

Wat de een ziet als een praktisch gereedschap, kan de ander zien als de meest zuivere, want contextloze, manier van denken. Breng twee van deze zienswijzen bij elkaar en er kan een boeiende discussie ontstaan. Filosoof **Nico Krijn** en wiskundige **Manuel Nepveu** brachten deze gedachte in de praktijk en doen verslag.

Wiskunde en filosofie

Inleiding

Filosofen stellen vragen als ‘wat is wiskunde?’, ‘hoe krijgen we kennis van wiskunde?’, ‘wordt wiskunde ontdekt of uitgevonden?’. In het algemeen staan filosofen op grote afstand van de alledaagse wiskundige praktijk. Filosofische vragen zijn voor de praktijk niet belangrijk. Wiskundigen – de naam zegt het al – bedrijven wiskunde. Voor hen is wiskunde een gereedschap. Je kunt er berekeningen mee maken, kansen bepalen, modellen ontwikkelen, enzovoort. Wiskunde werkt! Daar gaat het om. In onderstaand vraaggesprek worden vragen van de filosoof Nico Krijn voorgelegd aan de wiskundige Manuel Nepveu. Beiden werken bij TNO. Het idee voor een vraaggesprek is daar aan de koffietafel ontstaan. Het resultaat is een woordenwisseling waarbij de wiskundige zelfs handtastelijk wordt.

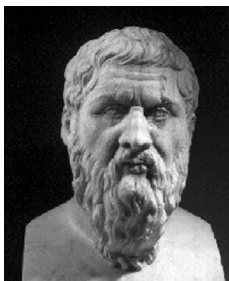


fig. 1 De vreemdeling zegt: ‘[...] In het algemeen rekenen we getallen toch tot de dingen die bestaan?’ En Theatetus antwoordt: ‘Ja, als iets daartoe gerekend dient te worden, dan wel het getal.’ [PLATO, *Sophist*, 238A]

Vraaggesprek

NK: De vraag wat wiskunde is – dat is de vraag naar de grondslagen van de wiskunde – kan op twee manieren benaderd worden. Ten eerste kan onderzocht worden of de wiskunde te reduceren is tot een andere discipline. Dit brengt met zich mee dat alle wiskundige uitspraken worden vertaald in de taal van de andere discipline. Daar zijn twee redenen voor. Het is de wens naar eenvoud en een conceptuele economie, en de overtuiging dat de elemen-

ten die het domein van de andere discipline vormen duidelijker en beter te begrijpen zijn dan die van de wiskunde. In de negentiende en twintigste eeuw is geprobeerd alle wiskunde te vertalen in logica en verzamelingenleer.¹ De andere benadering van de grondslagen van de wiskunde is een zoektocht naar de bestaansvorm. Plato en zijn tijdgenoten zochten naar de bestaansvorm van getallen. Bij dit soort onderzoek was de vraag niet hoe getallen functioneren in meetkundige formules maar hoe zij bestaan. Tegenwoordig stelt men, abstracter, dat wiskunde gaat over structuren. Echter, de vraag blijft: hoe bestaan die wiskundige structuren?



fig. 2 ‘Stelling 26 - Wiskunde is zelf niet een wetenschap, maar een moment in de daad, die het bedrijven van wetenschap is.’ [BROUWER, L.E.J., 1907]

Er zijn grofweg drie manieren waarop wiskunde kan bestaan. Ten eerste kun je aannemen dat de wiskunde als het ware is af te lezen aan de natuur. Volgens dit zogenaamde naturalisme is wiskunde louter een abstractie van de materiële wereld. Volgens de tweede stroming – het realisme – bestaat de wiskunde op zichzelf onafhankelijk van de materiële wereld in een abstracte wereld. Plato is een belangrijke vertegenwoordiger van dit realisme. De Nederlander Brouwer vertegenwoordigt met het door hem ontwikkelde intuitionisme een derde stroming: wiskunde ontstaat in de mens en is onafhankelijk van de ervaring. Wiskundige objecten bestaan alleen voor zover zij de resultaten zijn van mijn constructies. Er is volgens Brouwer

geen Platonisch rijk met wiskundige objecten. Tot welke stroming behoort jij?

MN: Strikt genomen ben ik geen wiskundige maar sterrenkundige met een fikse wiskundige belangstelling. Mijn werk heeft me trouwens steeds meer de toegepaste wiskundige kant opgedreven.

Wiskunde is voor veel wetenschapsbeoefenaren een gereedschap, maar zuivere wiskundigen zullen deze opvatting wat eenzijdig vinden. Zij kunnen zich bezighouden met wiskunde die (nog?) nergens toepassing vindt of waarvan niet een-twee-drie vaststaat dat die ooit betekenis zou kunnen krijgen als hulpmiddel, als gereedschap. Zij beoefenen wiskunde als *l'art pour l'art*, zoals een theoretische fysicus naar elektromagnetische velden kijkt zonder ook maar in de verste verten aan antennes en radiootjes te denken.

Anderzijds kan een bepaald stuk wiskunde inderdaad als gereedschap dienen voor een ander stuk wiskunde. Zo wordt de zogenaamde Hoofdstelling van de algebra² prachtig bewezen met resultaten uit de niet tot de algebra behorende theorie van de analytische functies.

Je stelt een directe vraag over het bestaan van de wiskunde, maar er komt geen direct antwoord, ben ik bang. Als wiskundigen spreken over het 'bestaan' van getallen, bedoelen zij dat zij getallen kunnen terugbrengen tot iets anders. In mijn eerste jaar analyse in Utrecht werd getoond hoe de reële getallen geconstrueerd konden worden met behulp van – zet je schrap – 'equivalentieklassen van Cauchy-rijen van rationale getallen'. Een mondvul, maar de essentie is dat reële getallen teruggebracht worden tot iets anders. En dat andere kennen de wiskundigen al. 'Eigenlijk' zijn reële getallen niets anders dan ...

