

Wijnvlekken behandelen met laserlicht. Dat komt neer op het dichtschroeien van bloedvaatjes, het liefst zonder de omliggende huid te beschadigen. **Marleen Keijzer** beschrijft een statistische methode, gebaseerd op *random walks* van fotonen, om de optimale bundelbreedte van het laserlicht te vinden.

Monte Carlo en wijnvlekken

Wijnvlekken behandelen met laserlicht

Wijnvlekken zijn aangeboren plekken in de huid waar de bloedvaatjes lokaal groter zijn dan normaal. De vlekken zijn bij de geboorte vaak vlak en lichtroze, maar worden later meestal dikker en donkerder tot aan diepepaars toe. 0,3 tot 0,5 % van de mensen heeft er een of meer. Medisch gezien is het een onschuldige aandoening, maar psycho-sociaal heeft men er vaak wel veel last van. Bij de behandeling van wijnvlekken is het de bedoeling dat de haarvaatjes weer nauw worden of zelfs dichtgebrand worden, terwijl de rest van de huid zo min mogelijk beschadigd wordt, zodat er geen littekenweefsel ontstaat. Het is vastgesteld dat dat het effectiefst gaat met behulp van laserlicht. Vaak wordt er geel licht van een dye-laser gebruikt (577 nm), liefst met hele korte belichtingstijden van 1 tot 10 milliseconde. Het gele licht absorbeert heel goed in het bloed dat in de overtollige vaatjes van de wijnvlek zit. Het bloed wordt dan heet en brandt van binnenuit de bloedvaatjes dicht. Als het lichaam na een aantal dagen de schade hersteld heeft, is de kleur van de wijnvlek meestal een stuk lichter. Het gele licht wordt heel weinig geabsorbeerd in de rest van de huidcellen, die dan ook niet onomkeerbaar beschadigd worden bij de behandeling.

Uit experimenten (Tan et al, 1998) bleek dat er nog een variabele geoptimaliseerd kon worden: de diameter van de laserbundel. Moet de laserbundel smal zijn om individuele bloedvaatjes te belichten of juist breed, wat bij de experimenten beter leek te gaan? We wilden het antwoord op deze vraag vinden, maar ook de reden begrijpen. En om nu niet veel kostbare experimenten te hoeven doen, hebben we de lichtverdeling bij verschillende bundeldiameters gesimuleerd.

Lichtverstrooiing in weefsel



fig. 1 Verstrooiingspatronen voor licht (vereenvoudigd)

Zichtbaar licht wordt in weefsel geabsorbeerd, maar vooral ook vele malen verstrooid. Die verstrooiing gaat niet in alle richtingen even sterk, maar gaat volgens een patroon: veel bijna voorwaarts en weinig onder grote hoeken (zie figuur 1).

De intensiteit van het licht (ofwel 'radiantie') hangt af van de plaats in het weefsel (\mathbf{r}) en van de richting van waaruit je naar die plaats kijkt: \mathbf{s} (met $\|\mathbf{s}\| = 1$). De intensiteit is gedefinieerd als $L(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t)$, waarin t de tijd is. De intensiteit kan bijvoorbeeld gemeten worden met een glasfiber met een kleine openingshoek. De eenheid van L is $\text{W}/\text{sr}/\text{cm}^2$: Watt, per steradian (van de openingshoek van de fiber), per vierkante centimeter (van het oppervlak van het fibereindje).

De lichtverdeling wordt beschreven door de transportvergelijking en die vergelijking wordt afgeleid door eerst een balans op te stellen voor een klein volume V in het weefsel. In dat volume wordt gedurende een korte tijd, Δt , de energie van het licht in richting \mathbf{s} bekeken. Tijdens dat korte tijdsinterval Δt verandert de intensiteit met een hoeveelheid ΔL . De totale verandering in energie (in richting \mathbf{s} over het hele volume V is dan:

$$\frac{1}{c} \int_V \Delta L(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) dV \quad (1)$$

