foutieve antwoorden op het ladderprobleem?

Intuïties: te mijden?

Hoewel intuïties ons door hun onmiddellijke, dwingende en globale karakter vaak kunnen misleiden, moeten ze volgens Fischbein toch gezien worden als het spontane en onvermijdelijke antwoord op een menselijke basisbehoefte aan zekerheid. Net zoals voor de intuïties die we hebben in het dagelijks leven ('de zon gaat iedere ochtend op', 'het lampje van de koelkast dooft als ik de deur sluit'), willen we ook in de wereld van de wiskunde kunnen uitgaan van enkele onmiddellijk evidente 'waarheden', zonder dat we die steeds moeten bewijzen. We hoeven toch geen exacte kansen te berekenen om te weten dat het gooien van een oneven getal met een dobbelsteen waarschijnlijker is dan het gooien van een zes? En we vinden het toch niet nodig om te bewijzen dat elk natuurlijk getal een opvolger heeft die precies één groter is, alvorens we gaan optellen en aftrekken? Nochtans veralgemenen heel wat leerlingen die laatste intuïtie naar *alle* getallen, en denken dan dat *elk* getal een onmiddellijke opvolger heeft (Merenluoto & Lehtinen, 2002). Ze zullen dan beweren dat 0,99 en 1,01 de getallen zijn die het dichtstbij 1,00 liggen, en dat de 'volgende' breuk na $\frac{3}{5}$ wel $\frac{4}{5}$ moet zijn.

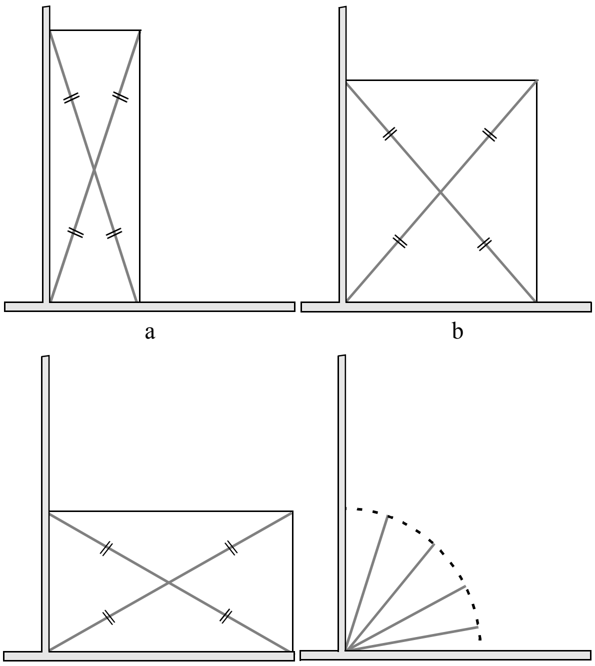

fig. 4 Een intuïtief aannemelijke verklaring voor de baan van het middelpunt van de ladder?

Fischbein beschrijft ook hoe belangrijk intuïties voor een ervaren wiskundige kunnen zijn 'to see – *at the end of a tremendous analytical effort* – the solution of a problem as a unique, global, directly acceptable, intrinsically meaningful structure' (Fischbein, 1987, p. 8). Beschouw bijvoorbeeld de voor velen 'tegenintuïtieve' correcte oplossing voor het ladderprobleem (zie figuur *2a*). Rob van Oord (1990) stelde de volgende oplossingsmethode voor, die op een erg eenvoudige manier verduidelijkt waarom de baan van het middelpunt een deel van een kwartcirkel beschrijft: Beschouw de ladder als een van de diagonalen van een rechthoek, zoals te zien in figuur *4a.* De twee diagonalen van een rechthoek zijn even lang en snijden elkaar middendoor. Wanneer de ladder gaat schuiven blijven de diagonalen even lang (omdat de ladder uiteraard even lang blijft), en verandert de rechthoek enkel van vorm (zie bijvoorbeeld figuur *4b* en *4c*). De conclusie is dan ook dat het middelpunt van de ladder een kwartcirkel beschrijft met als straal de halve lengte van de ladder (zie figuur *4d*).

Primaire en secundaire intuïties

Een belangrijk onderscheid dat Fischbein maakt is dat tussen primaire en secundaire intuïties. Primaire intuïties ontwikkelen zich in een individu onafhankelijk van enige systematische instructie, als gevolg van de persoonlijke ervaringen van dat individu. Dat de kortste weg tussen twee punten een rechte lijn is, zal iedereen wellicht al aannemen alvorens dit op school 'formeel' wordt geleerd. Ik weet ook intuïtief en zonder formeel het principe van transitiviteit geleerd te hebben dat Steven groter is dan Joost wanneer Steven groter is dan Erik, en Erik groter is dan Joost. Een voorbeeld van een onterechte primaire intuïtie is dat we kracht moeten blijven uitoefenen op een voorwerp, opdat het zou blijven bewegen (dit klopt in onze dagelijkse leefwereld waar wrijvingen onvermijdelijk zijn, maar niet in de Newtoniaanse fysica).

