

Een orthoschema is een tetraëder die dezelfde eigenschappen in zich draagt als de rechthoekige driehoek in het platte vlak. In dit artikel bekijken **Jan Brandts, Sergey Korotov en Michal Krížek** een constructie uit 1989 van Coxeter om een orthoschema onder te verdelen in drie kleinere orthoschema's. De analogie in twee dimensies is het onderverdelen van een driehoek in twee rechthoekige driehoeken.

## Over de rechthoekige driehoek en zijn hogerdimensionale generalisaties

### Historie, naamgeving en motivatie

Rechthoekige driehoeken staan aan de basis van een grote hoeveelheid, veelal klassieke wiskunde. Ze zijn heel concreet en zichtbaar in de Stelling van Pythagoras, en in de definitie van de goniometrische functies sinus, cosinus en tangens, maar fungeren ook vaak op de achtergrond. Immers, in veel meetkundige bewijzen wordt in een willekeurige driehoek een loodlijn gebruikt om het probleem te vereenvoudigen: de driehoek wordt verdeeld in twee rechthoekige driehoeken, waarop bovengenoemde concrete hulpmiddelen kunnen worden toegepast. Veel minder bekend is dat in drie dimensies een speciale klasse van tetraëders kan worden onderscheiden die de basiseigenschappen van rechthoekige driehoeken in zich dragen. Deze tetraëders zijn in de literatuur bekend onder verschillende namen. Lobachevsky heeft het eenvoudigweg over *pyramids* en Wythoff noemt ze *double-rectangular*. Schoute heeft het over een *polygonometry* en Eppstein hanteert de terminologie *path-simplex*. Schoute en Eppstein beperken zich hierbij overigens niet tot het driedimensionale object, maar refereren aan het algemene object in  $n$  ruimtelijke dimensies, waarover later meer. De oudste ons bekende referentie is echter het werk van de Zwitserse wiskundige L. Schläfli uit 1852, waarin gesproken wordt over *Orthoschemen*. Wij zullen deze benaming hier gebruiken en vertalen met *orthoschema*.

#### *Een constructie van Coxeter*

De onlangs overleden meetkundige H.S.M. Coxeter beschreef in een artikel uit 1989 een manier om een willekeurig driedimensionaal orthoschema onder te verdelen in drie kleinere orthoschema's<sup>1</sup>. Dit is een directe analogie van het in twee kleinere rechthoekige driehoeken knippen van een rechthoekige driehoek. In dit artikel zullen we Coxeters methode bekijken tezamen met andere eigenschappen van orthoschema's, zoals bijvoorbeeld het feit dat de zijvlakken van een orthoschema of loodrecht op elkaar staan of een scherpe hoek met elkaar maken. We zullen hierbij een beroep doen op relatief eenvoudige

lineaire algebra. Het zal blijken dat orthoschema's op een natuurlijke manier kunnen worden voorgesteld door een speciale klasse van matrices. Het aardige van onze beschrijving door middel van matrices is, dat deze ons in staat stelt om te kijken naar orthoschema's van willekeurig veel ruimtelijke dimensies. Voor deze objecten zullen we Coxeters constructie generaliseren: we verdelen een  $n$ -dimensionaal orthoschema in  $n$  kleinere  $n$ -dimensionale orthoschema's. Terloops bewijzen we dat hoeken tussen de 'zijvlakken' van een  $n$ -dimensionaal orthoschema nooit stomp kunnen zijn.

#### *Perspectief vanuit de Numerieke Analyse*

Onze motivatie om orthoschema's te bestuderen is als volgt te verklaren. In ons vakgebied, de Numerieke Analyse, worden Partiële Differentiaalvergelijkingen (PDV) vaak opgelost door middel van zogeheten Eindige Elementen Methodes. Hierbij wordt het domein waarop de onbekende oplossingen leven onderverdeeld in driehoeken of tetraëders, en in meer ruimtelijke dimensies in simplices. Op iedere simplex vormt een lineaire functie de benadering van de oplossing van de PDV. Het blijkt dat zowel de kwaliteit van de benadering als de snelheid waarmee deze kan worden uitgerekend, vaak cruciaal afhangt van de meetkundige eigenschappen van de simplices uit de opdeling. Zo kan worden aangetoond dat bepaalde fysische eigenschappen van de exacte oplossing van de PDV behouden blijven in de benaderende oplossing, als er geen elementen met stompe hoeken in de opdeling aanwezig zijn. Sowieso is het vraagstuk van hoe een opdeling is te verfijnen in een opdeling met kleinere elementen een onderwerp waaraan veel onderzoek wordt gewijd: in drie en meer dimensies is het lang niet duidelijk hoe dit moet gebeuren. De betrokkenheid van ons als auteurs is dat in hun artikel uit 2003, Sergey Korotov en Michal Krížek de constructie van Coxeter herontdekten, uiteraard zonder van deze op de hoogte te zijn geweest. De reden hiervoor is dat niet de naam *orthoschema* gebruikt wordt binnen de Numerieke Analyse, maar het wat minder verhullende *path-simplex*, en hun literatuurstudie beperkte zich dan ook