Deze verandering in energie wordt veroorzaakt door vijf termen. Allereerst verdwijnt er een hoeveelheid energie doordat licht (van richting \mathbf{s}) door het oppervlak O van het volume V naar buiten verdwijnt. Vervolgens kan de oppervlakte-integraal over O met de stelling van Gauss omgezet worden in een volume-integraal over V :

$$\begin{aligned} & -\Delta t \int_O L(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) \mathbf{s} \cdot d\mathbf{O} \\ & -\Delta t \int_V \text{Div}[L(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) \mathbf{s}] dV = \\ & -\Delta t \int_V \mathbf{s} \cdot \nabla L(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) dV \end{aligned} \quad (2)$$

Dan wordt tijdens tijdsinterval Δt een hoeveelheid energie uit richting \mathbf{s} geabsorbeerd (met een absorptiekans per centimeter μ_a) of verstrooid naar een andere richting (met kans μ_s):

$$-\Delta t \int_V \mu_a L(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) dV - \Delta t \int_V \mu_s L(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) dV \quad (3)$$

Daar komt de energie van het licht dat uit andere richtingen \mathbf{s}' in richting \mathbf{s} wordt verstrooid nog bij. Die verstrooiing gaat volgens een kansverdeling $p(\mathbf{s}', \mathbf{s})$ (zie ook figuur 1):

$$+ \Delta t \int_V \mu_s \int_{4\pi} p(\mathbf{s}', \mathbf{s}) L(\mathbf{r}, \mathbf{s}', t) d\Omega dV \quad (4)$$

En als laatste kan er nog een energiebron in volume V zijn met sterkte ε :

$$+ \Delta t \int_V \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) dV \quad (5)$$

De zes termen samen vormen de energiebalans. Deelt men deze door Δt en neemt men dan de limiet $\Delta t \rightarrow 0$, dan volgt, wanneer de volume-integralen weggelaten worden, de transportvergelijking:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t)}{\partial t} = -\mathbf{s} \cdot \nabla L(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) - (\mu_a + \mu_s) L(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) + 1 \mu_s \int_{4\pi} p(\mathbf{s}', \mathbf{s}) L(\mathbf{r}, \mathbf{s}', t) d\Omega + \varepsilon \quad (6)$$

Transportvergelijking (6) is een integro-differentiaalvergelijking met in principe zes onafhankelijke variabelen: de tijd, drie variabelen voor de plaats en twee voor de richting.

In het vraagstuk wat de optimale diameter van de laserbundel is bij het belichten van een bloedvatje, kunnen we het probleem vereenvoudigen tot een tweedimensionale geometrie: een richting de huid in, en de tweede richting dwars op het bloedvatje en evenwijdig aan het huidoppervlak. Wat er in de derde richting gebeurt is niet interessant voor de vraagstelling, en de tijdsafhankelijkheid evenmin: we beschouwen verder alleen de stationaire transportvergelijking in een tweedimensionale geometrie.

Oplosmethoden

Er zijn grofweg drie methoden om de (stationaire) transportvergelijking in een twee- of driedimensionale geometrie op te lossen. Bij de eerste twee methoden wordt (de hoekverdeling van) de lichtintensiteitsfunctie L vereenvoudigd. Bij de derde methode wordt de intensiteit niet benaderd, maar statistisch geschat.

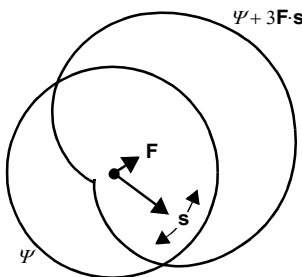


fig. 2 De lichtintensiteit in de diffusiebenadering

I. Met behulp van sferisch harmonische functies

Bij de eerste methode wordt de verdeling over de richtingen van het licht benaderd door een reeks sferisch harmonische functies. Een eenvoudige benadering is de 'diffusiebenadering', waarbij alleen de eerste twee sferisch

harmonische functies worden meegenomen:

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \cong \frac{1}{4\pi} \Psi(\mathbf{r}) + \frac{3}{4\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{s} \quad (7)$$

Hierin is Ψ de 'radiantie', dat wil zeggen de lichtintensiteit geïntegreerd over alle ruimtehoeken \mathbf{s} . Ψ vermenigvuldigd met de absorptiecoëfficiënt μ_a geeft de dichtheid van de geabsorbeerde energie.

Het tweede moment van de intensiteit is vector \mathbf{F} , de flux:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} L(\mathbf{r}, \mathbf{s}) d\Omega, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \mathbf{s} L(\mathbf{r}, \mathbf{s}) d\Omega \quad (8)$$

Als benadering (7) wordt gebruikt, dan leveren de eerste twee momenten van de transportvergelijking een stelsel differentiaalvergelijkingen op dat niet meer afhangt van richting \mathbf{s} :

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mu_a \Psi(\mathbf{r}) + \varepsilon_1(\mathbf{r}) \quad (9)$$

$$\nabla \Psi(\mathbf{r}) = -3\mu_{tr} \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \varepsilon_2(\mathbf{r}) \quad (10)$$

en samengevoegd wordt dit de diffusievergelijking:

$$\nabla \cdot \nabla \Psi(\mathbf{r}) - k^2 \Psi(\mathbf{r}) = \varepsilon_3(\mathbf{r}) \quad (11)$$

In bovenstaande vergelijkingen staan μ_{tr} en k voor weefselconstanten die afhangen van μ_a , μ_s en $p(\mathbf{s}', \mathbf{s})$. De $\varepsilon_i(\mathbf{r})$ representeren brontermen.

Diffusievergelijking (11) kan ook in ingewikkeldere geometrieën opgelost worden met behulp van een eindige differentie- of eindige elementenmethode. De op deze manier gevonden lichtverdelingen zijn redelijk goed, alleen zorgt het verwaarlozen van de hogere momenten van de intensiteit ervoor dat ook alle steile spatiele gradiënten in de oplossing afgezwakt worden. In isotrope media komen die minder voor, maar in menselijk weefsel, dat het licht sterk voorwaarts verstrooit, gaan met deze benadering soms belangrijke details van de oplossing verloren.

II. Discrete-ordinates methoden ofwel S_n -methoden

Bij de tweede groep methoden wordt de verdeling over de richtingen van het licht gediscretiseerd tot een beperkt aantal richtingen. In plaats van transportvergelijking (6) krijg je voor elke richting \mathbf{s}_i een differentiaalvergelijking die alleen van de plaats \mathbf{r} afhangt. De verstrooiingsintegraal wordt een gewogen som van intensiteiten uit alle richtingen en zorgt er zo voor dat de differentiaalvergelijkingen gekoppeld zijn. S_n -methoden worden veel gebruikt om neutrontransport te modelleren. (Voor neutronen moet het energiespectrum ook nog gediscretiseerd worden.) Deze programma's zijn ook bruikbaar om lichtverstrooiing in menselijk weefsel te simuleren, maar ook hier moet er goed opgelet worden dat het sterk voorwaartse karakter van de lichtverstrooiing voldoende meegenomen wordt.

III. Monte Carlomethode

De Monte Carlomethode geeft nog weer een andere manier van integreren. De verwachtingswaarde van een stochastische variabele is gedefinieerd als de integraal over alle mogelijke waarden van die variabele, vermenigvuldigd met de kans erop. Met de Monte Carlomethode schat

je de verwachtingswaarde door de gemiddelde waarde van een steekproef van die variabele te nemen en dat gemiddelde is dus meteen een schatting voor de integraal. Een klassiek voorbeeld is de naald van Buffon uit 1777: een statistische steekproef om de waarde van π te schatten. Neem een naald met lengte λ en gooi die heel vaak willekeurig op een gestreepte doek waarop de strepen λ uit elkaar liggen. Vergelijk het aantal keren dat de naald op een lijn terechtkomt met het totale aantal keren dat de naald gegooid is. Deze aantallen zijn een schatting voor de verhouding $2 : \pi$.

Met de Monte Carlomethode kost het meestal veel (computer)tijd om tot een oplossing te komen waarvan de statistische fout klein genoeg is, maar het grote voordeel is dat de schatting van de oplossing zuiver is. Een ander voordeel is dat materiaaleigenschappen niet per se homogeen hoeven te zijn. Het inbouwen van ingewikkelde geometrieën is relatief eenvoudig. Voor het beantwoorden van de vraag over de ideale bundeldiameter voor de wijnvlekbehandelingen werd gekozen voor de Monte Carlo methode, omdat daarmee het effect van een bloedvaatje relatief eenvoudig en zuiver geschat kan worden.

Random Walk

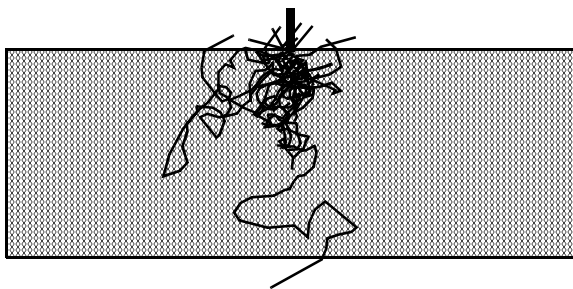


fig. 3 De gesimuleerde paden van dertig fotonen in menselijk weefsel

De transportvergelijking kan ook in een zuivere integraalvorm worden geschreven (Case and Zweifel, 1967). De stationaire versie daarvan is:

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \int_{R=0}^{\infty} \exp(-[\mu_a + \mu_s]R) \mu_s \int_{4\pi} p(\mathbf{s}', \mathbf{s}) L(\mathbf{r} - R\mathbf{s}, \mathbf{s}') d\Omega' dR + \int_{R=0}^{\infty} \exp(-[\mu_a + \mu_s]R) \varepsilon(\mathbf{r} - R\mathbf{s}, \mathbf{s}) dR \quad (12)$$

In deze integraalvergelijking staat R voor de padlengte. De laatste term in deze vergelijking representeert het licht dat met richting \mathbf{s} direct van de lichtbronnen ε op afstand $\mathbf{r} - R\mathbf{s}$ komt, en dat de reis van de bron naar positie \mathbf{r} overleefd heeft. Onderweg heeft het licht namelijk maar een kans van $\exp(-[\mu_a + \mu_s]R)$ om niet geabsorbeerd of in een andere richting verstrooid te worden. De eerste integraalterm in vergelijking (12) representeert op dezelfde manier het licht dat op afstand $\mathbf{r} - R\mathbf{s}$ vanuit andere richtingen in richting \mathbf{s} verstrooid is.

Met de Monte Carlomethode wordt de exacte oplossing van deze integraalvergelijking iteratief statistisch geschat. Hiervoor wordt er een steekproef genomen van de

verzameling van alle mogelijke paden die lichtdeeltjes (fotonen) die uit de laser komen kunnen afleggen in het weefsel. Tijdens de 'random walk' of 'dronkemansloop' van de fotonen worden dus verschillende kansverdelingen bemonsterd: de verdeling over plaats en richting van de lichtbron, de kansverdelingen om geabsorbeerd over verstrooid te worden en de verdeling van de verstrooiingshoek (zie figuur 3).

In het algemeen gebeurt het bemonsteren van een kansverdeling met behulp van random getallen, reële getallen die uniform verdeeld zijn op $[0,1]$ en die in de meeste programmeertalen (quasi-random) gegenereerd kunnen worden. Als $x \in [a, b]$ de stochastische variabele is en $p(x)$ de kansverdeling daarvan, dan kan met behulp van een random getal, RND , als volgt een steekproef x_{rnd} uit deze verdeling getrokken worden. De integraal van een functie met een variabele bovengrens is namelijk wel uniform verdeeld, dus:

$$RND = \frac{\int_a^{x_{rnd}} p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx} \quad (13)$$

Vaak is het mogelijk om deze vergelijking te herschrijven, zodat x_{rnd} expliciet als een functie van RND geschreven kan worden. Een voorbeeld: het trekken van een padlengte $R \in [0, \infty]$, de afstand die een foton af kan leggen zonder geabsorbeerd of verstrooid te worden. De (niet-genormeerde) kansverdeling voor R is $p(R) = \exp(-[\mu_a + \mu_s]R)$.

De random walks van de fotonen in het weefsel worden gesimuleerd door allereerst de hoekverdeling en de spatiale verdeling van de lichtbron te bemonsteren. Voor ons vraagstuk is dat eenvoudig: het laserlicht valt loodrecht op het huidoppervlak en het is spatiaal uniform verdeeld over de bundeldiameter.

Als het gesimuleerde foton eenmaal het weefsel binnen is, wordt het pad voortgezet met tussen de interactieplaatsen stappen van verschillende lengtes R (getrokken als boven beschreven) in richtingen \mathbf{s} die weer getrokken zijn uit de verdeling $p(\mathbf{s}', \mathbf{s})$. In elke interactieplaats zou het foton geabsorbeerd of verstrooid kunnen worden, maar in het geval van absorptie zou op deze manier het pad daar meteen eindigen, en zouden veel van de paden relatief kort worden. Het is daarom efficiënter om fotonen met gewichten te gebruiken. Op elke interactieplaats wordt $\mu_a / [\mu_a + \mu_s]$ van het gewicht van het foton achtergelaten als geabsorbeerde energie, en het foton wordt met de rest van het gewicht altijd verstrooid in een nieuwe richting. Als het gewicht van het foton is gereduceerd tot bijvoorbeeld een tienduizendste van het oorspronkelijke gewicht, dan wordt het pad van het foton afgebroken en wordt er een nieuw foton gelanceerd. Zie figuur 3 voor een aantal gesimuleerde paden.

Als een foton een grensvlak tegenkomt tussen media met verschillende brekingsindices, dan wordt het of doorgelaten, of gereflecteerd volgens de kansverdeling die volgt

uit de wetten van Fresnel. (In figuur 3 zijn een paar van die gebeurtenissen te zien.) Met een random walk is het dus ook mogelijk om relatief dichtbij de fysische kant van het vraagstuk te blijven.

Simulaties voor de behandeling van wijnvlekken

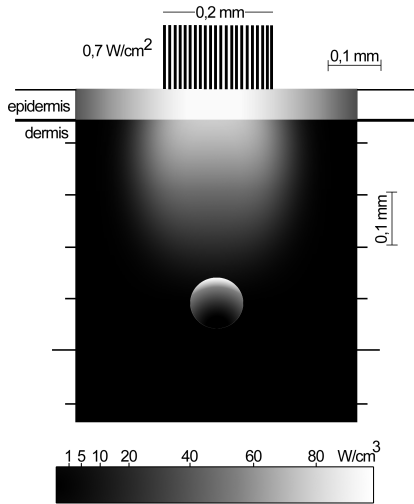


fig. 4 Geabsorbeerde energiedichtheden in huid voor een 577 nm laserbundel met een diameter van 0.2 mm

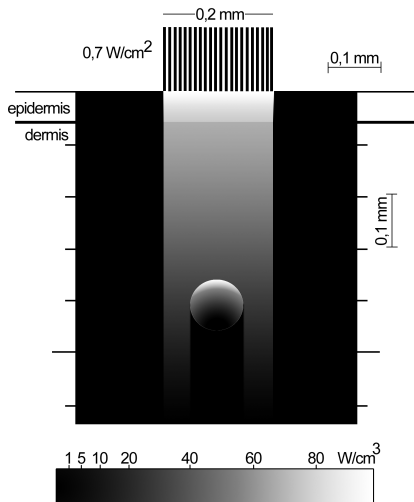


fig. 5 Ter vergelijking met figuur 4: de energieverdeling in het hypothetische geval dat het weefsel het licht niet zou verstrooien.

Terug naar het vraagstuk ‘Wat is de ideale bundeldiameter voor een laserbehandeling van wijnvlekken?’. Als gesimuleerde geometrie werd een stukje huid genomen met daarin een bloedvatje dat representatief is voor een wijnvlek: het vaatje lag ongeveer 0.4 mm diep en had een doorsnede van 0.1 mm. De opperhuid (epidermis) en de lederhuid (dermis) hebben bij de gebruikte golflengte (577 nm) nogal verschillende optische eigenschappen en

daarom werden beide lagen gesimuleerd. De gesimuleerde opperhuid had een dikte van 0.06 mm. De absorptiecoëfficiënt van opperhuid, lederhuid en bloed zijn respectievelijk 37/cm, 2.2/cm en 354/cm. De verstrooiingscoëfficiënten zijn respectievelijk 480/cm, 210/cm en 210/cm. De g-waarde van de benaderde verstrooiingsfunctie (zie figuur 1) werd voor alledrie 0.79 genomen. Het bloed heeft net een andere brekingsindex dan de rest van de huid, 1.33 in plaats van 1.37 en omdat eventuele reflecties aan scheidingsoppervlakken in het weefsel toch al in het random walk programma ingebouwd waren, werd dat verschil ook maar meteen meegenomen.

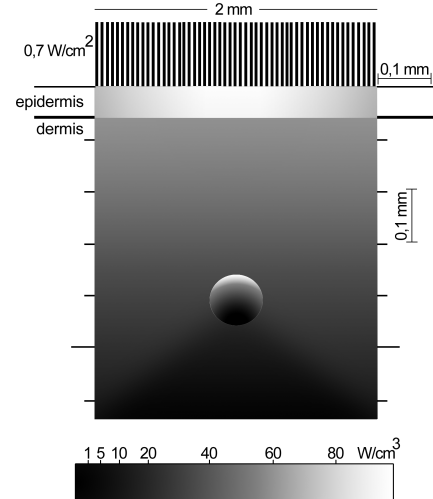


fig. 6 Geabsorbeerde energiedichtheden in huid voor een 577 nm laserbundel met een diameter van 2 mm

Voor elke van de gesimuleerde bundeldiameters werd het Monte Carloprogramma meerdere keren voor 5.000 tot 20.000 fotonen gerund (de figuren 4, 5 en 6 zijn elk gemaakt met 20.000 fotonen). De meerdere runs waren nodig om (95%-)betrouwbaarheidsintervallen voor de numerieke resultaten te kunnen schatten. Omdat we geïnteresseerd waren in de hoeveelheid geabsorbeerde energie, E , werd de berekende radiantie, $\Psi(\mathbf{r})$ (zie ook vergelijking (8)), vermenigvuldigd met de lokale absorptiecoëfficiënt.

Voor een lichtbundel met een diameter van 0.2 mm is het resultaat te zien in figuur 4. Het 577 nm licht wordt inderdaad selectief geabsorbeerd in het bloedvatje en niet in de omliggende lederhuid. Schade aan de huid zou wel veroorzaakt kunnen worden door de redelijk hoge absorptie in de opperhuid. De wijnvlekbehandeling wordt verbeterd als de hoeveelheid energie geabsorbeerd in het bloedvatje verhoogd wordt ten opzichte van de hoeveelheid geabsorbeerde energie in de opperhuid.

Om de resultaten te kwantificeren werden twee grootheden ingevoerd: $E_{\text{epidermis}}$, de gemiddelde waarde van de geabsorbeerde energiedichtheden in de opperhuid (onder de laserbundel) en E_{vessel} idem, maar dan voor het bloedvatje. De 0.2 mm brede opvallende bundel uit figuur 6 is 1 W/cm^2 . De bijbehorende $E_{\text{epidermis}}$ is $52.3 \pm 0.4 \text{ W/cm}^3$ en E_{vessel} is $22.0 \pm 0.5 \text{ W/cm}^3$. In de epidermis wordt dus

2.4 keer meer energie geabsorbeerd per volume-eenheid dan in het bloedvatje.

Om te bekijken hoe belangrijk de verstrooiing in dit geval is, rekenden we ook het hypothetische geval zonder verstrooiing door. Hiervoor werd de absorptiecoëfficiënt zo geschaald, dat het totale lichttransport ongeveer hetzelfde bleef. Het resultaat is weergegeven in figuur 5. In dit hypothetische geval neemt de hoeveelheid licht alleen maar af met de diepte. Er is geen terugverstrooid licht dat de hoeveelheid in het bloed geabsorbeerd licht kan vergroten. De hoeveelheid energie die in dit geval met dezelfde belasting voor de opperhuid in het vaatje belandt is bijna drie keer zo klein. Ook werpt het bloedvat een diepe schaduw naar beneden en blokkeert zo de belichting van eventuele diepere vaten. Het is dus erg gunstig voor de behandeling dat het licht zo verstrooid wordt.