Secundaire intuïties zijn intuïties die niet spontaan uit onze 'natural roots' ontstaan. Ze komen niet tot stand door de alledaagse ervaringen van een individu, maar worden verworven doorheen het formele onderwijs. We haalden eerder reeds enkele voorbeelden aan: 'een deling maakt altijd kleiner', 'ieder getal heeft een onmiddellijke opvolger'. Kenmerkend voor secundaire intuïties is dat ze vaak ten gronde verschillen van de 'natuurlijke' houding die iemand heeft tegenover een bepaalde situatie. We geven een voorbeeld uit ons eigen recente onderzoek (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel, 2004). We gaven aan ongeveer duizend leerlingen tussen acht en dertien jaar het volgende vraagstuk:

> 'Ellen en Kim lopen rondjes op een piste. Ze lopen even snel, maar Ellen startte later. Wanneer Ellen vijf rondjes heeft gelopen, heeft Kim er vijftien gelopen. Wanneer Ellen dertig rondjes heeft gelopen, hoeveel rondjes heeft Kim dan gelopen?'

Hoewel een juiste oplossing van dit probleem er eenvoudigweg in bestaat om op te merken dat Kim tien rondjes voorsprong heeft op Ellen (en dat die voorsprong behouden blijft vermits ze even snel lopen), verwachtten we dat heel wat leerlingen proportioneel zouden redeneren. Zulke redenering houdt in dat Kim aanvankelijk drie keer zoveel rondjes heeft gelopen als Ellen ($5 \times 3 = 15$), waarna dit veralgemeend wordt (denkende dat Kim dus $30 \times 3 = 90$ rondjes heeft gelopen als Ellen er dertig heeft gelopen). Figuur 5 geeft weer hoe leerlingen van diverse leeftijden in ons onderzoek het probleem oplosten:

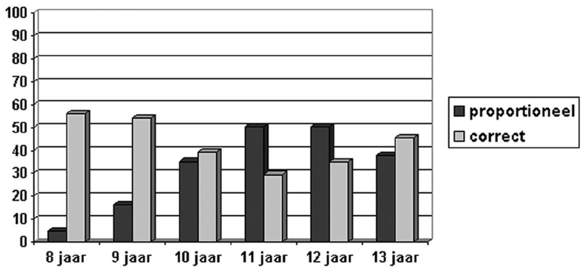

fig. 5 Aantal correcte en proportionele oplossingen voor het lopersprobleem

Uit de figuur blijkt duidelijk dat het aantal correcte antwoorden daalt met de leeftijd (en dus met de toenemende wiskundekennis en onderwijservaring) van de leerlingen. Meer dan 56% van de achtjarigen loste het probleem correct op, tegenover slechts 29% van de elfjarigen. Daar staat tegenover dat het aantal (onjuiste) proportionele antwoorden zeer sterk toeneemt met de leeftijd (van 5% bij de achtjarigen tot 50% bij de elfjarigen)! Terwijl de meesten van de jongste leerlingen blijkbaar makkelijk het constante verschil van tien rondjes tussen de lopers opmerkten, zag de meerderheid van de elfjarigen dit niet. Blijkbaar hadden zij een reflex ontwikkeld om een proportionele oplossingsmethode te gebruiken om de 'ontbrekende waarde' in zulke vraagstukken te vinden.

Besluit

Zoals uit bovenstaande analyse is gebleken, spelen intuïties onmiskenbaar een rol in ons wiskundig redeneren. Ze verschaffen ons een aantal zelfevidente, globale inzichten die verder reiken dan de gegeven feiten, en kunnen worden gezien als een menselijke reactie op een behoefte aan zekerheid. Hoewel intuïties ons soms sterk kunnen misleiden (en daardoor aan de basis liggen van talloze misvattingen bij leerlingen), kunnen ze ook nuttig zijn bij het opbouwen van wiskundige redeneringen, of de uitkomst van een wiskundige redenering als uniek, aannemelijk en betekenisvol voorstellen. Intuïties kunnen zowel ontstaan als verdwijnen doorheen de tijd. Vele ontwikkelen zich spontaan door ervaringen die we opdoen in het dagelijks leven, maar andere (zowel juiste als onjuiste) intuïties worden teweeggebracht door het formele onderwijs. Omdat er onmiskenbaar een interactie bestaat tussen intuïties en het leerproces, is het dan ook beter het bestaan van deze intuïties te onderkennen dan deze te negeren.

Fischbein vervulde een pioniersrol in het onderzoek naar de rol van intuïties bij het wiskundig probleemoplossen. Op basis van zijn werk ontwikkelden de Israëlische onderzoekers Tirosh en Stavy (1999a, 1999b; Stavy & Tirosh, 2000) de zogenaamde 'intuitive rules theory', die ervan uitgaat dat leerlingen zich bij het oplossen van wiskundige en wetenschappelijke problemen vaak baseren op een beperkt aantal intuïtieve regels, met name 'meer *A*–meer *B*' en 'zelfde *A*–zelfde *B*'. In het tweede deel van dit artikel (dat zal verschijnen in het volgende nummer van de *Nieuwe Wiskrant*) gaan we dieper in op deze theorie, en onderzoeken we met een kritische blik of die werkelijk kan helpen bij het verklaren van de fouten die leerlingen maken.

Wim Van Dooren, Aspirant van het Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek (FWO) Vlaanderen en Centrum voor Instructiepsychologie en –Technologie (CIP&T), K.U. Leuven

. *Dirk De Bock, Centrum voor Instructiepsychologie en –Technologie (CIP&T), K.U. Leuven en EHSAL, Europese Hogeschool Brussel*

Lieven Verschaffel, Centrum voor Instructiepsychologie en –Technologie (CIP&T), K.U. Leuven

Deze publicatie is totstandgekomen in het kader van de Onderzoekstoelage OT-2000-10 van het Onderzoeksfonds van de Katholieke Universiteit Leuven en werd onder meer gepresenteerd op de Nationale Wiskundedagen 2004.

Noot

[1] We gaan hier voor het gemak even uit van een Euclidische ruimte.