hiertoe. Jan Brandts en Michal Krížek hadden al een Eindege Elementen Methode bestudeerd, waarin gebruik wordt gemaakt van een onderverdeling van de  $n$ -kubus in  $n!$  orthoschema's<sup>2</sup>. Ook in *The Strengthened Cauchy Bunyakowski-Schwarz inequality for  $n$ -simplicial linear finite elements* van de auteurs van dit artikel speelt deze onderverdeling een centrale rol.

## Definitie, eigenschappen en vermoedens

We zullen nu definiëren wat we bedoelen met een orthoschema. We concentreren ons vooralsnog op orthoschema's in twee en drie ruimtelijke dimensies, alhoewel de definitie formeel gezien in  $n$  dimensies is geformuleerd. Vervolgens bekijken we een opmerkelijk vermoeden van Hadwiger uit 1957 betreffende orthoschema's. Tot slot bekijken we de constructie van Coxeter, en de herhaalde toepassing ervan in de context van het lokaal verfijnen van opdelingen.

### Orthogonale simplices en orthoschema's

Een orthoschema is een speciaal soort simplex. We herinneren de lezer eraan dat een  $n$ -simplex de algemene naamgeving is voor het convexe omhulsel van een gekozen oorsprong en  $n$  lineair onafhankelijke vectoren in de  $n$ -dimensionale ruimte. Zo is een driehoek een 2-simplex en een tetraëder een 3-simplex. Voorzover we weten zijn er geen speciale namen voor de  $n$ -simplex met  $n \geq 4$ . Een  $n$ -simplex heeft  $n + 1$  hoekpunten. Ieder tweetal hoekpunten is verbonden door een ribbe, met als gevolg dat het aantal ribben gelijk is aan  $\frac{1}{2}n(n + 1)$ .

### Definitie (orthoschema)

*Een  $n$ -orthoschema is een  $n$ -simplex waarin een pad van  $n$  ribben bestaat die onderling loodrecht op elkaar staan.*

We bedoelen hiermee dat het mogelijk moet zijn om vanuit een van de hoekpunten van de simplex via  $n$  van de ribben van de simplex langs alle andere hoekpunten te reizen, en wel zodanig dat iedere bewandelde ribbe loodrecht staat op alle andere bewandelde ribben. Het moge duidelijk zijn dat de 2-orthoschema's precies de rechtehoekige driehoeken zijn. Een voorbeeld van een 3-orthoschema is getekend rechts in figuur 1.

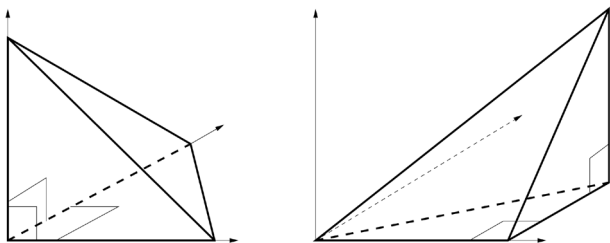


fig. 1 Een 3-orthoschema (rechts) en een ander type orthogonale tetraëder (links).

In figuur 1 zien we links een andere tetraëder met drie onderling loodrechte ribben. Echter, deze drie ribben vor-

men geen pad, en deze tetraëder is dan ook geen orthoschema. Er is wel een naam voor simplices met  $n$  onderling orthogonale ribben, namelijk *orthogonale simplex*. Zonder bewijs vermelden we het volgende resultaat:

### Stelling (Rajan, 1991)

*Een orthogonale simplex is een orthoschema dan en slechts dan als het middelpunt van de omschreven bol van de simplex tot de simplex behoort.*

Een andere manier om orthoschema's te onderscheiden van algemene orthogonale simplices is door op te merken dat alleen van orthoschema's ieder van de lager-dimensionale zijvlakken zelf ook weer een orthoschema is.

