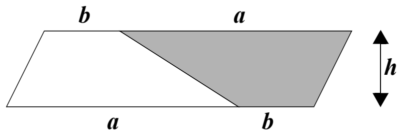
Wat te bewijzen is (26)

Rubriek

Deze aflevering gaat over het trapezium en 'tussenparallellen' daarin. Maar eerst wil ik een opmerking maken over 'de algebra', door velen gezien als het zorgenkindje van het huidige wiskundeonderwijs. Een probleem dat zich voordoet bij het algebraonderwijs voor de leeftijdsgroep 12-16 is het springen van de hak op de tak. Na een hoofdstukje met algebrasommen komen er andere onderwerpen aan bod, en als je dan weer bij het volgende stukje algebra bent aangeland, lijkt het of veel van het voorgaande vergeten is. Een remedie lijkt moeilijk te vinden. De suggestie die ik hier met enige klem wil doen, is om ook in de tussenliggende hoofdstukken algebra functioneel (daarmee bedoel ik binnen de context van dat andere onderwerp) te oefenen. Dat zal niet altijd even gemakkelijk zijn en zal veel van de creativiteit van de auteurs vergen, maar het valt te proberen. Als onderwerp waarbij dit streven vrij eenvoudig is te realiseren, noem ik 'oppervlakte en inhoud'. Neem nu het trapezium.
De formule voor de oppervlakte, te weten:

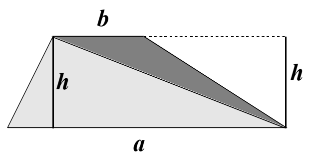
$$O = \tfrac{1}{2}h(a+b)$$

was zo'n 4000 jaar geleden al bekend in Egypte en Mesopotamië. Toch kan ik deze aardige formule niet terugvinden in alle methoden.
Waarom is deze formule aardig? Allereerst omdat je hem kunt afleiden uit de oppervlakteformule(s) voor parallellogram en/of driehoek die wel in alle boeken figureren. Dat kan op diverse aanschouwelijke manieren en het is de moeite waard om een paar demonstraties met de klas te bespreken. Mijn favoriet is deze (zonder woorden):



Wat heeft dit nu met algebra te maken, behalve dat er sprake is van een formule?
Om te beginnen is het leerzaam om naar randgevallen te kijken: substitueer $b = 0$, respectievelijk $b = a$, en je krijgt de formules voor driehoek en parallellogram terug.
Verder biedt zo'n formule met vier variabelen voldoende gelegenheid aan auteur, leraar of zelfs leerling ('eigen producties'!) om oefeningen in substitueren en opstellen danwel oplossen van vergelijkingen te ontwerpen.
Een equivalent van de trapeziumformule, met bijbehorend plaatje, is:

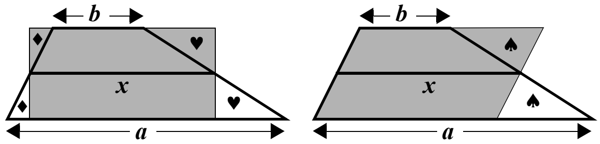
$$O = \tfrac{1}{2}ha + \tfrac{1}{2}hb$$



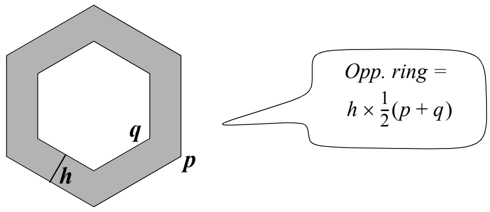
Een derde versie van de formule is:

$$O = h \cdot \tfrac{1}{2}(a+b)$$

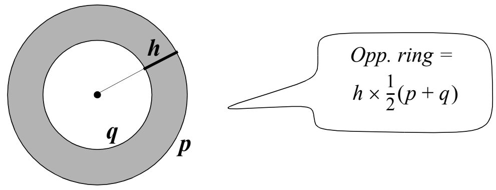
In gewone taal: *de oppervlakte is gelijk aan de hoogte maal het gemiddelde van de evenwijdige zijden.*
Mogelijke figuren hierbij:



Je moet dan weten dat de lengte van de middenparallel (aangeduid met x) het gemiddelde is van de evenwijdige zijden. In beide figuren is te zien dat $x - b = a - x$, en dat komt overeen met de klassieke definitie van het rekenkundig gemiddelde van twee getallen.
Overigens is ook mijn eerste plaatje aangevuld met de middenparallel in beide trapezia, heel geschikt om in te zien dat $x = \tfrac{1}{2}(a+b)$.
De derde hier genoemde trapeziumformule laat zich uitbreiden tot wat ik ringgebieden wil noemen. Neem bijvoorbeeld de ring ingesloten door twee regelmatige concentrische zeshoeken met omtrek respectievelijk p en q:



Bewijs: de ring laat zich verdelen in zes trapezia en pas de regel $6(a + b) = 6a + 6b$ toe.
Hier is generalisatie mogelijk: de stelling geldt als er sprake is van twee concentrische regelmatige n-hoeken (n = 3, 4, 5, ...). En via een limiet-overgang wordt een 'echte' ring gevonden.

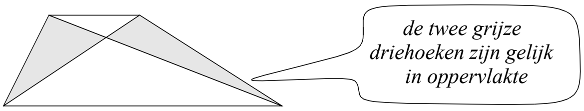


Deze bewering over de cirkelring kan trouwens ook mooi langs algebraïsche weg uit de formules voor oppervlakte en omtrek van de cirkel worden afgeleid.
Stel de straal van de grote cirkel r en die van de kleine s, dan komt het algebrabewijs neer op:

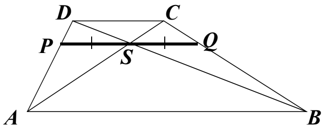
$$\pi r^2 - \pi s^2 = \pi(r-s)(r+s) = (r-s) \times 2\pi\frac{r+s}{2}$$

Harmonisch gemiddelde

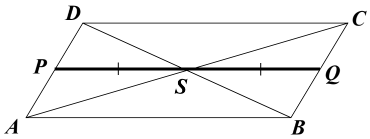
Een gewilde opgave uit oude meetkundeboekjes was om in een trapezium de 'vlinderstelling' te bewijzen:



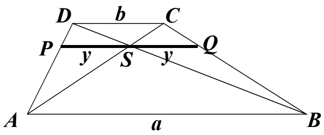
Het bewijs lukt door aanplakken van één van de witte driehoeken en het in stelling brengen van halve basis maal hoogte. Ik borduur nog een beetje door. Trek door het snijpunt S van de diagonalen van het trapezium het lijnstuk PQ parallel aan de basis. Het lijkt erop dat S het lijnstuk PQ in twee gelijke delen verdeelt.



Het bewijs via evenredigheden van lijnstukken is niet moeilijk, maar ik wil het nu eens met oppervlakten doen. Stel $|PS| < |QS|$, dan opp. APS < opp. BQS en tevens opp. DPS < opp. CQS.
Opgeteld levert dat opp. ADS < opp. BCS in strijd met de 'vlinderstelling'. Evenzo leidt $|PS| > |QS|$ tot een tegenspraak en er blijft over $|PS| = |QS|$.
Een schoolvoorbeeld van een bewijs uit het ongerijmde. Ik herinner me dat ik als leerling zulke bewijzen heel fascinerend vond en dat deze vorm van redeneren heeft bijgedragen aan mijn appreciatie van de wiskunde.
Voor de lezer die iets van perspectiefleer weet is de vlinderstelling eigenlijk heel flauw: het trapezium kan worden opgevat als de perspectiefafbeelding van een parallellogram (of zo men wil van een vierkant), met de basis parallel aan de horizon.



Dat S het lijnstuk PQ door midden deelt is nogal wiedes en omdat PQ evenwijdig met de horizon is, blijft deze eigenschap gehandhaafd in de perspectiefvoorstelling.
Diezelfde lezer beseft misschien ook dat de lengte van PQ in perspectief het harmonisch gemiddelde is van de lengten van AB en CD in perspectief.
Dat laatste kan echter ook heel goed zonder kennis van projectieve meetkunde worden gevonden.



