

Algebra en meetkunde kunnen tot leven worden gebracht met de nieuwste versie van Cabri via digitale foto's. **André Heck** laat zien hoe wiskundig onderzoek aan een ei er dan uit kan zien. Met name de vraag 'Wat is het volume en de oppervlakte van een gegeven kippenei?' staat centraal.

Wiskundig broeden op een ei

Inleiding

Cabri is een computerprogramma dat met name geschikt is als onderzoek- en experimenteergereedschap in de vlakke meetkunde¹. In *Euclides*² is al eens gewezen op de mogelijkheden van de nieuwste versie, CabriPlus³ genaamd, bij onderwerpen uit de analyse. Wat in de toepassingen in beide domeinen wel opvalt, is dat het ICT-gebruik nog relatief dichtbij de problemen en figuren die je in wiskundeboeken tegenkomt staat. De voornaamste toevoeging is het dynamische karakter van het programma. Meestal gaat deze constatering ook nog op in het geval een realistische situatie met behulp van een dynamisch meetkundeprogramma onderzocht wordt. Een voorbeeld hiervan is het Duitse project 'Mathematik rund ums Ei'⁴ uit 2001, waarin leerlingen onder andere de wiskundige vorm van een ei onderzoeken, en het volume en de oppervlakte schatten. Cinderella, het zusje van Cabri, wordt alleen gebruikt om eivormige krommen te construeren; een echt ei is snel uit beeld verdwenen.

Maar dit kan anders anno 2004 met de Plus-versie van Cabri. Hierin kan een digitale foto als achtergrond van een meetkundige constructie dienen of zelfs dynamisch aan meetkundige objecten in een constructie gekoppeld worden. Dit biedt diverse mogelijkheden om een sterke band tussen wiskunde en werkelijkheid tot stand te brengen, bijvoorbeeld in de vorm van een praktische opdracht. In dit artikel laten we zien hoe wiskundig onderzoek aan een echt ei eruit kan zien, waarbij we vooral ingaan op de onderzoeksvraag 'Wat is het volume en de oppervlakte van een gegeven kippenei?' Algebra en meetkunde gaan hierin hand in hand. Wij hopen en verwachten hiermee een inspirerend voorbeeld te geven van functioneel ICT-gebruik in een praktische opdracht waarin wiskunde direct gekoppeld wordt aan echt experimenteren met een voorwerp uit het dagelijks leven.

Metten is geen eitje

We doen eerst maar eens enkele metingen aan ons ei met stempeling 2-NL-40321. Het eerste nummer duidt

overigens op het houderijsysteem (2 = scharrelei). Dan volgt NL (Nederland) als herkomstland en het registratienummer van de pluimveehouderij waar het ei vandaan komt⁵. De meetgegevens zullen we later gebruiken om meetkundige modellen van de eivorm op waarde te schatten.

Op een keukenweegschaal wegen we het gewicht van het ei: 74 gram betekent dat het ei tot de XL-klasse behoort (XL = vanaf 73 gram); er staat ook niet voor niets op de verpakking 'jumbo scharrelei'.

Met een schuifmaat zijn lengte en breedte van het ei nauwkeurig te meten: lengte = 6,21 cm en breedte = 4,62 cm. Voor onze doeleinden volstaat ook wel het gebruik van een liniaal. De omtrek op het breedste punt van het ei hebben we bepaald door op deze plek een garendraadje te spannen en de lengte hiervan met een liniaal te meten: de omtrek is 14,7 cm, hetgeen overeenstemt met een cirkel met diameter 4,68 cm. Als we in de lengterichting een garendraadje om het ei spannen, dan blijkt dit een lengte van 17,1 cm te hebben.

Het volume van het ei is eenvoudig te bepalen door waterverplaatsing in een maatbeker met nauwkeurige aflezing te meten. Mocht je net als wij geen maatcilinder waarin het ei past hebben, dan kun je je behelpen met een niet-geijkt bekerglas en een geijkte maatcilinder (zie figuur 1).



fig. 1 Bepaling van het volume van het ei

Wij hebben de volgende meetprocedure gevolgd: vul de maatbeker met water tot een waterstand van 200 ml, zodat het ei volledig is ondergedompeld. Giet het water van het bekeerglas over in de geijkte maatcilinder en lees het volume af (134 ml). IJk het bekeerglas door het (zonder ei) tot aan het 200 ml-streepje met water te vullen, hierna de inhoud over te schenken in de maatcilinder en het volume (202 ml) af te lezen. Het verschil geeft het volume van het ei: 68 ml.

De experimentele bepaling van de oppervlakte van het ei zonder het te breken is niet zo eenvoudig. Je kunt denken aan het bedekken van het ei met stukjes aluminiumfolie, zodanig dat er zo min mogelijk rimpels ontstaan en dan de oppervlakte van de folie op te meten. Een alternatief is om het ei te verven en dan zodanig uit te rollen op papier dat de oppervlakte van de verfafdruk met de oppervlakte van het ei correspondeert. Maar het blijft lastig en dit is de kern van ons verhaal. Experimentele bepaling van eigenschappen als omtrek, volume en oppervlakte van een ei is te doen, maar met name de oppervlaktebepaling is lastig en vormt een echte uitdaging. Het bedenken en uitvoeren van meetmethoden is geen eitje. Tussen twee haakjes, leerlingen kunnen zich bij eigen onderzoek ook buigen over de vraag of het zin heeft de metingen meerdere keren te herhalen en dan de gevonden uitkomsten te middelen. Meer indirecte bepalingen van grootheden zijn ook toegestaan: door een geschikte wiskundige beschrijving van de vorm van het ei kun je een goede schatting van volume en oppervlakte van een ei maken op basis van simpel te meten grootheden. De bruikbaarheid van dergelijke wiskundige modellen is te toetsen aan de hand van de eerder gevonden experimentele gegevens.

Het ei als omwentelingslichaam

De onderzoeksvraag ‘Wat is het volume en de oppervlakte van een gegeven kippenei?’ kun je voor leerlingen misschien beter herformuleren in de volgende deelvragen:

1. ontwikkel een experimentele methode om het volume en de oppervlakte van een gegeven ei te bepalen;
2. ontwikkel een wiskundig model om het volume en de oppervlakte van een gegeven ei uit te rekenen;
3. vergelijk de experimentele en wiskundige methoden met elkaar.

Deze formulering doet geen afbreuk aan het open karakter van de opdracht, maar dwingt wel minstens één wiskundige aanpak af en nodigt uit tot vergelijking van diverse methoden. Ervan uitgaand dat leerlingen(teams) inderdaad verschillende methodes ontwikkelen, is een evaluatie en discussie hierover in de klas op zijn plaats.

Wij presenteren in dit artikel het volgende wiskundige model: het ei als omwentelingslichaam met de rotatieas in de lengterichting. De wiskundige functie voor de rand is nog vrij te kiezen, maar we hebben wel een voorkeur

voor functies waarmee de berekeningen zo simpel mogelijk zijn. Cirkels, ellipsen en parabolen zijn daarom goede kandidaten. Voor het vinden van een geschikte randfunctie gebruiken we een foto van het ei die we met een digitale camera hebben gemaakt. In CabriPlus kun je deze foto als achtergrond op het tekenblad plaatsen (klik rechts in het tekenblad op een lege plek en selecteer het menuitem *afbeelding op achtergrond via een bestand*). Hierna is een randfunctie te bepalen via meetkundige constructies, met een algebraïsche aanpak of via regressie. We bespreken deze methodes, maar niet voordat we nog gewezen hebben op een mogelijk foutieve start.