### Het vermoeden van Hadwiger

In 1957 formuleerde de Zwitserse wiskundige Hadwiger een opmerkelijk en tot op heden onbewezen vermoeden:

*Iedere  $n$ -simplex is onder te verdelen in eindig veel  $n$ -orthoschema's.*

Gezien de aannemelijkheid van deze uitspraak, is het opmerkelijk ervan misschien wel dat het tot op heden onbewezen is. Immers, een  $n$ -simplex is in zekere zin het meest eenvoudige polytoop in  $n$  ruimtelijke dimensies. Het is convexe, de  $(n-1)$ -dimensionale zijvlakken zijn zelf ook simplices, en zo zijn er meer argumenten om ze te beschouwen als eenvoudige geometrische objecten. Het mag dus verrassend heten dat bewijzen slechts beschikbaar zijn voor  $n \leq 5$ :

- $n = 2$ : triviaal, zonder referentie.
- $n = 3$ : zie (Lenhard, 1960). In het slechtste geval zijn twaalf orthoschema's nodig.
- $n = 4$ : zie (Charsischwilli, 1982), (Kaiser, 1986) en (Schoute, 1902) met respectievelijke bovengrenzen 730, 610 en 500.
- $n = 5$ : zie (Tschirpke, 1994) met bovengrens 12.598.800.

De problematiek wordt veroorzaakt door het feit dat het bewijs in twee dimensies niet zonder meer kan worden gegeneraliseerd: daar waar iedere driehoek een hoekpunt heeft van waaruit de loodlijn geheel binnen de driehoek ligt (zie links in figuur 2), heeft niet iedere tetraëder een hoekpunt van waaruit een neergelaten loodlijn geheel binnen de tetraëder ligt. Als dit wel zo is, en het grondvlak een driehoek is met alleen scherpe hoeken, kan de tetraëder eenvoudig worden opgedeeld in zes orthoschema's.

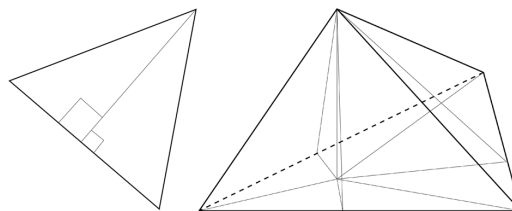


fig. 2 Rechts: opdeling van een tetraëder met inwendige loodlijn in zes orthoschema's.

Dit kan door vanuit het voetpunt van de loodlijn zes verbindingslijnen te trekken: drie naar de hoekpunten van de driehoek, en drie loodrecht op de zijden, zoals getekend rechts in figuur 2. Lenhard laat zien dat iedere tetraëder kan worden onderverdeeld in (een of) twee tetraëders met inwendige loodlijn en een grondvlak dat geen stompe hoeken bevat.

**Coxeters trisectie van het driedimensionale orthoschema**

Coxeter beschrijft de formele constructie om een driedimensionaal orthoschema onder te verdelen in drie kleinere in zijn artikel *Trisecting an Orthoscheme* in *Computers Math. Applic.* Zonder deze formaliteiten te willen herhalen geven we hier een aannemelijke schets van Coxeters constructie.

Laat ABCD een orthoschema zijn waarbij de ribben AB, BC, en CD in die volgorde het orthogonale pad vormen. Laat vanuit B een loodlijn neer op ribbe AC en noem het voetpunt E. Verbind E met een punt F op de ribbe AD zodanig dat EF loodrecht staan op AD. Teken tot slot de ribben BF en ED. De lezer kan eenvoudig nagaan dat de subsimplices BEFA, BEFD, BECD van ABCD orthoschema's zijn en een opdeling vormen van ABCD. De hoekpunten zijn gegeven in hun volgorde over het orthogonale pad van ribben. Het bewijs berust op het feit dat driehoek ABC loodrecht staat op driehoek ACD. Zie links in figuur 3 hieronder.

