

In de vorige *Nieuwe Wiskrant* besprak Marco Swaen de Handbook-bijdrage van Thomas Cooney en Heide Wiegel. In een ingezonden brief stelt **Mark Opmeer** drie alternatieven tegenover de uitgangspunten van Cooney en Wiegel. Het begin van een brede discussie?

De wiskunde van de wiskundeleraar, een reactie

In de vorige *Nieuwe Wiskrant* heeft Marco Swaen in navolging van het artikel 'Examining the mathematics in mathematics teacher education' van Thomas Cooney en Heide Wiegel in het *Second International Handbook of Mathematics Education* drie uitgangspunten gegeven waar het wiskundeonderwijs op een lerarenopleiding aan zou moeten voldoen. Deze zijn:

- De student moet de wiskunde leren kennen als mensenwerk, dus niet als absoluut, maar als veranderlijk in historisch, maatschappelijk en cultureel perspectief.
- De student moet zich bezighouden met schoolwiskunde, en die op een fundamentele manier gaan begrijpen.
- De student moet zelf de procesmatige kant van wiskunde in uitvoering ervaren.

Hier wil ik drie andere uitgangspunten tegenover stellen:

- De student moet de wiskunde die hij zal moeten doceren op een fundamentele manier gaan begrijpen.
- De student moet leren dat wiskunde zowel absoluut als veranderlijk is.
- De student moet, indien dit enigszins mogelijk is, origineel wiskundig onderzoek gedaan hebben.

Deze uitgangspunten lijken op het eerste gezicht misschien niet zo verschillend van die bij Swaen, maar in het onderstaande zal ik illustreren dat het duo trio's vrijwel diametraal tegenover elkaar staat.

Aan het eind van dit artikel zal ik aangeven hoe uit mijn drie uitgangspunten een concreet curriculum voor het vakinhoudelijke deel van een lerarenopleiding wiskunde volgt.

Absoluut versus veranderlijk

Laten we beginnen met uitgangspunt 1 bij Swaen wiens pendant bij mij (niet toevallig) op 2 staat. Uit het artikel van Swaen blijkt dat hij bij zijn uitgangspunt 1 aan twee dingen denkt: een wetenschapsfilosofische (bestaat wiskunde buiten ons of ontstaat het pas wanneer wij het ontdekken) en een culturele (elitaire westerse blanke mannen tegenover natuurvolkeren en vrouwen). Het eerste is interessant om tijdens de opleiding eens te noemen maar behoort geen centrale plaats te hebben; dat heeft het bin-

nen de wiskunde ook niet. Het tweede zal ik als westerse blanke man maar aan anderen over laten om te bekritisieren. Ik denk bij wiskunde als absoluut en veranderlijk aan het volgende: de stelling van Pythagoras is nu even waar als tweeduizend jaar geleden; in die zin is de wiskunde absoluut. De manier waarop wij nu naar die stelling kijken is echter anders: in Euclides is het nu befaamde *a kwadraat plus b kwadraat is c kwadraat* niet te vinden en in boeken over Hilbertruimten staat een 'stelling van Pythagoras' die aan Pythagoras zeker niet bekend was. In deze zin is wiskunde veranderlijk: de perceptie van 'oude' wiskunde verandert en er komt 'nieuwe' wiskunde bij. Beide aspecten van de wiskunde moet de docent aan zijn leerlingen laten zien en met beide moet hij tijdens zijn opleiding dus zelf in aanraking worden gebracht.

Fundamenteel begrip

Het meest opvallende verschil tussen uitgangspunt 2 bij Swaen en zijn pendant is waarschijnlijk dat ik het woord 'schoolwiskunde' vermijd. Naar mijn mening is er namelijk maar één soort wiskunde. Omdat vorm wel degelijk invloed heeft op inhoud, zouden we woorden als 'schoolwiskunde' en 'academische wiskunde' moeten vermijden. Het is echter niet alleen het woordgebruik waar ik op dit punt met Swaen van mening verschill. Swaen betoogt in zijn artikel het volgende:

'Meer kennis van de academische wiskunde leidt niet automatisch tot een beter begrip van de schoolwiskunde. Blijft het verband met de schoolwiskunde buiten beschouwing dan is de student, eenmaal voor de klas, voor zijn begrip van de stof weer aangewezen op wat hij zich herinnert van zijn eigen schooltijd. En zal hij de stof doceren op de manier zoals hem die ooit onderwezen werd.'

De opleiding van deze fictieve student blijft op tal van punten in gebreke. Niet het verband leggen tussen door de student te verwerven kennis en door de student al verworven kennis is natuurlijk een onderwijskundige doodzonde. De student is blijkbaar ook niet geleerd om zelf verbanden te leggen (toch de essentie van de wiskunde) en hem is blijkbaar de kunst van kritiek en reflectie ook niet bijgebracht. Ik mag hopen dat de Nederlandse oplei-

dingen niet zo slecht zijn dat deze student werkelijk in Nederland rondloopt. Hiermee valt Swaens argument tegen ‘academische wiskunde’ en voor ‘schoolwiskunde’ weg.

Mijn ervaring is dat kennis van ‘hogere wiskunde’ wel degelijk leidt tot fundamenteeler begrip van ‘lagere wiskunde’ en dat dit zelfs de enige manier is om tot fundamenteel begrip te komen. Ik zal dit vanuit twee persoonlijke ervaringen illustreren, een vanuit mijn onderwijservaring en een vanuit mijn onderzoekservaring.