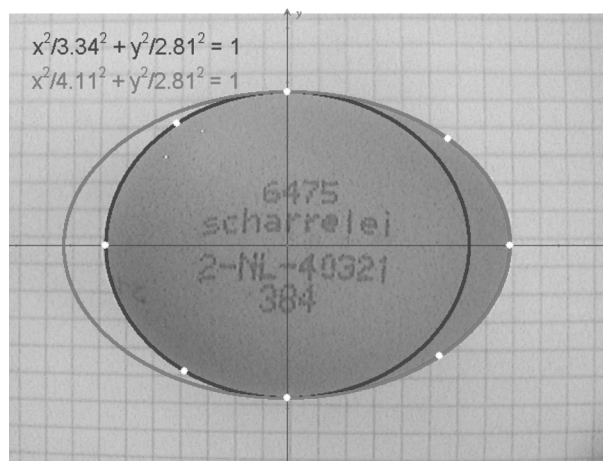


fig. 2 Fouten door vervormingen

Figuur 2 is een fragment van een CabriPlus-tekenblad waarin op een achtergrondfoto van een ei, gelegen op ruitjespapier, twee ellipsen zijn getekend die elk een deel van de eirand beschrijven en die netjes op elkaar aansluiten in het breedste deel van het ei. De foto is met een webcam van dichtbij gemaakt. Door tellen van hokjes op het ruitjespapier kom je er snel achter dat er sprake is van perspectivische vervorming (het ei lijkt wel 5,6 cm breed en 7,5 cm lang) en lensvervorming (het ruitjespapier is geen mooi rechthoekig rooster). Het beste is toch om de foto van het ei met een digitale camera met goede inzoomfaciliteiten en verwaarloosbare lensvervorming te maken. Knip ook een gat in het ruitjespapier zodanig dat het ei hierin past en het papier op halve hoogte van het ei gepositioneerd kan worden (zoals in figuur 3). Als alternatief voor de fotocamera kun je ook een scanner nemen.

Meetkundige aanpak

Figuur 3 is een schermafbeelding van een CabriPlus-werkblad met een beter geslaagde benadering van de eirand met twee netjes aansluitende halve ellipsen.

Laten we nog eens stilstaan bij de manier waarop de ellipsen in figuur 2 en 3 zijn getekend. Op de eerste plaats moet je weten dat in Cabri een kegelsnede geconstrueerd wordt door het gelijknamige item in de knoppenbalk te selecte-

ren en vervolgens vijf punten, waarvan er geen vier of meer op één lijn liggen, aan te klikken. Afhankelijk van de gekozen punten krijg je zo een hyperbool, ellips, parabool of een speciaal geval zoals een cirkel of een snijdend lijnenpaar. Als je de vijf punten op de eirand kiest krijg je vanzelf een ellips. Een goede benadering van de eirand met één ellips lukt niet, maar zoals je ziet in de figuren 2 en 3 wel met twee halve ellipsen (nota bene, in perspectief wijzigt de benaderingswijze niet van aard: dit gebeurt nog steeds met kegelsnedes). Twee punten zijn gemeenschappelijk gekozen voor de twee ellipsen, namelijk daar waar de rand van het ei, met het blote oog gezien, het breedst is. Het assenstelsel kun je zodanig neerleggen dat deze twee speciaal gekozen punten op één as liggen, en wel op het zicht even ver van de oorsprong. De eenheid op de x -as is overigens zodanig verslept dat deze samenvalt met twee hokjes op het ruitjespapier, dat wil zeggen 1 cm voorstelt; de schaal op de y -as wijzigt vanzelf mee. In CabriPlus kan van een geconstrueerde kegelsnede de bijpassende vergelijking gevonden worden via de knop *Vergelijking/Coördinaten* in de werkbalk. Je kunt nu net zolang schuiven met de randpunten en het assenstelsel totdat de vergelijkingen van beide ellipsen canoniek zijn.

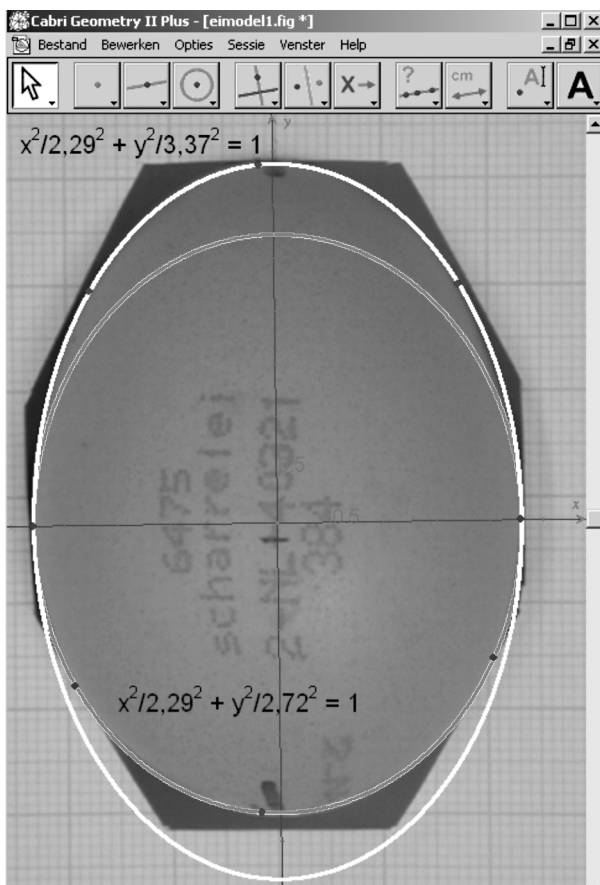


fig. 3 Meetkundige benadering van de eirand met ellipsen

In figuur 3 zijn we iets systematischer te werk gegaan: met een verborgen hulpconstructie van een cirkel met middelpunt op de y -as hebben we eerst twee punten op de x -as geconstrueerd die per definitie even ver van de oorsprong

liggen. Door de straal van de hulpcirkel te veranderen of het middelpunt van de cirkel te verschuiven over de y -as, kun je de twee punten op de x -as dichter naar elkaar toe of verder van elkaar afbrengen, terwijl de eigenschap dat ze gelijke afstand tot de oorsprong hebben, behouden blijft. Dit zijn het soort hulpconstructies waarvan we hopen dat leerlingen deze ook (gaan) toepassen bij hun onderzoek. Tevens hebben we het assenstelsel en het ei dusdanig neergelegd, dat op het eerste gezicht de y -as de omwentelingsas van de eifiguur is en de x -as op het breedste deel van het ei ligt, terwijl de eerder geconstrueerde punten op de x -as met gelijke afstand tot de oorsprong op de eirand liggen. Hierna hebben we voor de twee ellipsen steeds drie extra punten op de eirand gekozen, zodanig dat we zo simpel mogelijke vergelijkingen voor de ellipsen krijgen. Het is en blijft spannend priegelwerk, maar canonicke vergelijkingen voor de ellipsen kunnen wel gerealiseerd worden. De in figuur 3 gevonden formules zijn voor de grote en kleine ellips respectievelijk:

$$\frac{x^2}{2,29} + \frac{y^2}{3,37} = 1 \text{ en } \frac{x^2}{2,29} + \frac{y^2}{2,72} = 1.$$