Dit is echter niet wat filosofen onder 'bestaan' lijken te verstaan. Zoals je in je vraag aangeeft, zijn er mathematici die zich thuis voelen bij de beeldspraak dat iets geconstrueerd wordt door de menselijke geest en dat er niet van een voorafgaand bestaan kan worden gesproken. Bestond Australië in het jaar 1400? Voor de Aboriginals wel, voor de gemiddelde Hagenaar van toen zeker niet. Anderzijds, een superieure geest zoals ooit beschreven door de Franse wiskundige Pierre-Simon de Laplace zou zeggen dat Australië in 1400 bestond in objectieve zin. Kun je op zo'n manier ook tegen het bestaan van reële getallen aankijken? Ik voel me hier hoogst ongemakkelijk bij. Ik heb wel eens horen zeggen dat de muziek van Mozart 'direct uit de hemel' komt. Iets dergelijks zou je ook kunnen beweren van bepaalde stukken wiskunde. De theorie van de analytische functies is zo oogverblindend mooi dat je je als het ware niet kunt voorstellen dat dit puur en alleen mensenwerk is. Anderzijds zijn er ook stukken wiskunde waar het 'zwoegen' aan is af te zien. Je zou kunnen denken dat de eerste soort al 'bestaat' en alleen maar zichtbaar gemaakt moet worden, terwijl de tweede soort zuiver en alleen een menselijke uitvinding is. Ik houd beide uitdrukkingen voor zuivere beeldspraak. Als je het niet als beeldspraak ziet, dan maak je een probleem. Het gevaar is dat

je verstrikt raakt in allerlei discussies die meer met taal te maken hebben dan met een buitentalige werkelijkheid. Anders gezegd, we hebben dan te maken met een schijnprobleem. Ik geef toe dat daarmee deze discussie meteen doodgeslagen wordt, het is niet anders. Maar we kunnen het natuurlijk ook over schijnproblemen hebben ...



fig. 3 '[...] that what is called a mathematical discovery had much better be called a mathematical invention.' [WITTGENSTEIN, L., 1939]

NK: Ja, ja, ik had een zeker vermoeden dat je niet een eenvoudig antwoord zou geven als: 'Ik behoor voor honderd procent tot de tweede stroming, volgende vraag alstublieft.' Je laat je niet in een hokje duwen, dat zal ik voor je doen. Je combineert in feite de opvattingen van Ludwig Wittgenstein en Kurt Gödel. Wittgenstein, die ik verzuimde in mijn overzicht hierboven op te nemen, is van mening dat wiskunde wordt uitgevonden. Gödel staat in de traditie van het realisme van Plato. Hij beschouwt wiskundige objecten als 'werkelijke objecten, die onafhankelijk bestaan van onze definities en constructies'. Die objecten bestaan in een niet zintuiglijk waarneembare wereld. Echter, deze wereld is volgens Gödel een essentieel onderdeel van onze actuele wereld. Als je aanneemt dat de objecten van de wiskunde op een of andere manier bestaan, dan is het welhaast vanzelfsprekend dat je die objecten kunt ontdekken. Dat is inderdaad de overtuiging van Gödel. Wat Gödel betreft is er dus een wiskundige hemel, maar een die op aarde bestaat.

Wittgenstein en Gödel kun je beschouwen als twee tegenpolen. Alleen heeft Wittgenstein niets gepresteerd op wiskundig gebied, terwijl Gödel met zijn ontdekkingen de wereld op zijn kop zette. Wittgenstein noemde de stellingen van Gödel zelfs 'hocus-pocus'. Stel dat je nog nooit een penseel hebt vastgehouden. Je hebt nog nooit een eenvoudig stilleven geschilderd, en je verkondigt dat de schilderijen van Rembrandt niet zijn aan te zien, en dat Rembrandts opvattingen over kunst geen hout snijden! Op de ontdekkingen van Gödel kom ik later terug.

Als een stuk van de wiskunde – waar het zwoegen aan is af te zien – wordt uitgevonden, hoe verklaar je dan dat wiskundigen langs verschillende wegen dezelfde ontdek-

king doen, zoals twee sterrenkundigen – dit voorbeeld moet je aanspreken – dezelfde bestaande ster ontdekken. Zo ontdekte Gottfried Leibniz bijna gelijktijdig en onafhankelijk van Isaac Newton de differentiaal- en integraalrekening. Bovendien blijken verscheidene en tevens sterk verschillende stukken wiskunde vaak onderling verbonden te zijn. De Zwitserse wiskundige Leonhard Euler heeft een aantal ontdekkingen van dergelijke dwarsverbanden op zijn naam staan.

Een voorbeeld van zo'n verrassend dwarsverband is Eulers vergelijking $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, met $i = \sqrt{-1}$. Substitutie van $x = \pi$ geeft: $e^{i\pi} = -1$. Hier wordt het geometrisch domein waartoe π , de cosinus en sinus behoren, verbonden met het domein van de complexe getallen. Tevens constateer je zelf dat 'de Hoofdstelling van de algebra prachtig bewezen is met resultaten uit de theorie van de analytische functies'. Dat duidt toch op een hecht bouwwerk waarin constructies worden ontdekt die de delen van het bouwwerk met elkaar verbinden, kortom op bestaande wiskundige objecten.

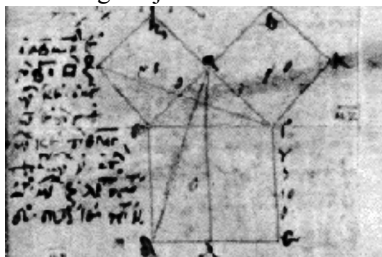


fig. 4 Euclides schreef zijn *Elementen* omstreeks 300 v. Chr., een veel-omvattende verhandeling over geometrie, verhoudingen, en de getallentheorie. De afbeelding toont propositie 47 uit boek I, de stelling van Pythagoras.