De verstrooiing werkt nog meer in het voordeel van de behandeling als de bundeldiameter vergroot wordt. In figuur 6 is de energieverdeling weergegeven bij een tien keer zo grote bundeldiameter (2 mm). Net als voor figuur 5 is de opvallende lichtintensiteit iets verlaagd, zodat de hoeveelheid energie geabsorbeerd in de opperhuid,

$E_{\text{epidermis}}$, hetzelfde is als voor de smalle bundel uit figuur 4.

Maar nu, omdat er zoveel licht van de buitenkant van de bundel naar het bloedvatje verstrooid wordt, is de absorptie in het vaatje veel hoger: E_{vessel} wordt $65.4 \pm 2.3 \text{ W/cm}^3$, hetgeen drie keer zo hoog is als met de smalle bundel.

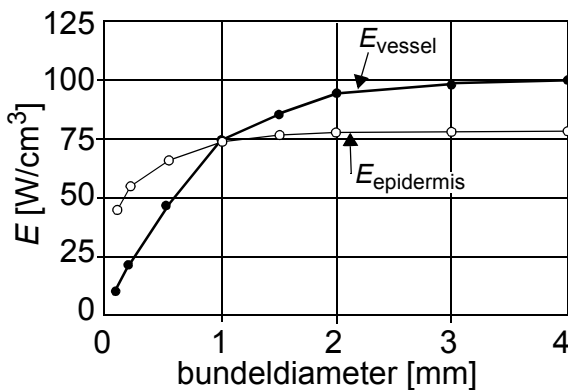


fig. 7 Gemiddeld geabsorbeerde energie in het bloedvat, respectievelijk in de opperhuid als functie van de diameter van de 1 W/cm^2 laserbundel met golflengte 577 nm

In figuur 7 staan links $E_{\text{epidermis}}$ en E_{vessel} uitgezet tegen de bundeldiameter. In deze figuur is de sterkte van de lichtbron gelijk gehouden: 1 W/cm^2 . De geabsorbeerde energie in het bloedvat stijgt duidelijk sterker met de bundeldiameter dan de geabsorbeerde energie in de opperhuid. Voor de behandeling is het dus gunstig om een brede bundel te gebruiken, waarbij met 'breed' ten minste 1 mm breed wordt bedoeld.

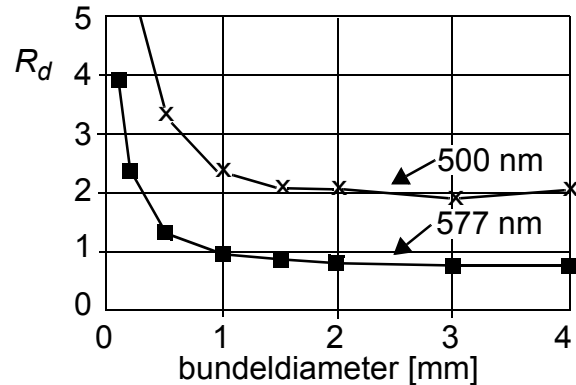


fig. 8 Rechts: Het quotiënt R_d van de grootheden in de figuur links. Ter vergelijking ook hetzelfde quotiënt voor 500 nm laserlicht

Misschien ten overvloede is in figuur 8 het quotiënt van de gemiddelde energiedichtheden uit de linkerfiguur weergegeven aan de opperhuid tijdens de behandeling. De conclusie is duidelijk: bredere bundels zullen grotere en diepere bloedvatjes dicht kunnen branden, zonder dat de opperhuid extra gevaar loopt. Ter vergelijking staat in figuur 8 dezelfde maat voor de schade, maar dan niet voor het 577 nm -licht van een dye-laser, maar voor het 500 nm -licht van een van de Argon-laserlijnen. Een wijnvlekbehandeling met een Argon-laser maakt de kans op schade aan de opperhuid dus twee keer zo groot.

Deze Monte Carlosimulaties bevestigen zo het toch beperkte aantal experimenten van Tan et al (1998). En, wat misschien nog wel belangrijker is, met behulp van de simulaties kon ook uitgezocht worden waarom een brede bundeldiameter beter werkt.

Dit artikel verscheen eerder in de bundel van de CWI vakantiecursus 2002.

Marleen Keijzer
Faculteit Informatietechnologie en Systemen,
Technische Universiteit Delft