Rekenen aan ellipsen en een ei

De voornaamste reden dat we zo graag benaderingen van de eirand willen hebben met halve ellipsen en canonicke bijpassende vergelijkingen, is uiteraard dat we dan in de gevonden vergelijkingen eenvoudig de lengte en breedte van de ellipsen kunnen aflezen en dat we hiermee bekende formules voor inhoud en oppervlakte van omwentelingslichamen van ellipsen kunnen toepassen. Voor een ellips met $2a =$ lengte van de grote as en $2b =$ lengte van de kleine as gelden de volgende formules voor het volume en de oppervlakte van het omwentelingslichaam, verkregen door rotatie om de grote as:

$$Volume = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

en

$$Oppervlakte = 2\pi b^2 \left(1 + \frac{a \arcsin e}{b e}\right)$$

met excentriciteit e gegeven door:

$$e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$$

De lange omtrek van een ellips is ook in een formule te vatten:

$$Omtrek = 4aE(e)$$

waarbij E de complete elliptische integraal van de tweede soort is met modulus e . Deze formules zijn op internet⁶ te vinden of kunnen uitgerekend worden via integralen:

$$Volume = \pi \int_{-a}^a f(\xi)^2 d\xi$$

$$\text{Oppervlakte} = 2\pi \int_{-a}^a f(\xi) \sqrt{1 + f'(\xi)^2} d\xi$$

en

$$\text{Omtrek} = 2 \int_{-a}^a \sqrt{1 + f'(\xi)^2} d\xi$$

waarbij:

$$f(\xi) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \xi^2}$$

Op de volumeberekening na heb je misschien wel een computeralgebrasyteem nodig om de uitdrukkingen te vinden. Voor de omtrek van de ellips bestaan overigens diverse benaderingen⁷; de volgende is afkomstig van Ramanujan⁸:

$$\text{Omtrek} \approx \pi[3(a+b) - \sqrt{(a+3b)(3a+b)}]$$

Ook aantrekkelijk is de volgende combinatie van rekenkundig en meetkundig gemiddelde⁹:

$$\text{Omtrek} \approx \pi \left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab} \right]$$

Passen we bovenstaande formules toe voor onze benadering van de eirand door twee halve ellipsen met parameters $a_k = 2,72$ (kleine ellips), $a_g = 3,37$ (grote ellips) en $b = 2,29$ (beide ellipsen), dan vinden we een volume van 66,9 ml, een oppervlakte van 80,8 cm², een korte omtrek van 14,4 cm en een lange omtrek van 16,9 cm. Berekend volume en omtrek stemmen goed overeen met de gemeten waarden. De oppervlakte stemt goed overeen met de schatting via het volgende machtsverband tussen gewicht (in gram) en oppervlakte van vogeleieren (in cm²)¹⁰:

$$\text{oppervlakte} = 4,835 \text{ gewicht}^{0,662}$$

Met deze formule en het gemeten gewicht van het ei zou de uitkomst voor de oppervlakte 83,5 cm² zijn. Bijna te mooi om waar te zijn, is het volgende verband voor kippeneieren¹¹:

$$\text{oppervlakte} = 4,76 \text{ gewicht}^{0,658}$$

Dit levert precies onze waarde voor de oppervlakte op! Er bestaan overigens ook experimentele verbanden tussen volume en oppervlakte van een ei, bijvoorbeeld¹²:

$$\text{oppervlakte} = \left(4,393 + 0,394 \frac{\lambda}{\beta} \right) \text{volume}^{\frac{2}{3}}$$

Als je hierin het door ons gemeten volume invult, krijg je als schatting voor de oppervlakte 81,7 cm². Samengevat, onze oppervlaktebepaling en allometrische relaties uit de vakliteratuur stemmen met elkaar overeen. De vergelijking voor het volume V van het ei kan ook geschreven worden als:

$$V = \frac{1}{6} \pi \lambda \beta^2,$$

waarbij $\lambda = a_g + a_k$ en $\beta = 2b$ de lengte en breedte van het ei voorstellen. Deze formule voor het volume kunnen we ook gebruiken om de gemiddelde dikte δ van de eierschaal te schatten als nulpunt van een derdegraads veelterm. We schetsen de methode¹³. Het ei bestaat voor ons uit twee componenten: de eierschaal en de inhoud van het ei. De massa m van het ei is daarom de som van de massa van de schaal m_s en van de massa van de inhoud van het ei m_i . Laat V , V_s en V_i de volumes van het totale ei, van de schaal alleen en van de inhoud van het ei zijn. Laat ρ_s en ρ_i de dichtheden van de schaal en de inhoud van het ei zijn. Dan geldt:

$$m = \rho_s V_s + \rho_i V_i \text{ en } V = V_i + V_s$$

Herschrijven geeft de volgende uitdrukking voor het volume van de inhoud van het ei:

$$V_s = \frac{m - \rho_i V}{\rho_s - \rho_i}$$

We nemen aan dat het totale ei te benaderen is met twee halve ellipsen met canonieke parameters a_k , a_g en b . Dezelfde veronderstelling maken we voor de inhoud van het ei, maar dan met canonieke parameters:

$$A_k = a_k - \delta, A_g = a_g - \delta \text{ en } B = b - \delta$$

We negeren dus het bestaan van een luchtkamer in het ei en de variatie in schaaldikte, die afhangt van de plek op het ei. De formule voor het volume van de ei-inhoud is:

$$V_i = \frac{2}{3} \pi (A_k + A_g) B^2$$

Uitwerken geeft:

$$V_i = V - \frac{2}{3} \pi [2\delta^3 - (a_k + a_g + 4b)\delta^2 + 2b(a_k + a_g + b)]$$

oftewel, herschreven in lengte λ en breedte β van het ei:

$$V_s = \frac{2}{3} \pi \left[2\delta^3 - (\lambda + 2\beta)\delta^2 + \frac{1}{2}b(2\lambda + \beta)\delta \right]$$

Dus moet de schaaldikte δ voldoen aan de volgende derdegraads veeltermvergelijking:

$$2\delta^3 - (\lambda + 2\beta)\delta^2 + \frac{1}{2}\beta(2\lambda + \beta)\delta - \frac{3(m - \rho_i V)}{2\pi(\rho_s - \rho_i)} = 0$$

Uit de vakliteratuur¹⁴ halen we de benodigde dichtheden voor schaal en inhoud van vogeleieren: $\rho_s = 2,3$ g/cm³ en $\rho_i = 1,037$ g/cm³. Andere gegevens voor ons ei zijn: $m = 74$ g, $V = 68$ cm³, $\lambda = 6,21$ cm en $\beta = 4,62$ cm. Voor ons ei moet de schaaldikte δ dan voldoen aan: $\delta^3 - 7,725\delta^2 + 19,6812\delta - 0,6585 = 0$.