MN: Als twee wiskundigen van hetzelfde stelsel axioma's uitgaan, *kunnen* ze hetzelfde ontdekken. Maar dat hoeft niet. Je kunt je voorstellen dat er een tweede wiskundige is die van dezelfde axioma's uitgaat als de welbekende Euclides, maar die zich helemaal niet met driehoeken wenst bezig te houden. Hij zal de stellingen die betrekking hebben op driehoeken niet vinden, maar wat hij wel vindt is in ieder geval consistent met wat de bekende voorman van de meetkunde vond. Maar ook als deze tweede wiskundige zich wel met driehoeken bezighoudt, is het niet gezegd dat hij ontdekt wat Euclides wel heeft gevonden (bijvoorbeeld door gebrek aan aanleg komt hij maar niet op het idee dat de zwaartelijnen in een driehoek wel eens door een punt zouden kunnen gaan ...). Maar er geldt dus wel: er is consistentie tussen de vindingen van de beide heren.

De beroemde formule die je aanhaalt, verbindt twee werelden: die van de analyse en die van de meetkunde. Via een reeksontwikkeling kun je een formele definitie geven van de linkerkant van de formule (in het complexe vlak, maar dit terzijde) en van iedere term rechts. In dat geval is de formule een trivialiteit, MAAR ... Je moet dan nog bewijzen dat de functies 'sin' en 'cos' die je via reeksontwikkeling hebt gedefinieerd, overeenkomen met de in principe andere 'SIN' en 'COS' die je uit je middelbare schooltijd kent

als functies van hoeken, althans voor reëel argument. Dat deze dwarsverbanden te leggen zijn, betekent dat dezelfde mentale constructie meer dan één realisatie kent. Dezelfde wijn zit in verschillende flessen (geen zakken, svp).

Wiskundigen kunnen ook op een andere wijze verbanden leggen: ze kunnen op jacht gaan naar een overkoepelende structuur die verscheidene gebieden van de wiskunde in zich sluit. Zo kon Bernard Riemann een veralgemenisering vinden van de Euclidische meetkunde waarbij de afstandsfunctie tussen naburige punten niet via de stelling van Pythagoras wordt gegeven, maar door een wat algemenere vorm. In een klap werden daarmee de verscheidene niet-Euclidische meetkonden gevangen in één structuur.

Tijd voor wat stekeligheid. Ik heb niet de indruk dat alle filosofen een extreem uitgebreide wetenschappelijke achtergrond hebben, of dat zij goed beseffen wat wetenschapsbeoefenaren eigenlijk weten en kunnen. Ik heb Karl Popper ooit in een lang televisie-interview volstrekte trivialiteiten horen beweren ten aanzien van het niet kunnen bewijzen van hypothesen. Hij scheen te denken dat fysici halve debielen zijn die niet weten wat ze eigenlijk doen. Het was ergerlijk. Met veel aplomb debiteerde de wereldberoemde filosoof de ene trivialiteit na de andere en zijn ondervrager zat er slechts eerbiedig bij, zonder in hoongelach uit te barsten ... Gedurende mijn studie heb ik het woord 'waarheid' niet of nauwelijks in de mond horen nemen door mijn leermeesters. Men sprak wel van 'een adequate beschrijving' of iets in die geest. Natuurwetenschappers weten heel goed dat zij niet verder kunnen gaan dan dat. 'Waarheid' is een term die filosofen graag in de mond nemen, fysici kijken wel uit.

NK: Ik zal de 'waarheid' van Popper toelichten. Er zijn twee belangrijke, elkaar beconcurrerende, waarheidstheorieën, de coherentietheorie en de correspondentietheorie. Volgens de coherentietheorie is een uitspraak waar als deze past in het geheel van alle uitspraken die ik voor waar aanneem. Door het toevoegen van de nieuwe uitspraak aan de door mij reeds geaccepteerde uitspraken wordt de coherentie van het geheel behouden of zelfs versterkt. Volgens de correspondentietheorie is een uitspraak waar als die in overeenstemming is met de feiten. Kort gezegd: het ijkpunt voor de coherentietheorie zit in mijn hoofd, en dat ijkpunt voor de correspondentietheorie ligt in de wereld.

In zijn boek over wetenschapsfilosofie³ heeft Popper geen gebruik gemaakt van de termen 'waar' en 'onwaar'. De logicus Alfred Tarski definieert, in navolging van Aristoteles, waarheid als: correspondentie met de feiten. Nadat Popper in 1935 Tarski ontmoet in de Volksgarten in Wenen, aarzelt Popper niet langer de woorden 'waar' en 'onwaar' te gebruiken. Als Popper zegt dat een theorie 'waar' is, dan geeft de theorie dus een adequate beschrijving van de fysieke verschijnselen. Het is een kwestie van woorden en definities. Popper is van mening dat de natuurwetenschappen steeds dichterbij 'de waarheid' komen: de beschrijvingen van de natuur worden steeds beter.⁴