Er geldt:

$$\frac{a}{y} = \frac{|DB|}{|DS|} = \frac{|DS| + |BS|}{|DS|} = 1 + \frac{a}{b}$$

Deling door a geeft nu:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Stel nu $2y = x$, dan volgt:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

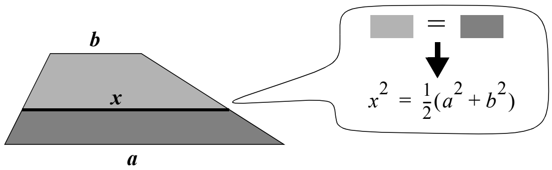
ofwel x is het harmonisch gemiddelde van a en b.
Merk op dat dit op hetzelfde neerkomt als:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$$

Het begrip harmonisch gemiddelde is oeroud en speelde bijvoorbeeld een rol in de Pythagorese muziekleer, dat verklaart tevens de naam.

Kwadratisch gemiddelde

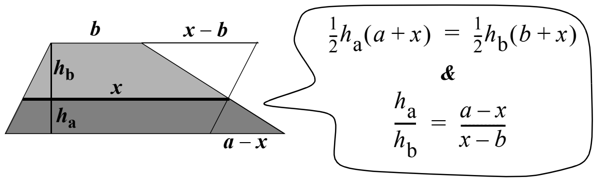
Op een Babylonisch kleitablet is een interessante formule te vinden voor de lengte x van de tussenparallel in een trapezium, die de oppervlakte van dit trapezium in twee gelijke delen verdeelt:



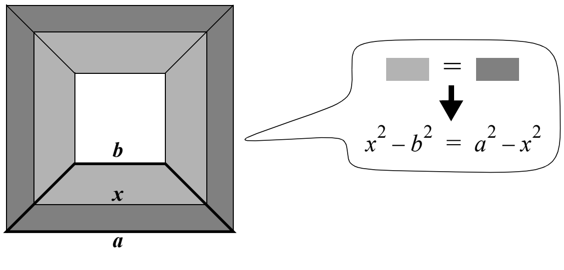
Wij zeggen nu dat x het kwadratisch gemiddelde is van a en b. Helaas bevatten de gevonden kleitabletten slechts recepten voor oplossingen en geen bewijzen en we tasten daarom in het duister hoe deze (en andere) formule(s) is/zijn ontdekt. Wellicht waren de Babyloniërs op de hoogte van de equivalentie van hun formule met de vergelijking $a^2 - x^2 = x^2 - b^2$. Ontbinding van beide leden geeft :

$$(a - x)(a + x) = (x - b)(x + b)$$

Ab van der Roest, met wie ik wat in de Babylonische wiskunde aan het snuffelen ben, stelde voor dat het ongeveer zo gegaan zou kunnen zijn:

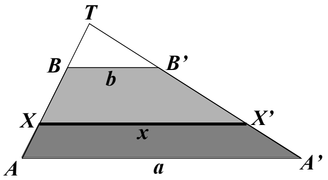


Een beetje algebra doet de rest.
Zelf zocht ik naar een puur meetkundige verklaring.
Voor een bijzonder trapezium (gelijkbenig met hoeken van 45° aan de basis) lukt dit wonderwel:



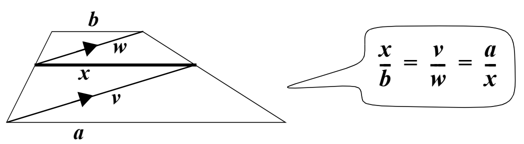
Het is niet ondenkbaar dat de Babyloniërs via dit speciale geval hun formule hebben ontdekt, maar hoe dan de stap naar het algemene geval is gemaakt, blijft in nevelen gehuld. Het lukt overigens best om een willekeurig trapezium via (ten hoogste) twee geschikte affiene transformaties (afschuiving en lijnvermenigvuldiging) om te bouwen tot een gelijkbenig trapezium met hoeken van 45°. Bij die beide transformaties blijft de oppervlakteverhouding van de twee delen, waarin het trapezium wordt verdeeld door een tussenparallel, ongewijzigd. Bovendien blijven de lengten van de evenwijdige zijden en de tussenparallel gelijk *o*nder die transformaties. En dat alles bij elkaar levert een meetkundig bewijs van de stelling.