De enige reële oplossing is $\delta = 0,034$ cm. Dit is 2,5 μ m minder dan de dikte die met de volgende allometrische relatie¹⁵ gevonden zou zijn:

$$\delta = 5,126 \cdot 10^{-3} \cdot \text{gewicht}^{0,456}$$

Algebraïsche aanpak

Tot nu toe hebben we de eirand benaderd via meetkundige constructies op een achtergrondfoto en vervolgens de algebraïsche voorstelling van het meetkundig object gebruikt voor verdere berekeningen. Je kunt ook de omgekeerde weg, van algebra naar meetkunde, bewandelen bij het wiskundig modelleren van de eirand. Figuur 4 toont een schermafdruk van een werkblad waarin drie schuifbalken staan om de lengtes in te stellen van de twee halve ellipsen die de eirand beschrijven¹⁶.

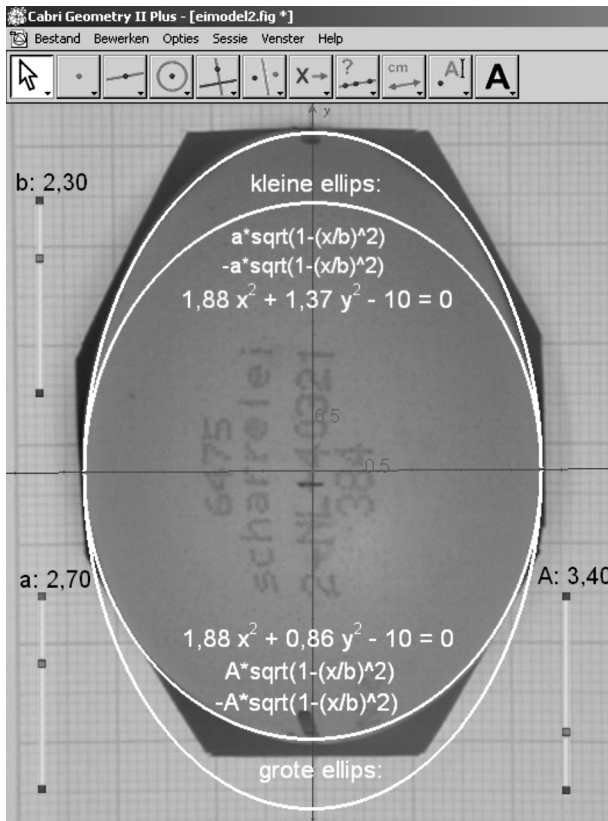


fig. 4 Algebraïsche benadering van de eirand met ellipsen

De ellipsen worden stuksgewijs opgebouwd uit grafieken van y als functie van x . In CabriPlus teken je de grafiek van een geparametriseerde functie als volgt: maak een expressie, bijvoorbeeld $a \cdot \sqrt{1 - (x/b)^2}$. Kies de knop *Bereken Expressie* in de werkbalk en selecteer achtereenvolgens de expressie, de waarde voor a en b , en de x -as. Cabri rekt dan onmiddellijk de meetkundige plaats van de punten (x,y) uit en tekent de grafiek. Voordeel van deze methode is dat de vergelijkingen van de geconstrueerde ellipsen altijd in canonieke vorm zijn, zodat het priegelwerk in de meetkundige aanpak om dit goed te krijgen niet meer nodig is. Met de in de algebraïsche aanpak gevonden parameters $a_k = 2,7$ (kleine ellips), $a_g = 3,4$ (grote ellips) en $b = 2,3$ (beide ellipsen) vinden we een volume van 67,6 ml, een oppervlakte van 81,4 cm², een korte omtrek van 14,5 cm, een lange omtrek van 16,9 cm en een schaaldikte van 0,032 cm. Dit stemt ook goed overeen met onze experimentele bepalingen en met de literatuurwaarden.

De eirand als regressiekromme

Regressie is een derde manier om een geschikte kromme voor de eirand te vinden. Je kunt coördinaten van randpunten als volgt in CabriPlus verzamelen (zie figuur 5): Construeer een punt in het tekenblad en verplaats het naar de rand van het ei. Vind de coördinaten van dit punt via de knop *Vergelijking/Coördinaten* in de werkbalk. Zet de coördinaten van het randpunt nu in een tabel door op de knop *Tabel* te drukken en daarna op de coördinaten van het randpunt te klikken. Verzamel extra data door steeds het punt te verplaatsen naar een andere positie op de rand van het ei en op de Tab-toets te drukken voor registratie van de gegevens. Je kunt op deze manier overigens elke numerieke waarde op het tekenvel in een tabel plaatsen. Om in de tabel nette kopjes te krijgen, hebben we dit in figuur 5 gedaan via aparte aanduidingen voor x - en y -waarden van het punt P.

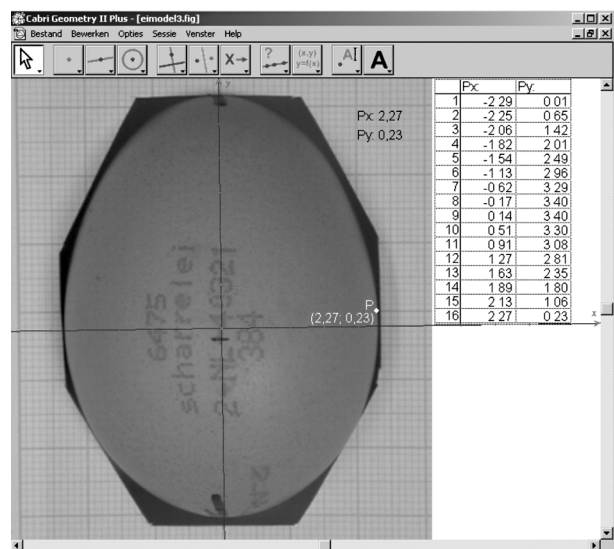


fig. 5 Coördinaten verzamelen van punten op de eirand

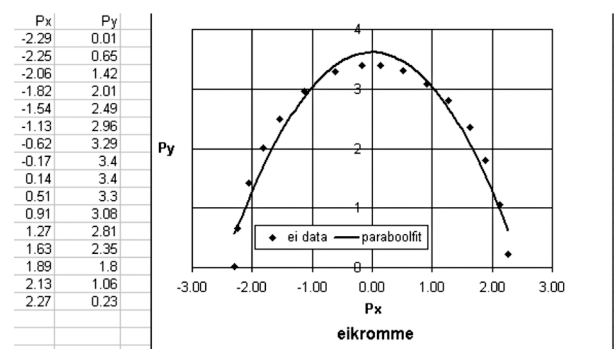


fig. 6 Parabool als regressiekromme

Deze tabel kun je nu simpelweg kopiëren naar een computerprogramma waarin je een regressiekromme bij de dataset kunt bepalen, bijvoorbeeld naar Excel. In figuur 6 staat een schermafdruk van een Excelrekenblad waarin de best bijpassende parabool van de bovenste eihelft be-

paald is via de menu-optie *Grafiek/Trendlijn toevoegen*, waarbij de keuze op een tweedegraads veelterm is gevallen. Je ziet dat de parabool de bovenste helft van de eirand niet zo goed modelleert. Met een kleiner deel van de dataset, en dus met een kleiner stuk van de eirand, lukt dit wel. Overigens kun je het eiprofiel van de marmergrutto wel goed modelleren met een parabool en ellips (zie figuur 7).