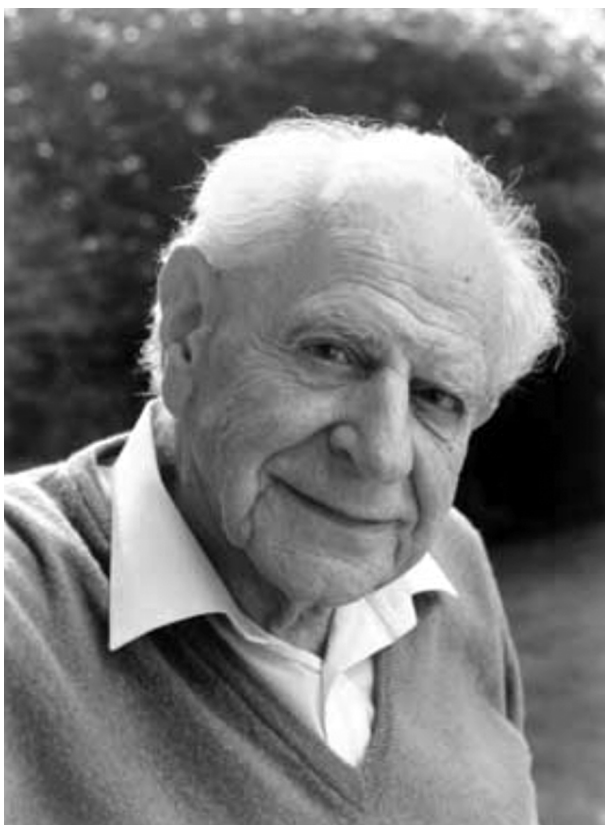


fig. 5 Karl Popper



fig. 6 Ook Kurt Gödel (rechts op de foto) ontmoet in 1935 Alfred Tarski in Wenen

Traditioneel noemt men solide theorieën over de natuur ‘wetten’. Ook weer zo’n term met een lange geschiedenis. ‘Wetten’ suggereert dat er een macht (God) deze wetten uitvaardigt en dat de natuur deze wetten gehoorzaamt. In 1964 publiceert Gödel een artikel over een wiskundig probleem.⁵ Hij maakt een vergelijking tussen zintuiglijke waarneming en, wat hij noemt een ‘wiskundige intuïtie’ van objecten die we kennen uit de verzamelingenleer. Bij deze intuïtie ervaart hij dat ‘de axioma’s zich als waar opdringen’. Hij ziet niet in waarom wij minder vertrouwen zouden hebben in wiskundige intuïtie dan in zintuiglijke waarneming. Heb jij ook zoveel vertrouwen in je wiskundige intuïtie?

MN: Axioma’s zijn in mijn optiek niet ‘waar’. Een stelsel van axioma’s kun je naar willekeur samenstellen. Oké, Axioma’s mogen niet contradictoir zijn, dat is dan een harde eis. Maar verder mag je je pakket samenstellen zoals je zelf wilt. Een heel andere kwestie is of een ‘pakketje axioma’s’ ook interessant is. Daarvoor heb je intuïtie nodig. De negentiende-eeuwer Riemann had de intuïtie dat zijn definitie van het lijnelement aanleiding zou geven tot interessante wiskunde, ‘bruikbaar’ in een zeer ruime betekenis van het woord. Hij had gelijk. Ik heb geen idee hoeveel mislukte pogingen er zijn gedaan door wiskundigen om een leuk setje axioma’s bijeen te rapen. Een groot ‘ontwerper’ als Riemann had kennelijk een fijne neus voor wat een ‘waardevol’ nieuw axioma is, in dit geval in de meetkunde. Overigens, het parallellenaxioma uit de vlakke meetkunde heeft men tot in de achttiende eeuw proberen af te leiden uit de andere axioma’s. Men dacht dat er geen andere meetkunde kon bestaan dan die waarin door een punt P buiten een lijn l precies een rechte m te vinden was die evenwijdig loopt aan de eerste lijn l . Toen later uitgewerkte niet-Euclidische meetkunden werden gepresenteerd bleek dat het parallellenaxioma niet uit de andere volgt en er ook niet strijdig mee is.

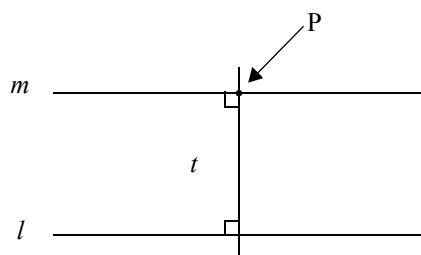


fig. 7 Euclides stelt dat door een punt niet op een gegeven lijn één lijn kan worden getrokken parallel aan de gegeven lijn.



fig. 8 Aan het begin van de negentiende eeuw wordt een niet-Euclidische geometrie het eerst ontdekt door Bolyai (linker foto), een Hongaar, en onafhankelijk door Lobachevsky (midden), een Rus. Zij postuleren dat door een punt niet op een gegeven lijn oneindig veel lijnen kunnen worden getrokken parallel aan de gegeven lijn. Deze niet-Euclidische variant staat bekend als de hyperbolische geometrie. Later modificeert Riemann (rechts) het parallel postulaat op een andere manier. Door een punt niet op een gegeven lijn helemaal geen lijn kan worden getrokken parallel aan de gegeven lijn. Deze niet-Euclidische variant staat bekend als elliptische geometrie.

NK: Je hebt meen ik eenzelfde visie over axioma’s als Henri Poincaré. Die schreef in 1902: ‘De meetkundige axioma’s zijn noch [...] intuïties, noch experimentele fei-

ten. Het zijn conventies. Onze keuze tussen alle mogelijke conventies wordt geleid door experimentele feiten; maar het blijft vrij, en wordt alleen beperkt door de noodzaak van het voorkomen van elke tegenspraak.'

Hiervoor typeerde je de zuivere wiskunde als 'een die nog (?) nergens toepassing vindt'. In de praktijk blijkt telkens dat allerlei wiskunde, die aanvankelijk niet meer dan Spielerei was, een toepassing vindt. Volgens Nicolai Lobachevsky, die ook aan het parallellenaxioma sleutelde, is er 'niet één tak van de wiskunde, hoe abstract ook, die niet op zekere dag kan worden toegepast op de fenomenen van de materiële wereld'. De vrijheid bij het kiezen van axioma's wordt in feite beperkt tot de axioma's die je zelf als 'waardevol' omschrijft. De andere komen gewoon niet in aanmerking. De axiomakeuze van Riemann is daar een goed voorbeeld van. Albert Einstein had, naar eigen zeggen, de Algemene Relativiteitstheorie niet kunnen ontwikkelen zonder de meetkunde van Riemann. Het parallelaxioma van Euclides is correct voor aardse afstanden. Het parallelaxioma van Riemann maakt de meetkunde geschikt voor afstanden op interstellaire schaal. Het betreft dus een verbetering, een uitbreiding van Euclides' axioma.