De derde mogelijkheid is dat de Babyloniërs het trapezium hebben uitgebouwd tot een driehoek:

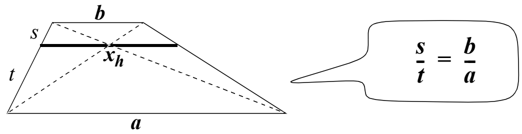


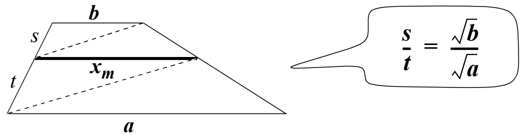
De oppervlakten van de gelijkvormige driehoeken *TAA',* *TXX'* en *TBB'* verhouden zich nu als de kwadraten van overeenkomstige zijden van die driehoeken, dus als a^2, x^2 en b^2. Daaruit volgt dat de oppervlakten van de trapezia *AA'X'X* en *XX'B'B* zich verhouden als $a^2 - x^2$ en $x^2 - b^2$. Gelijkheid van die oppervlakten leidt dan onmiddellijk tot het gewenste verband tussen a, b en x.
Ik merk nog op dat de stelling over de oppervlaktedeellijn zich weer eenvoudig laat uitbreiden naar ringgebieden, ingesloten door veelhoeken of cirkels.

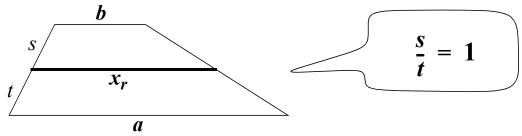
Meetkundig gemiddelde
Er zijn nu al drie 'tussenparallellen' van het trapezium in relatie tot een type gemiddelde aan bod geweest. Wat nog ontbreekt is het zogenaamde meetkundig gemiddelde van a en b, dat wil zeggen het getal x dat voldoet aan: $\frac{x}{b} = \frac{a}{x}$ ofwel aan $x = \sqrt{ab}$.
De tussenparallel van een trapezium heeft juist die lengte, als (en alleen als) de lijnen die de eindpunten van die tussenparallel verbinden met twee overstaande hoekpunten, evenwijdig zijn. Dat valt te bewijzen met gelijkvormige driehoeken.



Ik vergelijk nu het harmonisch, meetkundig en rekenkundig gemiddelde van a en b met elkaar. De hiermee corresponderende tussenparallellen noem ik x_h, x_m en x_r:
- x_h verdeelt de diagonalen en dus ook de opstaande zijden in stukken die zich verhouden als b en a;
- x_m verdeelt de opstaande zijden in stukken die zich verhouden als b en $\sqrt{ab}$ ofwel als $\sqrt{b}$ en $\sqrt{a}$;
- x_r verdeelt de opstaande zijden in gelijke stukken.







Uit $b < a$ volgt $\frac{b}{a} < \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} < 1$

met als gevolg dat x_h hoger ligt (ten opzichte van de basis van het trapezium) dan x_m en dat die laatste op zijn beurt weer hoger ligt dan x_r.
En zo is dus het harmonisch gemiddelde van twee ongelijke positieve getallen zeker kleiner dan het meetkundig gemiddelde, dat op zijn beurt weer kleiner is dan het rekenkundig gemiddelde. In het randgeval $a = b$ (parallellogram!) zijn de drie gemiddelden aan elkaar gelijk.
De ongelijkheidsrelatie van de drie typen gemiddelden komt, algebraïsch gezien, neer op:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \tfrac{1}{2}(a+b)$$

Zowel de linker als de rechter ongelijkheid, leidt tot:

$$2\sqrt{ab} \leq a + b$$

en dat is equivalent met:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Daarmee is een zuiver algebraïsch bewijs geleverd.
Ik merk nog op dat de drie formules voor de gemiddelden nog een verrassing in petto hebben: $x_m = \sqrt{x_h x_r}$.
Hoe zit het nu met het kwadratisch (zeg Babylonisch) gemiddelde? Met hulp van het trapezium is direct te beredeneren dat dit groter dan (of gelijk aan) het rekenkundig gemiddelde is en a fortiori dus ook groter dan (of gelijk aan) de beide andere gemiddelden. Een algebraïsch bewijs hiervan leidt naar:

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 ,$$

een ongelijkheid die eenvoudig is te verklaren.

Het harmonisch en meetkundig gemiddelde spelen een rol in allerlei concrete situaties (daarover schreef ik een stukje in mei 1977, in de 'oude' *Wiskrant*, 'Het gemiddelde door de bank genomen'). Naar mijn overtuiging zouden die begrippen tot de verplichte stof voor HAVO/VWO moeten behoren, ook al vanwege de interessante algebraesche aspecten. Van de vele meetkundige gezichten, heb ik er hier slechts één uitgekozen.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl