

Wiskunde wordt door buitenstaanders gezien als een rationeel vak gespeend van emoties. Als men al een voorstelling van wiskundigen heeft, dan die van robotachtige wezens die dag in dag uit moeilijke sommen 'uitrekenen'. Maar is wiskunde een emotioneel vak? Zijn wiskundigen computerachtige rekenaars? Evelien Bus schreef een scriptie waarin zij zeventien wiskundigen ondervroeg naar hun emoties bij het doen van wiskunde, het uitgangspunt van dit artikel van **Evelien Bus** en **Chris Zaal**.

Wiskunde en emotie

'Es gibt keine wissenschaftliche Entdeckung von Formaten, die nicht von Emotionen begleitet ist. Es gibt keine echte Motivation ohne Emotion.'

Martin Wagenschein (1896-1988), Verstehen lehren.

In de televisieserie *Star Trek* is Dr. Spock, herkenbaar aan zijn puntige oren, een van de bemanningsleden van het ruimteschip *Enterprise*. Spock – half-mens, half-*Vulcan* – is het archetypische voorbeeld van een puur rationeel redenerende wetenschapper. Regelmatig heeft hij meningsverschillen met zijn vriend en gezagvoerder Captain Kirk. Die laatste denkt en handelt als een mens van vlees en bloed: emotioneel, soms boos, soms angstig, maar altijd creatief. Dr. Spock weet daar lang niet altijd raad mee: *'I am not capable of that emotion,'* is meer dan eens zijn reactie.

Wiskundigen en wiskundeleraren hebben dan wel geen puntoren, de media en de kunsten beelden hen bij voorkeur af als gevoelloze wezens. Na het lezen van een aantal romans over wiskundigen constateerde Ferdinand Verhulst dat er met elk van hen iets aan de hand is: ze zijn bezeten van wiskunde, sociaal onhandig, vreemd of randpsychotisch (Verhulst, 2001). Aad Goddijn verzamelde literaire fragmenten waarin wiskundeleraren figureren. Zijn bevinding is dat 'dorheid en arrogantie nog de minste van hun ondeugden zijn' (Goddijn, 1995).

Uit een Amerikaans onderzoek, waarin bijna vijfhonderd twaalfjarige kinderen uit de Verenigde Staten en West Europa gevraagd werden een wiskundige te tekenen, blijkt dat dit soort beelden ook bij kinderen leven (Picker & Berry, 2001). Wiskundigen zijn onverzorgde, dwaze, gespannen mannen, soms met speciale krachten. Wiskundeleraren kunnen geen orde houden en gebruiken intimidatie of geweld om de stof over te brengen.

Houden wiskundigen zich bezig met een gevoelloos vak en zijn ze daarom zelf ook een soort computers geworden? Voor Evelien Bus, die in Utrecht wiskunde heeft gestudeerd, vormde het ontbreken van communicatie over de gevoelsmatige aspecten in de wiskundebeoefening een bron van frustratie. Voor haar afstudeeronderzoek heeft zij daarom een aantal Nederlandse wiskundigen ondervraagd naar hun beleving van het doen van wiskunde (Bus, 2004).

Aha!

'Op de kleuterschool had ik mijn eerste Aha-Erlebnis' zegt Henk Barendregt in de scriptie van Evelien Bus. 'Mijn vader had me het optellen van getallen bijgebracht. Toen leerden we op school rekenen met de duizendkist, waarin eenheden kraaltjes zijn, tientallen staafjes, honderdtallen plaatjes en duizendtallen kubussen van kralen. Je mag tien losse kralen wisselen voor een staafje, enzovoorts. Opeens begreep ik waarom die algoritmische manier van optellen, waarbij je moet onthouden, klopte.'

'Aha-Erlebnissen zijn topervaringen,' vervolgt Barendregt, in Nijmegen hoogleraar in de grondslagen van de wiskunde en informatie. 'Ik streef ernaar om er elke dag één te hebben. Ze geven ons beslist endorfinen, opiumachtige stoffen in het brein. In de liefde heb je soortgelijke ervaringen: als je verliefd bent, of als je een orgasme beleeft. In de kunst heb je ze, bijvoorbeeld als je muziek prachtig vindt. In de religie heb je ze, in de mystiek. Ik vind het ook heel leuk om een Aha-Erlebnis over te dragen op studenten of collega's. Ik zie aan de ogen van mensen of dit is gelukt.'