Ik heb onderwijs gegeven in delen van de wiskunde waar ik zelf nooit onderwijs in heb gehad; deze wiskunde moest ik mijzelf dus eerst leren. Het kostte mij beduidend minder moeite dan mijn studenten om deze voor ons beiden nieuwe wiskunde te leren. De extra jaren ervaring met wiskunde helpen dus. Onderwijs geven in delen van de wiskunde waar je zelf geen onderwijs in hebt gehad, is echter niet ideaal. Naar mijn gevoel was mijn onderwijs beter in vakken waarvan ik de inhoud al wel had gehad en was het nog beter als ik ook vervolgvakken van het betreffende vak had gevolgd: met de extra kennis was ik beter in staat dingen in hun perspectief te plaatsen en op meerdere manieren uit te leggen.

Dan nu het voorbeeld over onderzoek. Ik doe onderzoek naar oneindig-dimensionale open dynamische systemen, dit is (ondanks de naamgeving) een generalisatie van eindig-dimensionale open dynamische systemen. Dit is overigens geen generalisatie om de generalisatie, er zijn goede fysische redenen om oneindig-dimensionale open dynamische systemen te bestuderen. De studie van oneindig-dimensionale open dynamische systemen leidt echter ook tot een beter begrip van eindig-dimensionale open dynamische systemen en soms zelfs tot resultaten die nieuw zijn voor eindig-dimensionale open dynamische systemen.

Uit deze persoonlijke ervaringen distilleer ik de volgende les: om de student de wiskunde die hij moet doceren op een fundamenteelere manier te laten begrijpen, moet hij onderwijs krijgen in vakken die in het verlengde liggen van wat hij moet doceren, hierbij moeten de grenzen van de waarheid zoveel mogelijk opgezocht worden.

Constructivistisch wiskundeonderwijs

Voordat ik inga op uitgangspunt 3 bij Swaen zal ik eerst zijn visie op wiskundeonderwijs aan een kritische blik onderwerpen. Swaen besteedt in zijn artikel nogal wat aandacht aan wat hij ‘constructivistisch wiskundeonderwijs’ noemt. Hij plaatst dit tegenover ‘formalistisch wiskundeonderwijs’. Dit is echter een schijntegenstelling. Bij het maken van een wiskundeopgave uit een leerboek of het doen van origineel wiskundig onderzoek bestaat de eerste fase uit vage ideeën, is dus ‘constructivistisch’, en is het eindproduct een duidelijke stelling met een duidelijk bewijs, en dus moet de laatste fase ‘formalistisch’ zijn. Constructivistisch en formalistisch zijn dus niet tegengesteld maar complementair. Overigens bestaat het doen van wiskunde meestal uit meer dan twee fasen: con-

structivistisch en formalistisch wisselen elkaar af (het overkomt mij regelmatig dat ik bij het precies opschrijven van een ‘resultaat’ er achter kom dat ik iets over het hoofd gezien heb en terug moet naar de tekentafel). Swaen is mijns inziens wat hoogdravend door constructivistisch wiskundeonderwijs te omschrijven als: ‘wiskundige begrippen maakt de leerling zich eigen door ze zelf te construeren. Dat kan de leerling alleen op grond van (voor de leerling) betekenisvolle contexten.’ Verwacht hij echt dat leerlingen dingen herontdekken waar de slimste mensen die ooit geleefd hebben jaren over hebben gedaan om te ontrafelen? Ik neem aan van niet, en neem ook aan dat dit ‘zelf construeren’ in hoge mate gestuurd wordt. Dan blijft er van zijn omschrijving van constructivistisch wiskundeonderwijs eigenlijk niets anders over dan de onder vakdidactici zo populaire ‘realistische wiskunde’. Deze realistische wiskunde wordt vaak aangeprezen met het argument dat Nederlandse middelbare scholieren het zo goed doen in internationale vergelijkingen. Dit is echter alleen het geval als gekeken wordt naar ‘gecijferdheid’, zoals bij PISA; bijvoorbeeld bij de International Mathematics Olympiad scoort Nederland uitermate slecht. Ook het feit dat bijna niemand meer wiskunde wil studeren moet te denken geven over de keuze voor ‘realistische wiskunde’ die in het Nederlandse onderwijs gemaakt is.

Wiskunde in uitvoering

Nu wil ik dan ingaan op uitgangspunt 3 bij Swaen. Het voorbeeld dat Swaen aanhaalt waarin de studenten de procesmatige kant van wiskunde in uitvoering moeten ervaren, is geen ‘wiskunde in uitvoering’, het is een voorgerekte opgave. In mijn uitgangspunt 3 bedoel ik dat de student nieuwe wiskunde ontdekt, zoals op de universiteiten van wiskundestudenten in hun doctoraalscriptie verwacht werd. Ik begrijp heel goed dat dit voor studenten aan een HBO-lerarenopleiding misschien te hoog gegrepen is, van universitair opgeleide docenten (zowel bachelors als masters) mag dit echter zeker verwacht worden. Dit is namelijk de enige manier om ‘wiskunde in uitvoering’ echt te beleven.

Resumerend

Tegenover de drie uitgangspunten bij Swaen heb ik drie andere gezet. De uitwerking hiervan geeft heel concreet aan hoe het wiskundig-inhoudelijke deel van de opleiding tot wiskundedocent eruit zou moeten zien:

- Om de student de wiskunde die hij moet doceren op een fundamenteelere manier te laten begrijpen moet hij onderwijs krijgen in vakken die in het verlengde liggen van wat hij moet doceren; hierbij moeten de grenzen van de waarheid zoveel mogelijk opgezocht worden, en moet zowel de absoluteheid als de veranderlijkheid van wiskunde duidelijk gemaakt worden.
- De student moet, indien dit enigzins mogelijk is, origineel wiskundig onderzoek gedaan hebben.

Mark Opmeer, Rijksuniversiteit Groningen