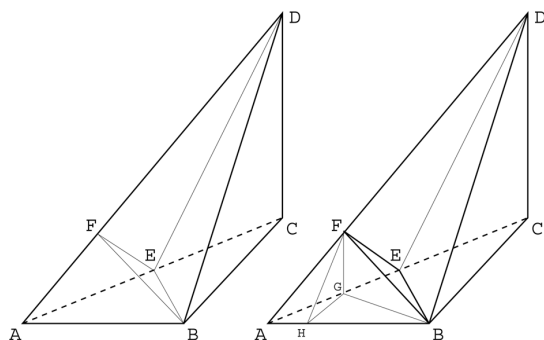


fig. 3 Coxeters trisectie (links), herhaald uitgevoerd door Korotov en Křížek (rechts)

In *Local nonobtuse tetrahedral refinements of a cube* (*Appl. Math. Lett.*) werd Coxeters trisectie herontdekt, echter met de extra observatie dat als het kleinere orthoschema BEFA nogmaals volgens hetzelfde principe wordt onderverdeeld, dit resulteert in een orthoschema AHGF, rechts in figuur 3, dat een verkleinde kopie is van ABCD. Het herhaald toepassen van deze constructie geeft een lokale verfijningstechniek voor opdelingen voor Eindige Elementen Methodes die stompe hoeken uitsluit. Zie ook de paragraaf *Perspectief vanuit de Numerieke Analyse* van dit artikel.

**Generalisatie naar hogere dimensies**

In dit laatste deel van ons betoog zullen we iets meer wiskundige manipulaties ten tonele voeren. Dit blijft echter

beperkt tot niet al te ingewikkelde lineaire algebra. Het blijkt namelijk dat orthoschema's corresponderen met matrices van een speciale vorm. Door manipulaties met deze matrices uit te voeren komen we meer te weten over de orthoschema's.

**De lineaire algebra van simplices**

Zoals vermeld in paragraaf 2.1 kunnen we een simplex  $S$  beschrijven aan de hand van  $n$  lineair onafhankelijke vectoren in  $\mathbb{R}^n$ , indien we de oorsprong  $P_0 = 0$  op een van de hoekpunten van  $S$  kiezen. Laten we deze  $n$  vectoren eens verticaal naast elkaar in een matrix  $P$  zetten, dus:

$$P = (p_1 | p_2 | \dots | p_n)$$

Dan is  $P$  een  $n \times n$  matrix, en omdat de kolommen van  $P$  lineair onafhankelijk zijn, is  $P$  inverteerbaar met inverse  $P^{-1}$ . We weten dus dat  $P^{-1}P = I$ , de identiteitsmatrix. We brengen nu het volgende in de herinnering over matrixvermenigvuldiging.

**Observatie**

Als  $A$ ,  $B$  en  $C$  matrices zijn waarvoor geldt dat  $AB = C$ , dan is het element  $c_{ij}$  dat in rij  $i$ , kolom  $j$  van  $C$  staat, gelijk aan het inproduct tussen de rij  $i$  van  $A$  en kolom  $j$  van  $B$ . Voor vectoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$  is het inproduct  $(x, y)$  gedefinieerd als  $\sum_{k=1}^n x_k y_k$ . We zien hieruit dat rij  $i$  van  $P^{-1}$  inproduct nul heeft met alle kolommen  $p_j$  van  $P$ , behalve met  $p_i$ . Hiermee is het inproduct gelijk aan 1. Dus, omdat het inproduct tussen twee vectoren nul is dan en slechts dan als ze loodrecht op elkaar staan, staat de  $i$ -de rij van  $P^{-1}$  loodrecht op alle  $p_j$  met  $j \neq i$ . Deze  $n - 1$  vectoren spannen het zijvlak  $F_i$  van  $S$  op waarin  $p_i$  niet ligt. En dus volgt hieruit dat de  $i$ -de rij van  $P^{-1}$  een vector is die loodrecht op het zijvlak  $F_i$  staat. Als we ons bovendien herinneren dat:

$$(x, y) = \|x\| \|y\| \cos \angle(x, y),$$

zien we dat de  $i$ -de rij van  $P^{-1}$  een scherpe hoek maakt met  $p_i$ , omdat de cosinus tussen de twee vectoren positief is. Immers, hun inproduct is 1 en de lengtes van  $x$  en  $y$  zijn uiteraard positief. Hieruit volgt dat de  $i$ -de rij van  $P^{-1}$  niet alleen loodrecht staat op  $F_i$ , maar tevens aan dezelfde kant van  $F_i$  als waar  $p_i$  ligt. Samengevat geeft dit:

**Lemma**

De oorsprong  $p_0$  en de kolommen  $p_1, \dots, p_n$  van een inverteerbare  $n \times n$  matrix  $P$  definiëren een simplex  $S$  in  $\mathbb{R}^n$ . De  $i$ -de rij van  $P^{-1}$  staat loodrecht op het zijvlak  $F_i$  van  $S$  waartoe  $p_i$  niet behoort, en ligt aan dezelfde kant van  $F_i$  als  $p_i$ . In het bijzonder staat in rij  $i$ , kolom  $j$  van de matrix  $Q = P^{-1} (P^{-1})^T$  en het inproduct tussen de twee inwendige normaalvectoren van zijvlakken  $F_i$  en  $F_j$ .

We definiëren de inwendige hoek  $\alpha_{ij}$  tussen twee zijvlakken  $F_i$  en  $F_j$  van een simplex  $S$  als  $\pi$  minus de hoek  $\beta_{ij}$  tus-

sen inwendige normaalvectoren op deze vlakken.<sup>3</sup> We zien eenvoudig in dat dan de volgende uitspraak waar is.

**Stelling**

De inwendige hoeken tussen de zijvlakken  $F_i$  van  $S$  zijn niet stomp, dan en slechts dan als  $Q$  buiten de hoofd diagonaal geen positieve elementen bevat.

**Bewijs**

Niet-positieve elementen in  $Q$  buiten de diagonaal betekenen dat voor alle  $i, j$  met  $i \neq j$ ,  $\cos(\beta_{ij}) \leq 0$  en dus dat  $\cos(\alpha_{ij}) = \cos(\pi - \beta_{ij}) = -\cos(\beta_{ij}) \geq 0$ . Dus  $\alpha_{ij}$  is niet stomp.

**De lineaire algebra van orthoschema's**

Aangezien draaien en transleren van orthoschema's niets verandert aan hun generieke eigenschappen, mogen we zonder verlies van algemeenheid stellen dat een orthoschema  $S$  in  $R^n$  te beschrijven is enkel en alleen door middel van de lengtes  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  van het pad van orthogonale ribben. Van deze ribben mogen we dan bovendien, om het ons wat gemakkelijker te maken, veronderstellen dat ze in de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  richting liggen. Anders gezegd kiezen we dus ons assenstelsel zo handig mogelijk. Dit geeft ook direct de matrix-representatie van een orthoschema. Immers, met de definities:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_n & \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

zien we dat de kolommen van  $P = \Sigma U$  de hoekpunten zijn van het zojuist beschreven orthoschema. Het mooie van deze representatie is dat  $P^{-1}$  eenvoudig te bepalen is, omdat:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

De getallen  $\sigma_j$  zijn positief. Daarom hebben de elementen van  $P^{-1} = U^{-1}\Sigma^{-1}$  hetzelfde teken (positief, negatief, nul) als de elementen van  $U^{-1}$ . Uit bovenstaande vorm van  $U$  is eenvoudig af te lezen dat inproducten tussen verschillende kolommen van  $P^{-1}$  (en ook van  $U^{-1}$ ) altijd nul of negatief zullen zijn, met als gevolg het volgende resultaat.

**Stelling**

De hoeken tussen de zijvlakken  $F_i$  van een orthoschema  $S$  zijn niet stomp.

**Generalisatie van Coxeters trisectie: n-sectie van een n-orthoschema**

De generalisatie van Coxeters constructie naar hogere dimensies laat zich relatief eenvoudig uitleggen. Zie figuur 4. Laat  $p_1, \dots, p_n$  samen met de oorsprong  $p_0$  een  $n$ -ortho-

schema  $S$  opspannen. We definiëren hulpvectoren  $q_0, \dots, q_{n-1}$  als volgt:  $q_0 = p_1$ , en  $q_j$  is de loodrechte projectie van  $q_{j-1}$  op  $p_{j+1}$  voor  $j = 1, \dots, n-1$ . Verder definiëren we  $q_n = p_0$ .