De geschiedenis van de wiskunde en de natuurwetenschappen levert tal van beroemde voorbeelden van Aha-Erlebnissen: Archimedes in bad, Leonardo da Vinci's ideeën over vliegen, Albert Einsteins visioen te rijden op een lichtstraal. Er is veel over geschreven. De Franse wiskundige Henri Poincaré wijdde een essay aan het ontstaansproces van wiskundige ontdekkingen (Poincaré, 1908), Hadamard besteedde er zelfs een heel boek aan (Hadamard, 1945).

De Aha-Erlebnis is een emotie waarin tijd en geheugen een welbepaalde rol spelen. Een wiskundige ontdekking kent volgens Hadamard vier stadia: initiatie, incubatie, illuminatie en verificatie (Hadamard, 1945). De initiatie is de fase van de bewuste worsteling met een probleem, in de incubatieperiode 'suddert' het probleem in het onbewuste. De illuminatie is het Aha!-moment. Daarna volgt de technische verificatie.

Een Aha-Erlebnis combineert dus cognitieve elementen (bewuste of onbewuste gedachten) met gevoelens (een

gevoel van inzicht). Bij een Aha-Erlebnis passen ook gebaren: met de hand tegen het voorhoofd slaan, of het heffen van de armen. Deze drie aspecten – gedachten, gevoelens en gebaren – komen voor in elke emotie.

Vreugde, angst, woede en verdriet zijn de meest bekende emoties. Naast deze vier basisemoties noemt Nico Frijda in zijn standaardwerk over emoties vele andere gemoedstoestanden (Frijda, 1988). Daaronder ook: belangstelling, nieuwsgierigheid, concentratie, inspanning, opwinding, wanhoop, opluchting en tevredenheid. Dit rijtje van emoties komt bij wiskundebeoefening veelvuldig voor, zo blijkt uit het afstudeeronderzoek van Evelien Bus.

De woorden emoties, gevoelens, ervaringen, belevingen worden in het dagelijks leven vrijelijk door elkaar gebruikt. In zijn laatste boek brengt neuroloog Antonio Damasio een hiërarchische ordening in deze begrippen aan (Damasio, 2003). Woede is primaire emotie, ergernis is reeds een subtieler gevoel en een Aha-beleving is een nog veel complexere gemoedsbeweging. Damasio schetst een zich vertakkende boom van neurologische processen: van primitieve reflexen via pijn- en ontsnappingsreacties, driften en emoties naar complexe gevoelens. Hoe meer terugkoppeling optreedt met bewustzijn en geheugen, hoe complexer, hoe fijner vertakt de emotie.

In de interviews uit het afstudeeronderzoek worden wiskundigen gevraagd naar hun belevingen en ervaringen in de beroepsuitoefening. In de verhalen die dat oplevert, komen vanzelf emoties en gevoelens naar voren. In het vervolg van dit artikel maken we daarom niet echt onderscheid tussen emoties, gevoelens, belevingen en ervaringen.

Zwoegende en zwevende wiskundigen

‘Misstrauen erweckt, besonders bei Mathematikern das Wort Erlebnis. Jeder wirkliche Mathematiker, der produktiv bei seiner Sache ist, hat es und kennt es, er redet bloss nicht darüber.’

Martin Wagenschein (1896-1988), Verstehen lehren.

In de psychologie is het een bekend gegeven dat emoties als woede, angst en hoop het rationeel denken kunnen beïnvloeden. ‘Onder invloed van emotie kan men gaan geloven in de doelmatigheid van handelingen waarvan men onder andere omstandigheden in het geheel niet overtuigd zou zijn,’ schrijft Frijda. ‘Men kan spreken van een toename van regressieve denkwijzen onder druk van emoties. Bij angst of onzekerheid viert het bijgeloof hoogtij. Mensen leggen geloften af dat ze van alles en nog wat zullen doen als ze voor dat examen slagen, of voor die baan worden aangenomen.’ (Frijda, 1988). Bij het wiskundig redeneren kunnen emoties daarom beter buiten schot blijven. Emoties zijn niet alleen irrelevant, ze zijn zelfs contraproductief.

Over de beleving van wiskunde en de bijbehorende emoties spreken beroepswiskundigen niet, zegt Martin Wagenschein (zie het citaat). Staan ze er ook wantrouwig te

genover? Dat lijkt wel mee te vallen. In het afstudeeronderzoek van Evelien Bus spraken de geïnterviewden ronduit over hun beleving van wiskunde. Vrijwel allemaal zeiden ze het een bijzonder interessant onderwerp te vinden en reikhalzend uit te kijken naar de verhalen van collega’s.

Voor alle geïnterviewden is het oplossen van een probleem een gevoelsmatig hoogtepunt. ‘Als ik een goed idee krijg, leun ik achterover en sla ik mezelf op de borst,’ zegt Mark Peletier in de afstudeerscriptie. Sara van de Geer: ‘Als ik voel dat de oplossing dichtbij is, kan ik haast nergens meer aan denken. Als het uiteindelijk klopt, is het feest. Dan voelt het of ik de hele wereld aankan.’ Sommigen voelen zich trots, bij anderen suizen de liefdeshormonen door het bloed bij het krijgen van een Aha-Erlebnis. Jozef Steenbrink: ‘Als je opeens ziet hoe iets in elkaar zit, ontstaat er een groot geluksgevoel. Dat is te vergelijken met een heel ernstige verliefdheid’

Een onderzoeksdoorbraak komt spaarzaam voor. Wiskundig onderzoek doen is daarom negenenennegentig procent transpiratie en één procent inspiratie, zeggen de geïnterviewden. Dat vindt niet iedereen erg. ‘Ik hou van het lange, moeizame traject dat nodig is om inzicht te verwerven,’ zegt Klaas Landsman, ‘hoe langer het traject, des te dieper het in mijn geheugen wordt gegrift en des te groter mijn gevoel van waardering en schoonheid. Ik word er gelukkig van als wiskunde diep in mijn hoofd geboord is.’ En Mark Peletier: ‘Het plezier zit hem niet zo zeer in de buit die je vangt, maar in de jacht zelf.’

Met name wiskundigen die een succesvolle carrière hebben doorlopen, stellen dat het vooral om het proces gaat en niet zo zeer om het resultaat. Zij hebben makkelijk praten, want zij zijn al binnen. Toch blijkt dat ook zij aanvankelijk hebben geworsteld met frustratie en onzekerheden als resultaten uitblijven. ‘Tijdens mijn promotie heb ik een jaar lang zitten staren en niets gedaan,’ zegt bijvoorbeeld Frans Oort, emeritus in de algebraïsche meetkunde, ‘ik voelde me totaal machteloos.’ Alle beginners rapporteren over de frustratie van het niet-begrijpen en niet verder komen. ‘Ik zit vaak lange tijd vast, verzand in problemen,’ zegt Barbara van den Berg in het laatste jaar van haar promotie, ‘ik voel me vaak totaal nutteloos in mijn werk.’ Ook wiskundestudenten komen dit tegen. Dennis Hesseling: ‘Ergens in mijn derde studiejaar zakte mijn motivatie in. Sommige vakken werden zo specifiek, dat ik niet meer begreep waar het nu eigenlijk om ging.’

Ligt de lol van wiskunde dus in het proces van probleemoplossen? Ja, voor de geïnterviewden was dit het voorname. Maar ook het vak zelf roept positieve gevoelens op. ‘Wiskundige zijn is niet alleen wiskunde produceren, maar ook consumeren,’ zegt professor Eduard Looijenga, ‘er is zoveel moois. Al op de middelbare school was wiskunde een liefde voor mij. Als eersteklasser maakte ik kennis met Euclidische meetkunde. Vooral het idee van een axiomatische opbouw maakte grote indruk. Prachtig

om te kunnen spelen met begrippen.’ Zijn promovenda Barbara van den Berg: ‘Mij fascineert de wisselwerking tussen algebra en meetkunde. Tijdens de studie vond ik het college groepentheorie van Eduard Looijenga geweldig. Met groepentheorie kun je bijvoorbeeld moeiteloos de mogelijke kleuringen van een kubus tellen, terwijl het een lange, saaie klus zou zijn geweest als je het met de hand had moeten uitrekenen.’

De geïnterviewden vertellen over het onderzoeksproces en over hun beleving van wiskunde. De bijbehorende gevoelens zijn die van frustratie, Aha-Erlebnissen en schoonheidservaringen. Deze emoties hebben betrekking op de relatie tussen individu en vak. Er zijn echter ook sociale gevoelens, die te maken hebben met hoe wiskundigen met elkaar omgaan. ‘Er zit iets goeds in hoe wiskundigen met elkaar omgaan,’ zegt Henk Barendregt hierover. ‘De meeste wiskundigen zijn bereid om hun ongelijk toe te geven. Ze kunnen een stapje terugdoen van hun eerdere opinies en de waarheid van de wiskunde als hoger erkennen. Wiskundigen zullen een ander ook niet gauw een trap nageven.’ De geïnterviewden zeggen dat wiskundigen over het algemeen vriendelijk en behulpzaam zijn.

Rainer Kaenders meent dat dit typisch Nederlands is. Hij heeft tijdens zijn studie in Bonn een ander gezicht gezien van wiskundigen: ‘In het begin van de studie fascineerde de arrogantie van veel docenten me wel. Ik keek tegen hen op: zij konden iets wat ik heel graag wilde kunnen. Maar ik was tegelijkertijd heel bang dat ik er niet bij hoorde, dat ik te dom was of zo. Na een tijdje sloeg die fascinatie om in haat. Op het wiskundeinstituut was je gewoon een nobody totdat je een stelling had bewezen.’

Vaak ontbreekt sociale interactie en dat geeft een eenzaam gevoel, zegt een aantal geïnterviewden. Frans Oort: ‘Rond mijn vijfendertigste heb ik overwogen om te stoppen met wiskunde. Mijn hoofdreden was dat ik het een eenzaam beroep vond. Je zit een groot deel van je werkzame leven in je eentje op een kamer. Ik was zelfs in mijn eigen specialisme lange tijd een Einzelgänger. Toen ik in Amsterdam werkte, heeft heel lang niet één van mijn collega’s begrepen waar ik mee bezig ben. Ik vond het jammer dat ik in Nederland niet werd gezien als iemand die aan iets leuks aan het werken is. Ook kun je aan de buitenwereld nooit duidelijk maken wat je doet. In je hoofd gebeurt er iets moois. Maar de maatschappij en je vrienden hebben daar totaal geen idee van. Daar komt bij dat bijna iedereen in onze maatschappij ‘bah’ zegt tegen wiskunde.’

Om op basis van dit afstudeeronderzoek algemene conclusies te trekken is een hachelijke zaak. Welke emoties bij wiskundebeoefening wel, en welke emoties niet optreden, daarover vallen geen algemene uitspraken te doen. De onderzoekopzet was daartoe ten enenmale ontoereikend. Het ging om een wiskunde- en geen psychologie-scriptie. Een conclusie die wel mogelijk is, is dat professionele

wiskundebeoefening zeker niet gespeend is van emoties. Integendeel, wiskunde is rijk aan emoties en ervaringen, en het zijn deze ervaringen die de wiskunde voor een individu waardevol maken, niet alleen de kennis op zich. Euclidische wiskunde is mooi omdat er een ervaring van schoonheid en inzicht in besloten ligt. Wie Euclidische meetkunde leert, neemt deel aan een bijzondere wiskundige ervaring.

In onze West-Europese wetenschapstraditie, waarin emoties strikt gescheiden worden van wetenschapsbeoefening, worden deze ervaringen alleen weinig tot niet gecommuniceerd. En dat is een groot gemis.

Leerlingen

*Liefde in het kwadraat
Worteltrekken van haat
Twee evenwijdige lijnen
Wiskunde moet verdwijnen
Ruben Vissers, klas v6*

Met een brede grijns en een knipoog werd bovenstaand gedicht overhandigd aan Jill van der Kuip, wiskundedoctrine aan het Oosterlicht College te Nieuwegein. Hoe leuk wiskunde in de klas ook wordt gepresenteerd, leerlingen worden er niet vanzelf door gegrepen. Integendeel. Leerlingen beleven wiskunde vaak als een opgelegde, onplezierige taak.

Hoe kan het toch dat leerlingen de aantrekkelijke kanten van wiskunde vaak niet zien? Maakt de schoolwiskunde het hen onmogelijk om de opwinding en voldoening van een wiskundig ontdekkingsproces te ervaren? Wordt hen bij voorbaat alle lust ontnomen door de negatieve beelden van wiskundigen in films en boeken?

Naar het verband tussen schoolwiskunde en het affectieve domein is veel onderzoek gedaan. In dergelijk onderzoek komen bijna altijd een of meerdere van de volgende vijf aspecten aan de orde:

- wiskundeangst,
- het zelfvertrouwen van leerlingen,
- de zelf ervaren nuttigheidsgraad van wiskunde,
- de zelf ervaren moeilijkheidsgraad van wiskunde,
- het plezier of de interesse die men heeft in wiskunde (Evans, 2000).

In de onderzoeksliteratuur over wiskundeonderwijs en emoties onderscheidt men drie aspecten: overtuigingen (beliefs), houding (attitudes) en gevoelens (emotions) (McLeod, 1992). Overtuigingen en houdingen van leerlingen worden beschouwd als aspecten die permanent van aard zijn en elkaar beïnvloeden. Zo sterk zelfs dat leerlingen alleen dingen leren die passen bij hun overtuigingen. Een voorbeeld is het type leerling dat denkt dat wiskunde uit trucjes bestaat. Wanneer een dergelijke leerling in de les met een nieuw onderwerp geconfronteerd wordt, zal hij of zij proberen die truc te identificeren, en leren die te hanteren en te memoriseren – onafhankelijk van de beoogde uitkomst van de les (Liljedahl,

2004). De rol van emoties in het wiskundeonderwijs is veel minder goed bestudeerd (Liljedahl, 2004).

Eén wiskunde-emotie die bij schoolverlaters en beginnende studenten wel bestudeerd is, is de Aha-Erlebnis. Peter Liljedahl is lerarenopleider aan de Simon Fraser Universiteit in Canada en heeft in 2004 een promotieonderzoek afgerond over de Aha!Experience. Liljedahl is docent van MATH 190, een cursus problem-solving die studenten moeten volgen om toegelaten te worden tot de Canadese PABO. Daar krijgt hij te maken met studenten met een zeer ambivalente houding ten opzichte van wiskunde. Het gros van de studenten is zwak in wiskunde, hun schoolcarrière op wiskundevlak blinkt uit door negatieve ervaringen. *'When I entered MATH 190, I felt fear in my stomach return. I needed this course to enter teaching so the pressure was on,'* aldus Stephanie.

Voor zijn PhD-onderzoek stelde Liljedahl zichzelf de vraag: kan een Aha-Erlebnis houding en overtuiging van studenten met betrekking tot wiskunde veranderen? In de cursus, die bestond uit het groepsgewijs maken van een aantal problem-solving opdrachten, ervoer 75% van de studenten (57 van de 76) een echte Aha-ervaring. De oorspronkelijk negatieve houding die de studenten hadden ten opzichte van wiskunde en problem-solving was daardoor duidelijk veranderd. *'Knowing that I could stare at a problem and in time would understand, gave me more confidence that I could be successful in math. It really is*

not an intelligence issue,' schrijft studente Lena in haar verslag.

Emoties horen bij wiskundebeoefening. Leerlingen en studenten hebben er recht op te weten dat hun wiskundeleraar en zelfs de beste wiskunde-professoren het grootste deel van hun tijd op wiskunde zitten te zwoegen en regelmatig twijfelen aan hun eigen kunnen. Dat wiskunde een hoop frustratie oproept, bij iedereen, zelfs bij de knapste wiskundigen.

Hoe goed de huidige wiskundedidactiek ook is, er zijn nog steeds leerlingen met wiskundeangst. Hoe flitsend en kleurrijk de moderne wiskundeboeken ook zijn, wiskunde als schoolvak kampt nog steeds met een negatief imago. Voor deze grote problemen zijn geen eenvoudige oplossingen. Meer aandacht voor de beleving van het wiskundevak kan wellicht een steentje bijdragen – en dan is de beleving van een wetenschapper als Henk Barendregt even belangrijk als die van Ruben Vissers uit v6.

Dankwoord

Met dank aan Jan van de Craats, Ed de Moor, Mark Peletier en Akkie Zaal voor het becommentariëren van een eerdere versie van dit artikel.

*Evelien Bus, Archimedes Lerarenopleiding, Utrecht,
Chris Zaal, Freudenthal Instituut, Utrecht*