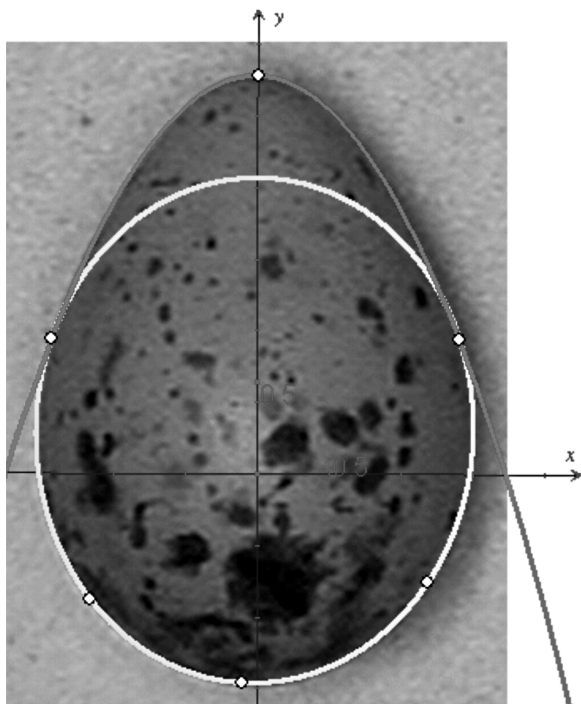


fig. 7 Benadering van een grutto-ei met parabool en ellips

Wie niet op eieren zit, kan veel plezier beleven.

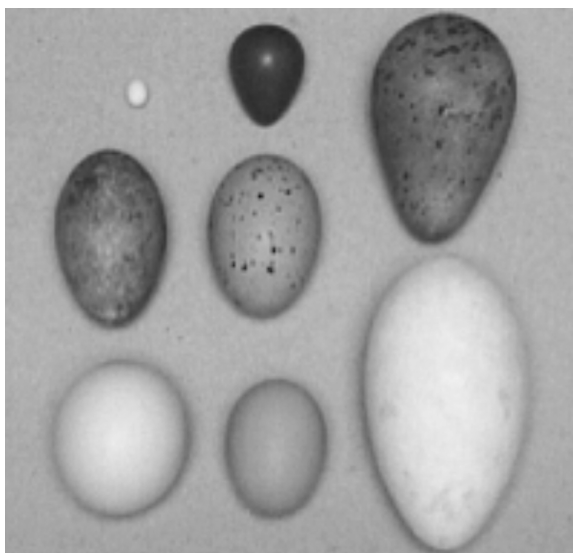


fig. 8 Allerlei vormen¹⁷

Eieren zijn er in allerlei soorten en maten: ze kunnen afkomstig zijn van vogels of reptielen en ze kunnen rond

zijn of conisch toelopende uiteinden hebben (figuur 8). Zowel met de algebraïsche als met de meetkundige aanpak zijn er dan ook talloze varianten voor eivormen bedacht¹⁸. Er zijn veel keuzemogelijkheden: een stuksgewijs gedefinieerde randfunctie kun je op diverse manieren opbouwen uit een cirkelfunctie, wortelfunctie of welke functie dan ook die je goed vindt passen bij een stukje van de eirand. De vorm ziet er meestal wel uit als een ei, maar bij toepassing op een concreet ei pakt de ene randfunctie beter uit dan de andere. De volgende randfunctie komt uit een schoolboek, en wel uit een opgave over het volume van een omwentelingslichaam¹⁹:

$$f: x \rightarrow \sqrt{-x^2 - a^2} + a\sqrt{2x^2 + ax + a^2}$$

In figuur 9 staat de kromme met $a = 6,0$ getekend.

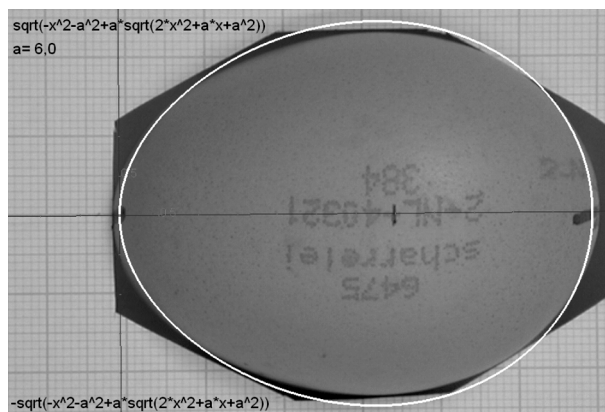


fig. 9 Minder goed passende eirand

Minder mooi dan onze eigen benaderingen van de eirand, maar de keuze van deze functie in de opgave is waarschijnlijk meer gemotiveerd door de voorwaarde dat de benodigde integraal met Maple goed uit te rekenen moet zijn. Voor wie het antwoord wil weten, het volume is:

$$\frac{1}{96}\pi a^3 [21\sqrt{2}\ln(5\sqrt{2} + 8) - 20 - 21\sqrt{2}\ln(\sqrt{2} + 4)]$$

hetgeen specialiseert tot 73,5 ml voor $a = 6,0$.

Ook aan meetkundige constructies van eivormen is geen gebrek. In Pythagoras^{20,21} is bijvoorbeeld al eens een constructie van de eirand met behulp van vier cirkelbogen beschreven. Een fraai voorbeeld dat ook nog goed werkt met ons eigen ei is het Cartesisch ovaal. De kromme, bedacht door René Descartes (in het Latijn: Renatus Cartesius) in 1637, is de meetkundige plaats van de punten waarvoor geldt dat een gewogen som van de afstanden tot twee vaste punten constant is. Deze kromme is in CabriPlus te construeren bovenop de achtergrondfoto van het ei. De tekening in figuur 10 is als volgt gemaakt: We construeren de meetkundige plaats van punten P waarvoor geldt dat:

$$m \cdot d(P, F_1) + d(P, F_2) = c$$

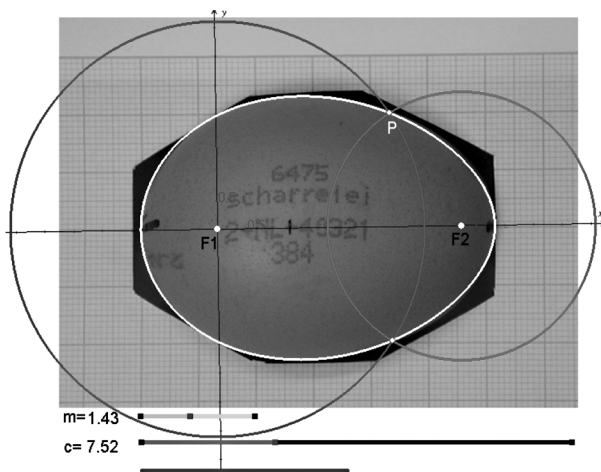


fig. 10 Cartesisch ovaal als benadering van de eirand

waarbij m en c constanten zijn, en waarbij $d(P, F_1)$ en $d(P, F_2)$ de afstanden van het punt P tot de vaste punten F_1 en F_2 voorstellen. Als oorsprong van het assenstelsel hebben we F_1 gekozen. Onderaan zijn drie lijnstukken te zien. Het bovenste is een schuifbalk waarmee we de parameter m instellen. Het middelste lijnstuk heeft twee doelen: de totale lengte bepaalt de constante c en het is tevens een schuifbalk. Het lijnstuk links van de schuif heeft een lengte die met de passerconstructie de cirkel met centrum F_2 oplevert. Het onderste lijnstuk in figuur 10 is (via de knop *Maat overbrengen* in de werkbalk) zo gemaakt, dat de lengte gelijk is aan de lengte van het lijnstuk rechts van de schuif gedeeld door m . De lengte van het onderste lijnstuk levert met de passerconstructie de cirkel met centrum F_1 op. Het snijpunt P van de twee getekende cirkels heeft per constructie de eigenschap die het Cartesisch ovaal karakteriseert. Deze kromme wordt in twee gedeelten getekend door de knop *Meetkundige plaats* in de werkbalk te kiezen en achtereenvolgens op een van de twee snijpunten en op het punt dat de schuif in de onderste schuifbalk voorstelt te klikken. Hierna is het een kwestie van geschikte punten F_1 en F_2 vinden en passende waarden voor de constanten c en m opsporen, zodat de kromme netjes de eirand volgt. Al met al is de hele constructie een tijdrovende bezigheid, maar het resultaat verloopt goed.

Het ovaal van Cassini, dat gedefinieerd is als de meetkundige plaats van de punten waarvoor geldt dat het product van de afstanden tot twee vaste punten constant is, wordt ook vaak gebruikt om eivormen te modelleren. Maar deze kromme beschrijft het profiel van ons kippenei toch niet zo goed.

Eiertjetik

Het gebruik om met Pasen op de 'paaswei' met eieren te spelen, is goeddeels verdwenen in Nederland. Een van de onderdelen was eiertikken: het aantikken van eieren om

te weten te komen wie het ei met de hardste schaal in zijn of haar bezit had. Deze manier van meten van eierschaalsterkten kom je nog wel tegen in hedendaags oölogisch onderzoek (oölogie is de wetenschappelijke benaming voor eierkunde). Onderstaande figuren komen uit recente wetenschappelijke artikelen^{22,23} en illustreren de proefopstelling die gebruikt is om sterkte-eigenschappen van de eierschaal te onderzoeken via geluidsmetingen.

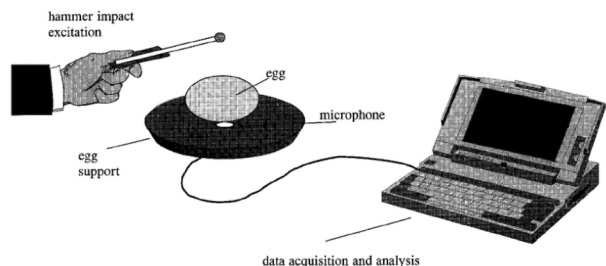


fig. 11 Schematische opstelling voor resonantieproef

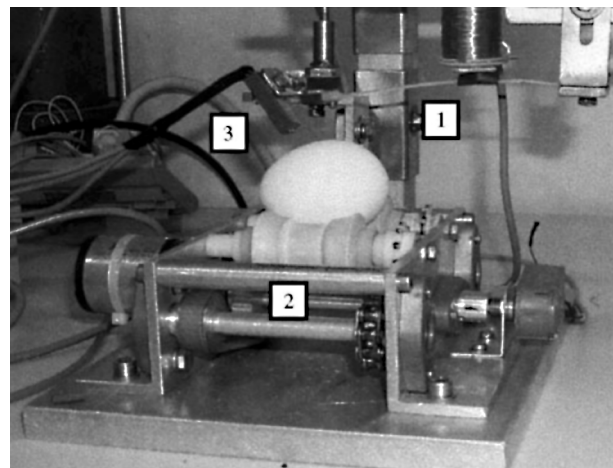


fig. 12 Echte meeteenheid voor resonantieproef: [1] elektromagnetisch aangedreven hamertje, [2] ei-roller en [3] microfoon

Wanneer je namelijk met een hamertje op het midden van het ei tikt, gaat het ei vibreren, en met een microfoon kun je de akoestische drukgolven die het vibrerende ei genereert opnemen. Signaalanalyse levert vervolgens de resonantiefrequenties op. De laagste resonantiefrequentie f is een maat voor de dynamische stevigheid van het ei, vastgelegd in een constante k , via de relatie:

$$2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

waarbij m de massa van het ei is. Deze onderzoeksmethode kunnen leerlingen met behulp van Coach en een geluidssensor ook wel uitvoeren. De universitaire onderzoekers hebben deze techniek tevens gebruikt om de sterkte van appels en tomaten te onderzoeken. Leerlingen hoeven zich dus ook niet tot ei-onderzoek te beperken. Het gaat er hierbij niet om dat leerlingen onderzoek nabootsen,

maar wel dat hun eigen onderzoek, of het nu wiskundig modelleren van eikrommen of mechanisch ei-onderzoek betreft, dicht staat bij wat in echt wetenschappelijk onderzoek gebeurt. Leerlingen gebruiken theorie, onderzoeksmethoden en instrumenten die sterk lijken op wat professionele onderzoekers hanteren en krijgen zo een meer realistisch beeld van onderzoek doen. De oppervlakte- en volumebepaling en de eerder vermelde allometrische relaties worden bijvoorbeeld gebruikt om het oorspronkelijke gewicht van museumeieren te schatten. Wie zijn of haar leerlingen daadwerkelijk wil laten kennismaken met biologische beeldverwerking aan de hand van MRI scans van kippeneieren in verschillende broedstadia, moet maar eens kijken op de website van het Chickscope project²⁴. Dat zo'n vakoverstijgend werkstuk geen utopie is, moge blijken uit het onderzoek naar de stevigheid van eierschalen door twee scholieren, Nadine Wenersbusch en Marloes Kleijs, waarvan een samenvatting op de website van het EXO steunpunt Nijmegen²⁵ te vinden is. Zij hebben zelf een 'eierpletter' geconstrueerd en gebouwd, waarmee de breuksterkte bepaald kan worden. Met andere woorden, zij hebben de statische breuksterkte onderzocht op een manier die sterk lijkt op de standaardprocedure in oölogisch onderzoek.