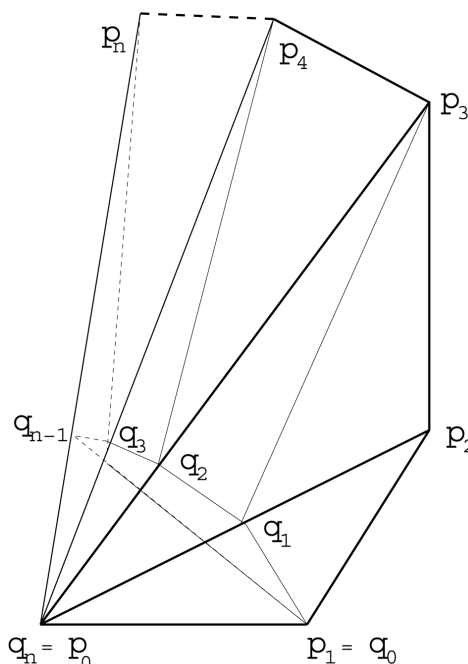


fig. 4 Generalisatie van Coxeters constructie voor orthoschema's in  $R^n$

Dan hebben we per definitie dat het verschil  $q_j - q_{j-1}$  loodrecht op  $p_{j+1}$  staat. Merk op dat voor  $n = 3$  dit exact dezelfde constructie is als in Coxeter's trisectie. Voor grotere  $n$  ligt de generalisatie voor de hand. De  $n$  sub-orthoschema's  $S_1, \dots, S_n$  zijn:

$S_1$	$q_0$	$q_1$	$q_2$	...	$q_{n-2}$	$q_{n-1}$	$q_n$
$S_2$	$q_0$	$q_1$	$q_2$	...	$q_{n-2}$	$q_{n-1}$	$q_n$
$S_3$	$q_0$	$q_1$	$q_2$	...	$q_{n-2}$	$q_{n-1}$	$q_n$
$S_4$	$q_0$	$q_1$	$q_2$	...	$q_{n-2}$	$q_{n-1}$	$q_n$
...	.	.	.	.	.	.	.
...	.	.	.	.	.	.	.
...	.	.	.	.	.	.	.
$S_n$	$q_0$	$q_1$	$q_2$	...	$q_{n-2}$	$q_{n-1}$	$q_n$

De lezer kan eenvoudig nagaan dat dit allemaal orthoschema's zijn door vanaf de nieuwe oorsprong  $q_0$  de onderling orthogonale ribben langs te lopen. Het is echter minder eenvoudig om in te zien dat al deze orthoschema's disjunct zijn en het gehele oorspronkelijke orthoschema opvullen. Om een mooi bewijs te geven, kan volledige inductie worden gebruikt. We geven hier slechts de inductiehypothese. Zoals vaker bij inductie is de hypothese sterker dan het beoogde resultaat.

**Inductiehypothese**

Laat  $S = \Sigma U$  een orthoschema van dimensie  $n$  zijn. Dan is  $S$  onder te verdelen in  $n$  sub-orthoschema's  $S_1, \dots, S_n$  van dimensie  $n$  met de eigenschappen:

- Ieder van de  $(n - 1)$  sub-orthoschema's  $S_2, \dots, S_n$  heeft

een pad van  $n$  orthogonale ribben dat eindigt in  $p_n$ .

- Het overblijvende sub-orthoschema  $S_1$  heeft een pad van  $n$  orthogonale ribben dat eindigt in de oorsprong. Voor  $n = 1$ ,  $n = 2$  en  $n = 3$  is duidelijk aan de hypothese voldaan. Het is niet echt eenvoudig om de inductiestap goed te formuleren, en we zullen hier dan ook geen poging wagen.

*Dr. J.H. Brandts,  
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde,  
Universiteit van Amsterdam*

*Dr. S. Korotov,  
Department of Mathematical Information Technology,  
University of Jyväskylä.*

*Prof. dr. M. Krížek,  
Mathematical Institute,  
Academy of Sciences of the Czech Republic.*

Michal Krížek werd gesteund door Grant A 1019201 van de Grant Agency van de Akademie der Wetenschappen van de Tsjechische Republiek, en Jan Brandts door een Fellowship van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

## Noot

- [1] Het artikel bevat overigens veel meer dan alleen deze constructie, maar dat gaat verder dan wat we hier willen behandelen.
- [2] Deze onderverdeling wordt doorgaans toegeschreven aan Kuhn, maar is ook al terug te vinden in het werk van Freudenthal.
- [3] Dit is een gangbare en logische definitie, die meteen duidelijk wordt aan de hand van voorbeelden in twee en drie dimensies.