De recreatierubriek van **Aad Goddijn** neemt u mee terug naar de kinderjaren toen ook u ongetwijfeld via al dan niet ingewikkelde patronen over stoeptegels liep. Met waarschijnlijk, hopelijk wellicht, andere gedachten dan die waar u in deze rubriek tot aangespoord wordt...

Tegeldansjes in een mooie droom

Recreatierubriek

Volg het ritme van de tegels

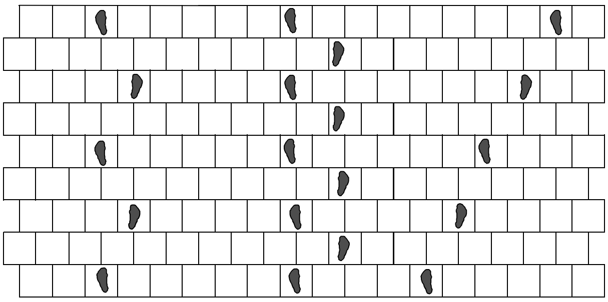

fig. 1 Zó over de stoep lopen, of zó, of zó

Op de leeftijd waarop de benen lang genoeg zijn om drie tegels over te slaan, doen we het vaak niet meer. Maar allemaal hebben we het ooit gedaan.
Waarom zouden we eigenlijk stoppen bij de hoek van de straat, of omdat het een beetje te voorspelbaar wordt?
Hinkel nog eens mee naar de speciale tegelvloer onder op deze bladzijde. Die is 8 bij 21 tegels groot, en een beetje anders gelegd dan de modale stoep van toen, het is meer een stukje van het standaard vierkantenrooster. De getrokken diagonaal gaat van uiterste hoekpunt naar uiterste hoekpunt. Sommige tegels steunen maar een klein stukje lijn met een klein tegelhoekje, andere helpen de lijn dwars over een volle tegel; het ziet er eigenlijk tamelijk onregelmatig uit.
Deze diagonaal gaat over 28 tegels. Dat is na te tellen, maar een argument dat het aantal ook door uitrekenen van $8 + 21 - 1$ gevonden kon worden, is wel te vinden. Tussen de twee hoekpunten worden namelijk 7 horizontale en 20 verticale lijnen gepasseerd. Omdat 8 en 21 geen gemeenschappelijke deler hebben, loopt de diagonaal niet over een tegelhoekpunt en passeren we nooit twee lijnen tegelijk. Die $7 + 20$ lijnen zijn dus juist alle grenzen tussen de tegels die we op de diagonaalroute tegenkomen. Er is uiteraard één tegel meer dan er tegelovergangen zijn, en zo komen we op $7 + 20 + 1$ of, met de oorspronkelijke getallen wat zichtbaarder, op $8 + 21 - 1$.
In een mooie droom zien we ons die diagonaal in 29 *gelijke* passen doorlopen, waarbij we juist één voetje zetten op elk van de 28 te passeren tegels.
Deze keer maakt de wiskunde dromen waar! Zie als voorbeeld de kleine stipvormige voetafdrukken in de figuur. Prachtig toch, op elke tegel waar de lijn over loopt, staat precies één punt, en de punten houden gelijke onderlinge afstanden aan.

Hier volgt dan de eerste opgave van deze rubriek, bewijzen dat het ook met andere tegelrechthoeken dan die van 8 bij 21 kan.

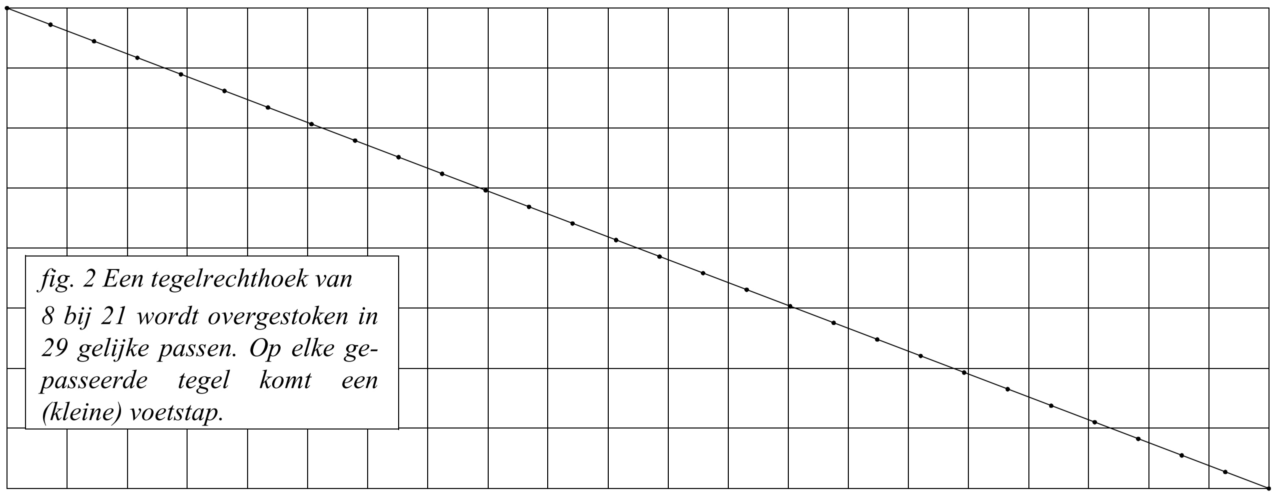

fig. 2 Een tegelrechthoek van 8 bij 21 wordt overgestoken in 29 gelijke passen. Op elke gepasseerde tegel komt een (kleine) voetstap.

Opgave 218
Toon aan dat het op elke rechthoekige tegelvloer van *p* bij *q* tegels, waarbij *p* en *q* geen gemene deler hebben, lukt om in *p* + *q* gelijke passen met puntvoeten over de diagonaal te lopen, waarbij alle tegels waar de diagonaal over loopt juist één keer geraakt worden.

Het lijkt verfijnd balanceren op die kleine stipjes. Maar het valt wel mee, echt puntvormig voetenwerk is namelijk niet nodig. Een normale stoeptegel is 30 bij 30 cm. Het blijkt in de praktijk op deze stoep dat de 28 tussenpunten allemaal minstens 1 cm van de roosterlijnen afliggen. Dat maakt dat er vierkantjes van 2 bij 2 cm, met de centra op de gegeven punten beschikbaar zijn. Dat moet te doen zijn voor een goed getrainde ballerina op spitzen.

We spreken nu verder maar wat wiskundiger van een rooster, roosterlijnen en roosterpunten. Het woord 'tegels' gebruiken we net als tevoren. De plekken waar de passen gezet worden zijn voortaan echte punten, soms tussenpunten, voetpunten of stappunten genoemd.

Opgave 219
Bereken in de situatie van opgave 218 de minimumafstand van de tussenpunten tot de roosterlijnen. Toon aan dat deze minimumafstand door juist twee tussenpunten wordt gerealiseerd.

Oneindige tegelvelden, periodiciteit

Jammer is wel dat de wandeling op een roosterpunt begint en eindigt. Je zou eigenlijk over een schuine lijn oneindig ver willen kunnen doorlopen met vaste paslengte, steeds elke tegel waar de lijn doorloopt eenmaal aantippend op de tegel zelf, niet op de rand of erger nog, een hoekpunt.

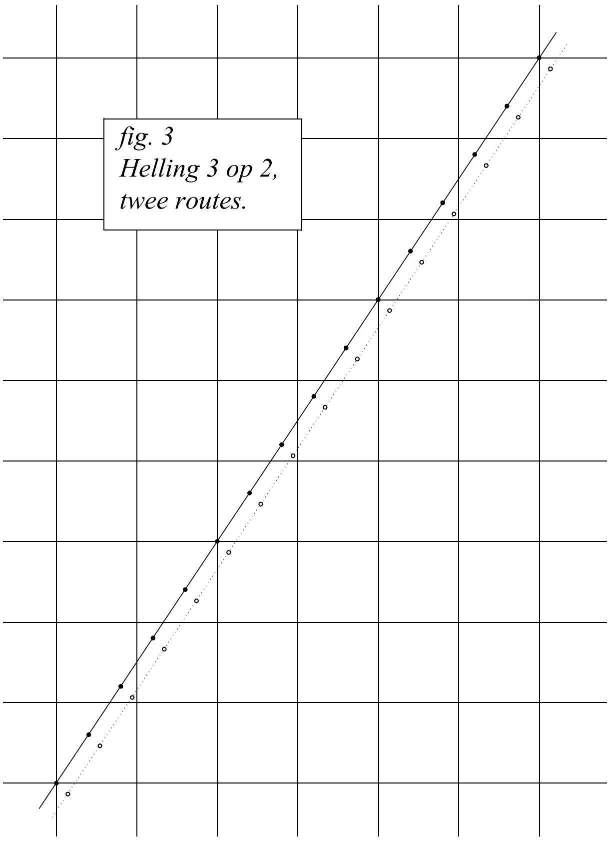
fig. 3
Helling 3 op 2, twee routes.

In de figuur 3 is het geval $p = 2$ en $q = 3$ afgebeeld, en wel met drie etappes achter elkaar. Er worden dus onderweg roosterpunten getroffen. De tegelvloer is nu eindeloos. Vlak ernaast is een gestippelde lijn getekend met stappunten erop. Dat is de oorspronkelijk wandeling, maar een klein stukje opgeschoven. Uit opgave 219 kan worden afgeleid dat een klein stukje verschuiven mogelijk is, waarbij elke voetstap op zijn eigen tegel blijft. Wel even op de richting van het schuiven letten, anders ontstaan problemen bij de punten die eerst roosterpunten waren. In deze figuur moesten we naar linksboven of rechtsonder schuiven. De verschoven kopie is beter dan het origineel: het is duidelijk dat je over de nieuwe lijn tot in het oneindige kunt stappen!
De periodiciteit van de situatie is duidelijk; als we over de verschoven lijn stappen op de aangegeven punten, vinden we na vijf stappen het eerdere 'landschap' van roosterlijnen precies weer terug. Onze nieuwe lijn was slechts een klein stukje verschoven. Dat kan anders. Want:

Opgave 220
Toon aan:
Op elke lijn die het rooster snijdt volgens een hoek met rationale tangens is een wandeling met gelijke stappen mogelijk, die elke tegel waar de lijn door loopt een keer aantipt. Deze wandelingen hebben een periodieke structuur: na een aantal stappen staat het voetpunt weer op precies dezelfde relatieve positie op de tegel als eerder.

Irrationaal is oneindig afwisselend!

In de figuur 4 start de lijn in het roosterpunt linksonder. De tangens van de hellingshoek is nu $\sqrt{2}$, dus niet meer rationaal. Dat betekent in ieder geval dat de lijn geen enkel ander roosterpunt aandoet.
Kunnen we nu ook weer een wandeling over de lijn maken met gelijke passen en op elke onderliggende tegel juist één stap? De figuur suggereert nadrukkelijk 'Ja'.

Opgave 221
Bepaal de paslengte die bij figuur 4 hoort exact.

Het moet er ooit van komen, het bewijs dat het inderdaad lukt, zo'n regelmatige irrationale wandeling ...
Iets formeler gesteld:

Opgave 222
Zij *l* een lijn die slechts door één roosterpunt, zeg P, gaat. Dan kan er op *l* een verzameling punten worden aangegeven, met de volgende eigenschappen:
– de punten liggen op onderling gelijke afstanden,
– binnen elke tegel waar de lijn over loopt ligt precies één punt van de verzameling.
Er is maar één zo'n verzameling mogelijk, *P* behoort er

toe, en P is het enige punt van de verzameling dat niet binnen een tegel ligt, maar op een roosterlijn.