Dynamisch gebruik foto's in CabriPlus

We keren nog even terug bij het wiskundig modelleren van eieren als omwentelingslichaam aan de hand van digitale foto's. Een nog onbesproken, maar veelgebruikte manier om een eiprofiel met wiskundige krommen te beschrijven, is het aanpassen van de canonieke vergelijking van een ellips:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

met een functie f tot:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \cdot f(x) = 1$$

zodanig dat de kromme meer eivormig wordt. De functie:

$$f(x) = \frac{1 + cx}{1 - cx}$$

is een voorbeeld van een functie die dit doet. Maar hierbij veronderstellen we wel stiekem dat de lengterichting van het ei samenvalt met de horizontale as. Als je dus de modelkromme wilt vergelijken met het profiel van een echt ei via een digitale foto, dan moet dat ei op de foto ook horizontaal liggen. Maar bij foto's die je niet zelf maakt, maar van Internet plukt, hoeft dit helemaal niet het geval te zijn en bovendien is het ei op de foto misschien wel erg klein. Met software voor fotobewerking kun je de grootte en oriëntatie van de foto wel aanpassen, maar het gebruik van dit soort software is niet echt nodig: je kunt in CabriPlus ook een foto bewerken als je deze maar niet als achtergrond gebruikt, doch koppelt aan een meetkundig ob-

ject zoals een punt, lijnstuk, of rechthoek. Bij een driehoek wordt de foto zodanig vervormd dat het geen rechthoek meer is, maar een bij de gegeven driehoek passend parallellogram. Bij een vierhoek wordt de foto dusdanig getransformeerd dat deze hierin past. Welke transformaties op de foto dan nog mogelijk zijn, hangt af van de keuze van het meetkundige object waaraan de foto gekoppeld is. De lijst van mogelijkheden is als volgt:

Meetkundig object	# Vrijheidsgraden	Transformatie
punt	2	translatie
segment, vector	4	gelijkvormigheidstransformatie
driehoek	6	affiene afbeelding
vierhoek	8	projectieve afbeelding

In de eerste twee gevallen kun je geen punt meer op het plaatje plaatsen: Cabri associeert het hele plaatje met het gekozen punt of lijnstuk. Bij gebruik van een drie- of vierhoek kun je nog wel punten binnen de foto maken. Dit bepaalt natuurlijk wel de speelmogelijkheden van Cabri. In ieder geval is het voldoende om een foto van een ei in gewenste grootte en oriëntatie op een tekenvel te krijgen. Dit is precies wat we in figuur 7 hebben gedaan.

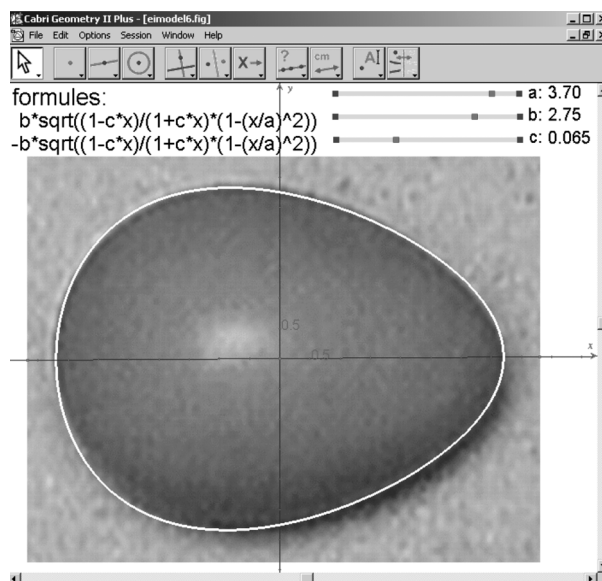


fig. 13 Benadering van een patrijsei

In figuur 13 hebben we een foto van een patrijsei zodanig vergroot dat het ei in werkelijkheid twee keer zo klein is (het echte patrijsei heeft de afmeting 37×27 mm) en de eirand gemodelleerd met de formule:

$$\frac{x^2}{3,69^2} + \frac{y^2}{2,73^2} \cdot \frac{1 + 0,061x}{1 - 0,061x} = 1$$

Overigens werkt zo'n model ook goed voor ons kippenei. Ook biedt het dynamisch gebruik van foto's in CabriPlus

de mogelijkheid om een transparant GIF-plaatje via een gelijkvormigheidstransformatie ter vergelijking over een tekening of foto heen te leggen. Een voorbeeld hiervan staat in figuur 14, waarin een gezichtsmasker²⁶ dat de ideale gezichtscontouren zou modelleren (op basis van gulden snede verhoudingen) als transparante figuur over een foto van een studente is heen gelegd.

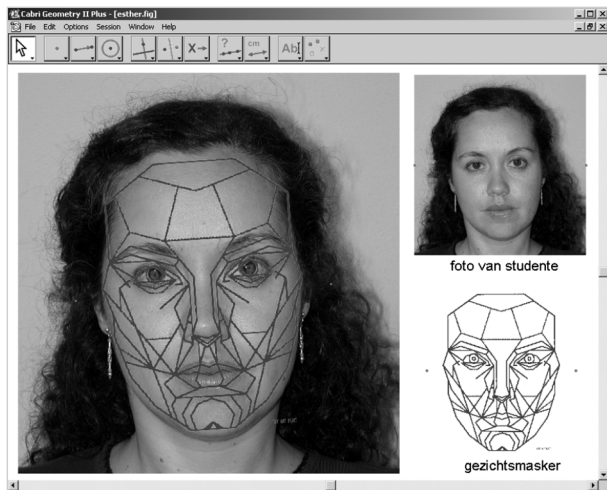


fig. 14 Gelaatsonderzoek met behulp van fotos's in CabriPlus

Een dergelijk gelaatsonderzoek is voor leerlingen veel interessanter, leuker en meer eigentijds (denk maar aan de vele tv-programma's over plastische en cosmetische chirurgie die momenteel uitgezonden worden) dan alleen maar de eivormigheid van een gezicht modelleren.

Het hele eieren eten

Tot slot besteden we nog een paar woorden aan het nut van werken met digitale foto's in het wiskundeonderwijs. In het bijzonder stellen we ons de vraag welke voordelen het meten en manipuleren van foto's aan leerlingen kan bieden bij het uitvoeren van praktische opdrachten? En dan denken we niet alleen aan oölogisch onderzoek, maar meer algemeen aan het wiskundig modelleren van concrete objecten. We noemen hier in willekeurige volgorde:

- wiskunde en werkelijkheid zijn direct aan elkaar gekoppeld en dit vergroot niet alleen de aantrekkelijkheid van het werk voor leerlingen, maar laat hen ook kennismaken met toepassingen van wiskunde op objecten uit het dagelijks leven;
- leerlingen ervaren op speelse manier dat meetkundige transformaties niet alleen een hobby zijn van wiskundigen, maar dat deze afbeeldingen ook echt gebruikt worden in alle software waarmee digitale beelden bewerkt worden. Alweer een moderne toepassing van wiskunde in het echte leven;
- algebra en meetkunde gaan hand in hand bij wiskunde aan foto's en leerlingen worden gemotiveerd, zo niet verleid, tot het maken van constructies die netjes aansluiten bij het gefotografeerde object, of zo simpel mogelijke formules opleveren. Het vinden van formu-

les dient ook een concreet doel: het uitrekenen van afgeleide grootheden die niet zo gemakkelijk experimenteel te bepalen zijn;

- echte metingen aan een concreet object kunnen vergeleken worden met modeluitkomsten. Dit draagt bij tot het nadenken over kwaliteit van een wiskundig model. ICT maakt het mogelijk dat leerlingen meerdere modellen opstellen en met elkaar vergelijken;
- meten op foto's is een in de praktijk veelgebruikte moderne onderzoekstechniek die leerlingen zelf ook in praktische opdrachten, exo's of profielwerkstuk kunnen inzetten. Fotometing kan het leerlingenonderzoek op een hoger niveau brengen, en faciliteert ook onderzoek aan objecten waarop anders moeilijk te meten valt (zowel grote objecten als bruggen en gebouwen, als kleine zoals plantencellen, bacteriën, enzovoort, en ook foto's uit ruimtevaart, geneeskunde of geografie).

De auteur wil de volgende personen danken voor hun medewerking: collega Leendert van Gastel voor zijn hulp bij de metingen aan het ei en de discussies over de gebruikte wiskundige methoden; studente Esther Domínguez Sol voor haar deelname aan het gelaatsonderzoek en Tous Spuijbroek voor zijn suggestie om een scanner te gebruiken als alternatief voor een digitale fotocamera.

André Heck, AMSTEL Instituut,
Universiteit van Amsterdam, heck@science.uva.nl

Noot

- [1] Zie bijvoorbeeld: Goddijn, A. (2001). Cabri geeft oude meetkunde tweede jeugd. In J. van de Craats (red). *Experimentele wiskunde. CWI Vakantiecursus 2001*. CWI Syllabus 49 (pp. 61-92).
- [2] Klingens, D. (2003). Integraalkrommen met CabriPlus. *Euclides*, 79(2) 66-69.
- [3] De door ons gebruikte Plus-versie 1.2.5 van Cabri uit 2004 verschilt van de Cabri-versie die bij Nederlandse wiskundemethoden wordt meegeleverd. Het gebruik van digitale foto's is in de oude versie niet mogelijk. Voor meer informatie over CabriPlus verwijzen we naar de website van producent Cabrilog (www.cabrilog.com) en de Nederlandse distributeur www.educadbv.nl
- [4] Voor meer informatie verwijzen we naar de website www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/mathei/.
- [5] Kijk voor meer informatie op www.ei-info.nl.
- [6] Bijvoorbeeld op de website www.wisfac.nl.
- [7] Zie *Final Answers* van G.P. Michon op webpagina www.numericana.com/answer/ellipse.htm.
- [8] Ramanujan, S. (1913-1914). Modular Equations and Approximations to π . *Quart. J. Pure. Appl. Math.* 45, 350-372.
- [9] Bronshtein, I.N. & K.A. Semendyayev (1985). *Handbook of Mathematics*. 3rd English Edition. New York: Van Nostrand Reinhold Co.

- [10]Paganelli, C.V., A. Olszowska & A. Ar (1974). The avian egg: surface area, volume and density. *The Condor* 76(3) 319-325. <http://elibrary.unm.edu/Condor>.
- [11]Besch, E.L., S.L. Sluka & A.H. Smith (1968). Determination of surface area using profile recordings. *Poultry Science* 47, 153-158.
- [12]Hoyt, D.F. (1976). The effect of shape on the surface-volume relationships of birds' eggs. *The Condor* 78(3), 343-349. <http://elibrary.unm.edu/Condor>.
- [13]Een aanpassing van V.G. Narushin. *Mathematical Methods and Theories in Agricultural Research with Examples Related to Poultry Science*. Hoofdstuk 1: Mathematics on Eggs. X-PRESS, Zaporozhye, Ukraine, 1998. http://narushin.iatp.org.ua/math_book.html.
- [14]Romanoff A.L. & A.J. Romanoff (1949). *The Avian Egg*. New York: Wiley & Sons.
- [15]Ar, A., C.V. Paganelli, R.B. Reeves, D.G. Greene & H. Rahn (1974). *The Condor* 76(2) 153-158. <http://elibrary.unm.edu/Condor>.
- [16]Voor het maken van schuifbalken in Cabri verwijzen we naar www.pandd.demon.nl/vgv/faq39.htm.
- [17]De foto is overgenomen uit de virtuele eiertentoonstelling van het Provincial Museum of Alberta in Canada: www.pma.edmonton.ab.ca/vexhibit/eggs/vexhome/egghome.htm. Op deze website staan talloze foto's van vogeleieren.
- [18]Zie onderstaande webpage en referenties hierin: www.mathematische-basteleien.de/eggcurves.htm.
- [19]Staal, H., A. Grunefeld & P. van de Sanden (2001). Toegepaste Wiskunde voor hoger onderwijs met behulp van Maple – een interactieve methode. Schoonhoven: Academic Service. Opgave 5.6.3.
- [20]Ernst, B. (2000). Een eitje, zo'n eitje. *Pythagoras* 40(1) 16-17.
- [21]Klingens, D. (2000). Het eirond en het langrond. *Pythagoras* 40(2) 4-5. Zie ook de webpagina: www.pandd.demon.nl/eipyth.htm.
- [22]Coucke, P., E. Dewil, E. Decuypere & J. de Baerdemaeker (1999). Measuring the mechanical stiffness of an eggshell using resonant frequency analysis. *British Poultry Science* 40(2) 227-232.
- [23]De Jetelaere, B., P. Couckew & J. de Baerdemaeker (2000). Eggshell crack detection based on acoustic resonance frequency analysis. *Journal of Agricultural Engineering* 76(2) 157-163.
- [24]<http://chickscope.beckman.uiuc.edu>.
- [25]www.exo.sci.kun.nl.
- [26]Het masker is ontwikkeld door plastisch chirurg Dr. S.R. Marquard, onder andere voor planning van gezichtscorrecties. Zie de website www.beautyanalysis.com.

Ingezonden reactie *Nieuwe Wiskrant* juni 2004

In het laatste nummer van de *Nieuwe Wiskrant* plaatste de redactie een reactie van Mark Opmeer op mijn artikel 'de wiskunde van de wiskundeleraar'. In de redactionele inleiding daarop werd de hoop uitgesproken dat Opmeers reactie het begin zou zijn van een bredere discussie. Die discussie begint helaas direct met veel verwarring.

Zo is het Mark Opmeer kennelijk ontgaan dat de eerste helft van mijn artikel een samenvatting was (met enige toelichting) van een artikel uit het handboek van de hand van Thomas Cooney en Heide Wiegel. In mijn samenvatting bespreek ik de centrale drie stellingen van Cooney en Wiegel. Mark Opmeer heeft het verwijzend naar die stellingen steeds over 'Swaens punten' en 'Swaens opvattingen'.

Op die manier wordt onrecht gedaan aan de schrijvers. Het was hun verdienste deze punten te formuleren, niet de

mijne. De redactie had die verwarring dus niet moeten laten bestaan, ook niet onder de naam van Mark Opmeer. Verder vind ik het vervelend dat Opmeer mij persoonlijk aanvalt op de betreffende drie punten, die ik niet persoonlijk onderschrijf en waarvan ik in het artikel, voor de goede verstaander, zekere afstand neem.

In het tweede deel van mijn artikel geef ik wel mijn persoonlijke visie op de vakspecifieke opleiding van wiskundeleraars. Ik breng daar mijn verontrusting naar voren over het feit dat op dit moment aankomende wiskundeleraars veel te weinig tijd en ruimte krijgen zich te bekwamen in de wiskunde en de wiskundendidactiek. Ik geloof dat in dat opzicht Mark Opmeer eerder een medestander is, al was hij niet in staat dat zelf te zien.

Marco Swaen, EFA, Amsterdam