Als Gödel het heeft over de objecten van de verzamelingenleer, redeneert hij van de abstracte naar de fysieke wereld: 'Een wiskundige uitspraak zegt niets over de fysieke wereld, want die uitspraak is al waar door de betekenis van de termen die erin zitten'. Bij meetkunde redeneert hij net de andere kant op, van de fysieke wereld naar de abstracte wiskundige wereld. In 1973 spreekt Gödel met Marvin Greenberg over meetkunde. Gödel vertelt aan Greenberg: 'Meetkundige intuïtie is, strikt gesproken, niet een wiskundige, maar eerder een [...] fysische intuïtie. In zuiver wiskundig opzicht is onze Euclidische intuïtie van de ruimte volmaakt correct, het representeert namelijk correct een zekere structuur die bestaat in het rijk van wiskundige objecten. Zelfs fysiek is het correct 'op kleine schaal'. Dus de axioma's die 'bestaan' en 'waar' zijn in het abstracte wiskundige domein passen op de materiële wereld. Hij noemt dit 'leuke setjes axioma's'.

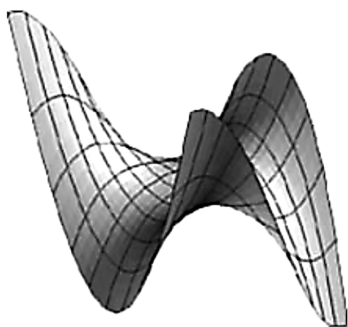


fig. 9 De hyperbolische geometrie kan het best gevisualiseerd worden aan de hand van het oppervlak van een zadel. Dit oppervlak heeft een negatieve kromming. Op zo'n zadeloppervlak is de omtrek van een cirkel meer dan $2\pi r$. Door een punt niet op een gegeven lijn kunnen meerdere lijnen parallel aan de gegeven lijn worden getrokken. Hier is de som van de hoeken van een driehoek kleiner dan 180° .

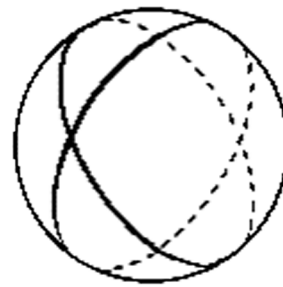


fig. 10 De elliptische geometrie kan het best gevisualiseerd worden aan de hand van het oppervlak van een bol. Dit oppervlak heeft een positieve kromming. Rechte lijnen worden opgevat als grote cirkels over het oppervlak van de bol. De beschouwde ruimte is eindig, een lijn heeft een maximale lengte. Het is eenvoudig in te zien dat lijnen niet parallel kunnen lopen. Alle grote cirkels snijden elkaar niet één, maar twee keer. De som van de hoeken in een driehoek is groter dan 180° . De omtrek van een cirkel is minder dan $2\pi r$.

MN: Je ziet dat je de verschillende soorten meetkunde kunt opvatten als even zo vele intellectuele mogelijkheden, Spielereien. Ik bedoel dit uiteraard niet denigrerend. In de natuurkunde worden sommige van deze mogelijkheden bij benadering gerealiseerd. Je zou kunnen zeggen dat je 'wiskundige' meetkonden hebt en 'fysische'. De vlakke meetkunde van Euclides geeft een afdoende beschrijving voor meetkundige kwesties in huis, tuin en keuken. De boldriehoeksmetkunde is de te gebruiken meetkunde als je de meetkundig kortste vliegafstand tussen Tokio en Wenen wilt berekenen. En in de Algemene Relativiteitstheorie gebruik je een Riemannse meetkunde waarbij de materie zelf in het geweer komt.

Je ziet dat ik boven zinsneden heb gebruikt als 'afdoende beschrijving' en 'bij benadering gerealiseerd'. Op het moment dat een van de ontworpen meetkonden wordt gebruikt in de fysica moet bezien worden in hoeverre de aan die meetkunde ten grondslag liggende axiomata een goed model vormen voor de materiële wereld. Spielerei is ernst geworden.

NK: De wiskunde levert een beschrijving van abstracte structuren. Volgens Gödel draait het bij zo'n beschrijving uiteindelijk om begrip van de gebruikte wiskundige uitspraken. Als de betekenissen van wiskundige uitspraken goed worden verhelderd, dan worden deze uitspraken vanzelfsprekender. De verheldering kan niet tot stand worden gebracht door het geven van expliciete definities, waarbij begrippen in termen van andere begrippen worden gedefinieerd. We hebben een verheldering van de betekenis nodig die geen beroep doet op andere, uiteindelijk ongedefinieerde uitspraken. De methode voor deze verduidelijking vindt Gödel in de fenomenologie van Husserl. Welke methode gebruiken wiskundigen om tot inzicht en begrip te komen?

MN: In het voorwoord van een alleraardigst inleidend boek over kansrekening schrijft de inmiddels overleden

Utrechtse wiskundige Hans Freudenthal¹⁶ dat een bewijs van een wiskundige stelling ‘veelal het enige middel is om te weten te komen wat er met een stelling is bedoeld’. Het bewijs is onderdeel van het wiskunstig spel en ook nog eens een manier om de stelling nader tot de lezer te brengen. Als een stelling wordt toegelicht, bijvoorbeeld op college, is het bepaald zinnig om expliciete voorbeelden te geven, dat wil zeggen beeldende, pakkende speciale gevallen. Begrip wordt aangekweekt door voorbeelden aan te reiken en die in alledaagse taal toe te lichten. Hier is sprake van verheldering buiten strikt wiskundig handelen om; de wiskundige wordt als het ware handtastelijk. In leerboeken vind je deze benadering zelden en in handboeken al helemaal niet. Resultaten, stellingen uit deze boeken lijken uit de lucht te vallen, maar de ontdekkers zijn vast heel erg informeel met hun object van onderzoek omgegaan voordat zij de stellingen abstract vorm gaven.

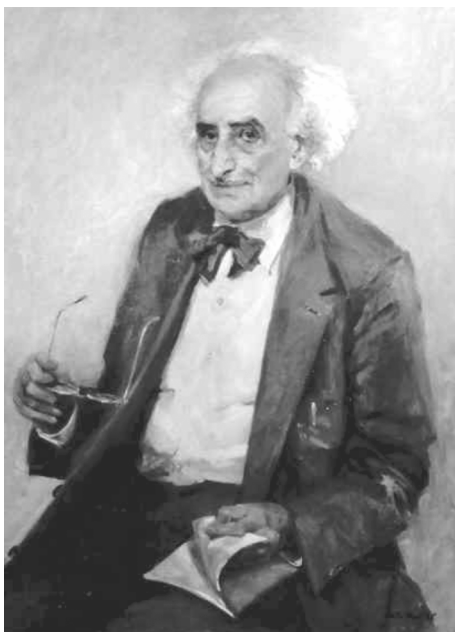


fig. 11 Hans Freudenthal

NK: De natuurkunde is een inductieve wetenschap. Als een theorie wordt ondersteund door een experiment, dan wordt aangenomen dat deze theorie juist is. Het aantal waarnemingen in een experiment is beperkt, de inductieve methode levert altijd een uitkomst met een bepaalde onzekerheid. De proef van Millikan is een experiment om de elektrische lading van een elektron te bepalen. Hoeveel experimenten men ook uitvoert, nooit zal men vast kunnen stellen dat alle elektronen deze lading bezitten. Dat lukt niet met eindige middelen. Daar durf ik voor een zak wijn om te wedden. In de natuurkunde wordt een theorie aangehouden zolang ze bruikbare voorspellingen oplevert en anders wordt ze aangepast of afgedankt. Wiskunde is een deductieve wetenschap. Hier immers worden stellingen niet gerechtvaardigd langs de weg van experimenteel onderzoek, maar bewezen op grond van afleidingen. Een mooi voorbeeld is het Vermoeden van

Goldbach. Wiskundigen zijn gaan experimenteren en hebben in 1998 Goldbachs Vermoeden bevestigd tot 4.10^{14} . Als het Vermoeden van Goldbach betrekking zou hebben op een natuurkundig verschijnsel zou men, op basis van een dergelijk experiment, spreken van de Wet van Goldbach. Wiskundigen rusten niet tot een deugdelijk bewijs kan worden afgeleid. Waarom verlangen wiskundigen absolute zekerheid? Overigens zou ik van zo'n fraai vermoeden een eenvoudig en elegant bewijs verwachten.

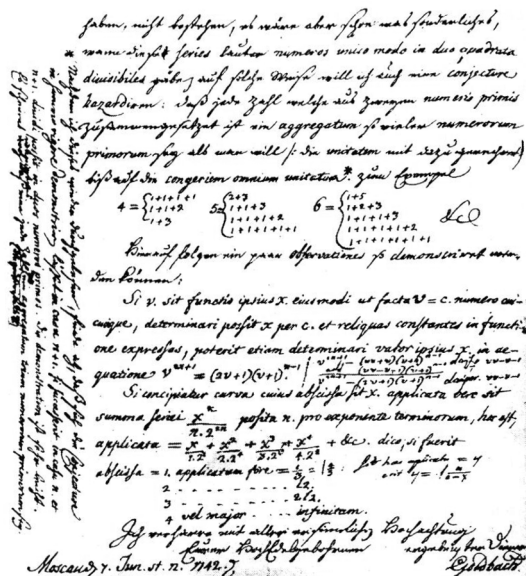


fig. 12 Christian Goldbach formuleert zijn Vermoeden, dat elk even getal groter dan twee de som is van twee priemgetallen, in een brief aan Euler van 1742. In de marge van de brief schrijft hij zijn vermoeden dat elk getal groter dan twee de som is van drie priemgetallen: ‘Es scheint wenigstens, daß eine jede Zahl, die größer ist als 2, ein aggregatum trium numerorum primorum sey.’

MN: De intellectuele bezigheid die door Simon Stevin ‘wisconst’ is gedoopt, wil juist een bewijs leveren via de logica, alleen de logica. Het is de kunst, het spel, de sport. Vanuit meer praktisch oogpunt wil je voor eventueel later gebruik van een wiskundig resultaat dat dat resultaat ook echt ‘staat’. Stel je eens voor dat een stelling (zogenoemd) bewezen wordt die later plots onjuist blijkt. Waar is de fout gemaakt? Bij het ‘bewijs’ van de stelling zelf, of misschien ergens in de fundamenteen, twintig stellingen terug, zeg maar? Door een hoge mate van gestrengheid te eisen en geen ‘experimentele’ resultaten toe te laten kun je een eventuele fout beter lokaliseren. Gestrengheid kan in verschillende disciplines trouwens telkens wat anders betekenen. Een ingenieur, een fysicus en een wiskundige staan bij een weiland. Zij zien alle drie een beest in de wei staan. Zegt de ingenieur: ‘Er lopen rode koeien in de wei.’ De fysicus riposteert: ‘Er loopt een rode koe in de wei.’ De mathematicus tenslotte antwoordt: ‘Er staat een koe in de wei die aan zijn rechterzijde rood is.’ Nog even naar het Vermoeden van Goldbach. Als wiskundigen getracht zouden hebben om het vermoeden te

testen tot iets van de orde van 10^{14} is dat knap krankzinnig. Ik geloof eerder dat enkele computerfreaks dit hebben gedaan, geen wiskundigen. De laatste categorie heeft niet dit, naar mensenmaat geweldig grote, aantal nodig om vertrouwen te krijgen in een mathematisch vermoeden. Want alleen daar gaat het hier om. Hoe dat vertrouwen ontstaat? Misschien moet je daarvoor eens met een psycholoog gaan praten. Wanneer gaan mensen geloven dat iets waar is? Misschien moet deze vraag toegespitst worden op een wiskundige en fysische context. Tenslotte zijn mensen – mathematen en fysici inclusief – buiten deze context bereid om heel veel ‘zomaar’ te geloven, bijvoorbeeld omdat ze als kind zijn geïndoctrineerd ... Hm, indoctrinatie ...

NK: Ook de filosoof die langs de wei staat doet een duit in het zakje. Hij constateert dat de uitdrukking ‘een waarheid als een koe’ op een categoriefout⁷ berust.

De Hongaarse wiskundige Imre Lakatos is van mening dat wiskunde een inductieve wetenschap is. Hij heeft de geschiedenis van het Descartes-Euler-vermoeden onderzocht. In de loop van de geschiedenis werd dit vermoeden bij herhaling bevestigd en weerlegd. Lakatos past de kenistheorie van Popper toe op de wiskunde. Wiskunde is in de geschiedenis van de wetenschap altijd ten voorbeeld gesteld als het domein van zekerheid. In een bewijs, meent Lakatos, wordt een bepaald vermoeden ingebed in geaccepteerde achtergrondkennis. Wie een bewijs levert legt alleen een verband tussen de te bewijzen stelling - het vermoeden - en de achtergrondkennis. Ook in de wiskunde kunnen we onze vermoedens slechts verbeteren door de punten te zoeken waar zij in strijd komen met de achtergrondkennis. Lakatos gaat er van uit dat wiskundige uitspraken feilbaar en voor verbetering vatbaar zijn.⁸ Als wiskunde een inductieve wetenschap is, hoe zit het dan met de wiskunde ‘uit de hemel’?



fig. 13 *‘The logical theory of mathematics is an exciting, sophisticated speculation like any other theory. It is an empiricist theory and thus if not shown to be false, will remain conjectural for ever.’ [LAKATOS, I., 1962]*

MN: Wat een bewijs is, is zeker niet tijdsonafhankelijk. In de achttiende en negentiende eeuw werd in een ‘bewijs’

wel eens gebruik gemaakt van kennis buiten de wiskunde. De huidige wiskundige loopt rood aan wanneer zoiets gebeurt. Terecht. Maar zelfs de hele groten uit de achttiende eeuw deden wel dingen waarbij thans het rode potlood driftig gehanteerd zou worden. Men aanvaardt nu, zo lijkt het in elk geval, minder dan toen.

Het leveren van een bewijs moet je trouwens echt leren. In het eerste en tweede jaar abstracte analyse in Utrecht werd de aanstaande wiskundige of theoretische (astro)fysicus door de mangel gehaald. Wie, zoals ikzelf, zijn middelbare schoolwiskunde had gedaan met twee vingers in de neus werd even op zijn nummer gezet: slordigheid werd wreed gestraft. De docenten hadden natuurlijk gewoon gelijk met hun onverbiddelijke eis tot grote nauwgezetheid en ik heb er een houding van aangeleerd die ik als onderzoeker goed kan gebruiken. Tenslotte bevind je jezelf aan het onderzoeksfront in een soort niemandsland. Er is niemand die je bij het handje houdt. Je bent je eigen gids en je eigen rechter, in elk geval tot het moment dat je je wetenschappelijke artikel bij een tijdschrift inlevert ...



fig. 14 Kurt Gödel, ook wel ‘de Einstein van de logica’ genoemd, hier gefotografeerd onder huiselijke omstandigheden.

NK: Ik bracht Gödel hiervoor een paar maal ter sprake. Dat is niet toevallig, want ik ben op zijn theorie afgestudeerd.⁹ In 1929 promoveert Gödel. In zijn proefschrift geeft hij het bewijs van de volledigheid van een deel van de logica.¹⁰ Hij toont aan dat alle uitspraken die uit deze logica zijn af te leiden waar zijn, en omgekeerd, dat alle uitspraken die waar zijn afleidbaar zijn. Dit bewijs heet de volledigheidstelling. Na zijn promotie krijgt Gödel een essay van Thoralf Skolem in handen dat gepubliceerd was in 1922. Skolem geeft in dit essay, bij een verbetering aan Löwenheims werk, een lemma aan dat de sleutel vormt tot het bewijs van de volledigheidstelling. De resterende stap is in feite een trivialiteit. Hoe komt het dat Skolem dit niet heeft ingezien?¹¹ Skolem heeft een andere filosofische opvatting dan Gödel. Aan Hao Wang schrijft Gödel in 1967 dat zijn filosofische visie het hem makkelijk maakt wiskundige theorema’s te ontdekken: ‘Het was ook fundamenteel voor mijn overige werk in de logica.’ Voor Gödel is zijn filosofische opvatting van be-

lang voor zijn wiskundige werk. Welke rol speelt de filosofie bij je dagelijkse werk?

MN: Als je onderzoek doet, heb je een bepaalde houding, die voortvloeit uit wat je van belang vindt. Je zou dat filosofie kunnen noemen. Ik ben geneigd heel veel waarde te hechten aan algemene theoretische overwegingen. Binnen de statistiek ben ik een fervent aanhanger van de Bayesiaanse School. Statistische uitspraken moeten geheel op de waarschijnlijkheidsrekening gebaseerd zijn en mogen wat mij betreft geen ad-hoc elementen bevatten. Het zou hier te ver voeren om duidelijk te maken wat de verschillen zijn met de klassieke statistiek die uit het begin van de vorige eeuw stamt. Voor de huidige discussie is alleen van belang dat ik op algemene gronden sterk de voorkeur geef aan het Bayesiaanse gedachtegoed waar dat een rol speelt ... en daarnaar handel.

NK: Met behulp van formules worden in een wiskundige taal de structuren beschreven. Brouwer spreekt van 'een taal die de wiskunde begeleidt.' Er is volgens Brouwer 'ook voor zuivere wiskunde geen zekere taal'. Gödel stelt dat de wiskundige wereld complexer en sterker is dan wiskundige taal. Deze taal geeft een ware, maar incomplete beschrijving van de wiskundige werkelijkheid. Volgens Wittgenstein kan alleen de eerste orde logica in taal worden uitgedrukt, voor de overige wiskunde is de taal niet toereikend. Heerst er onder wiskundigen ook zo'n opmerkelijke overeenstemming over de wiskundige taal?

MN: Ik kan hier alleen maar met een zeer laag bij de grondse reactie komen die geen vol antwoord is op jouw vraag. Als ik wel eens iets aan anderen moet uitleggen ben ik geneigd mijn handen zeer nadrukkelijk te gebruiken. Ik word bij het uitleggen handtastelijk. Dat is al eerder aan de orde geweest trouwens. Dat uitleggen gebeurt in huis-tuin-en-keuken Nederlands en die taal is voor de wiskunde niet precies genoeg. Jargon is dan ook niet voor niets gevormd in de loop van de tijd en uiteraard geldt dat voor alle gespecialiseerde bezigheden. Kees Andriess die ik ken van de tijd dat hij in Groningen bij Ruimteonderzoek, en ik aldaar bij Sterrenkunde werkte, vertelde me ooit dat hij er wel enkele jaren over had gedaan om vanuit een ingenieursachtergrond het sterrenkundige jargon aan te leren, met alles wat daar achter steekt. Dat laatste is wezenlijk. Er zitten achter jargon veronderstellingen die de buitenstaander niet kent. Die worden ook zelden geëxpliciteerd door de gebruikers: je hebt juist jargon om dat niet te hoeven doen. In elk begrip zit het een en ander aan kennis en veronderstellingen verborgen. Dat de taal in haar uiterste ontvouwing te zwak zou zijn voor de wiskunde is speculatie. Kun je mentale constructies bedenken waarover je niet meer kunt praten? Hoe communiceer je dan met je vakgenoten? Kun je veralgemeniseren bedenken die zich onttrekken aan de taal waarin de lagere concepten nog wel te vangen zijn? Hoe komt dat dan? Als je over je mentale constructies niet

kunt spreken is het vast en zeker tijd voor een dosis wantrouwen.

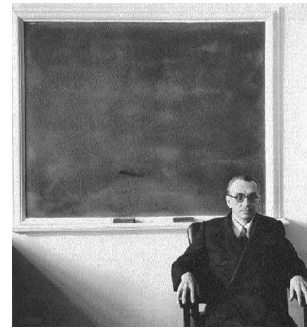


fig. 15 Kurt Gödel

NK: De beroemdste prestatie van Gödel is de zogenaamde eerste onvolledigheidstelling. Deze toont aan dat ieder formeel wiskundig systeem dat een greintje rekenkunde bevat onvolledig is: er zullen altijd ware uitspraken bestaan die binnen het systeem, hoe uitgebreid ook, noch bewijsbaar noch onbewijsbaar zullen zijn. Merk je iets van de gevolgen van deze stelling in de wiskundige praktijk?

MN: Ik heb geen idee wat de zuivere wiskundige in zijn onderzoekingen al of niet merkt van de genoemde stelling. In de wereld van de toegepaste wiskunde¹² merk je hier volgens mij helemaal niets van. Mijn vermoeden is dat de uitspraken die in de categorie niet-bewijsbaar/niet-weerlegbaar vallen enigszins (understatement) gekunsteld zullen zijn. Kijk maar eens naar het bewijs van de stelling zoals dat (aangepast voor leken, zonder twijfel) weergegeven is in het boek *Gödel, Escher, Bach an eternal golden braid* van Douglas R. Hofstadter. Maar dat vermoeden glashard onderbouwen, kan ik niet ...

Manuel Nepveu, Nico Krijn, TNO, Utrecht

Noten

- [1] De wiskundige-logicus Gottlob Frege legde de grondslagen en de logicus-filosoof Bertrand Russell werkte het programma samen met Alfred North Whitehead verder uit in het *Principia Mathematica* van 1910.
- [2] Iedere n -de graads vergelijking heeft een oplossing in de reële of complexe getallen.
- [3] *Logik der Forschung*, Wenen, 1935
- [4] In filosofisch jargon: een convergerend realisme.
- [5] *What is Cantor's continuum problem?*, 1964
- [6] Hans Freudenthal 1905–1990
- [7] Een abstract object wordt vergeleken met een fysiek. Rudolf Carnap gaf als voorbeeld: Ceasar is een priemgetal.
- [8] Wie zich vastklampt aan het traditionele 'Euclidische ideaal' van wiskundige kennis, moet veel producten van wiskundige arbeid afwijzen. Het wiskundige

werk van Newton bijvoorbeeld, mag dan niet tot de wiskunde worden gerekend omdat diens formulering van de differentiaalrekening niet voldoet aan de eisen die we er nu aan stellen.

[9] In 2001, over de wiskundige epistemologie van Kurt Gödel.

[10] De propositiologica en de eerste orde predikaatlogica.

[11] Kennelijk omdat algemene semantiek over (wille-

keurige) oneindige domeinen voor hem, als finitist, niet in aanmerking kwam voor de grondslagen van de wiskunde. Onder invloed van David Hilberts programma was er een algemene tendentie infinitaire methoden niet in de metamathematica toe te laten.

[12] Het Engelse ‘applied mathematics’ hangt in tussen wiskunde en fysica en wordt niet echt gedekt door wat men in Nederland ‘toegepaste wiskunde’ noemt.