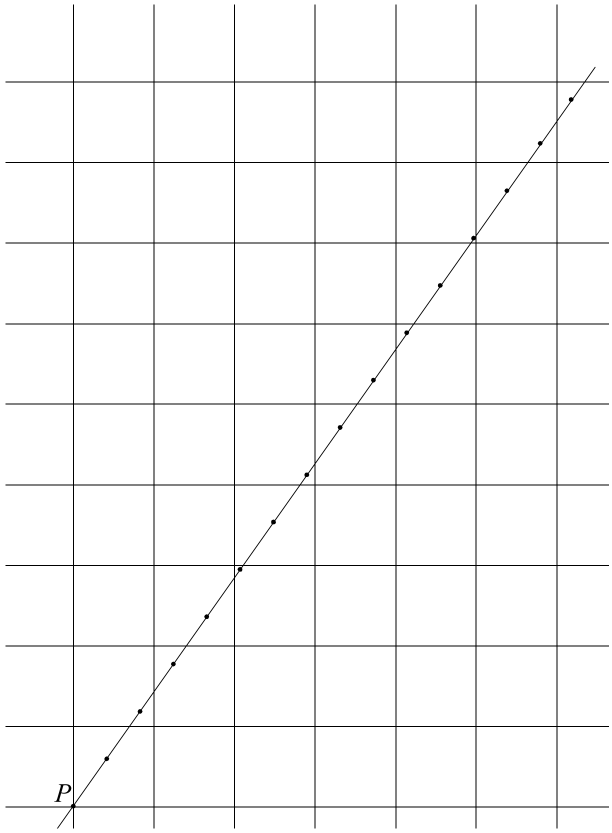

fig. 4 Wandelen met tangens gelijk aan $\sqrt{2}$

Dit lijkt aanmerkelijk lastiger dan al het voorafgaande, maar is zeker oneindig veel verbazingwekkender dan het regelmatige geval van opgave 218.
Bekijk het maar eens als volgt. We glijden met vaste snelheid over deze schuine lijn *l*. Dan passeren we op gezette tijden een horizontale roosterlijn. Deze passeermomenten hebben een straf ritme, de afstanden die we tussen de passeermomenten afleggen, zijn immers gelijk. Hetzelfde geldt voor het passeren van de verticale lijnen. Ook hier een straf ritme, maar een andere periode dan het ritme van de horizontale lijnen. Sterker nog: de twee afstanden op de lijn (tussen horizontale of tussen verticale roosterlijnsnijdingen) hebben een irrationale verhouding en de superpositie van de twee periodieke patronen vormt nu een niet-periodiek geheel. Er ontstaat na de start immers nooit meer een gezamenlijk treffen; er is geen enkele herhaling in het gezamenlijk patroon van passeren van horizontale en verticale roosterlijnen.
Deze lijn loopt door precies één roosterpunt, maar komt wel heel dicht in de buurt van andere roosterpunten. Gevolg is dat de lijn over sommige tegels maar een héél kort stukje loopt, en daarmee is bedoeld: kies een kleine lengte, maar wel groter dan nul, dan is er een tegel te vinden waar de lijn wél overheen gaat, maar kórter dan die gekozen lengte. Dat betekent direct dat er met de verzameling punten op de lijn niet te schuiven valt zoals bij het periodieke geval. Het gaat namelijk altijd ergens mis. Hoe weinig we ook schuiven, er zijn tegels waar het fataal afloopt met het eerder aangewezen punt op die tegel.
Het is een wonder dat het nog lukt zoals in opgave 222.

Er zijn nog veel meer lijnen!

Neem nu eens een lijn in gedachten die door geen enkel roosterpunt gaat.
Kies maar een midden tussen twee roosterpunten en een hoek met irrationale tangens, en we hebben er al een te pakken. Eigenlijk zijn de meeste lijnen van deze soort, al klinkt dat misschien een beetje vaag. (Met wat maattheorie is de bewering hard te maken.)
We hebben nu bar weinig gegevens, geen mooie tangens, geen enkel roosterpunt om op te beginnen. En toch ....

Opgave 223
Zij *l* een lijn die door geen enkel roosterpunt gaat en die een hoek maakt met het rooster waarvan de tangens irrationaal is.
Bewijs: er bestaat een verzameling punten op de lijn met de volgende eigenschappen:
- de punten liggen op onderling gelijke afstanden;
- binnen elke tegel waar de lijn over loopt ligt precies één punt.

Dit is de ultieme wandeling op de oneindige stoep, hier heeft het kind in ons vroeger altijd (onbewust) naar verlangd. Een eeuwig wisselend landschap van roosterlijnen, geen te doorsteken roosterpunten, maar wel een regelmatige ritmische tred over alle tegels die door de lijn worden overgestoken.

Wakker worden

In deze rubriek werd u meegenomen van lijn naar lijn. Van rationaal naar irrationaal. Van gesteund door roosterpunt(en) naar helemaal los van alles. De suggestie is daarbij gewekt dat het steeds moeilijker en moeilijker werd, zodat bij opgave 223 de droom een nachtmerrie wordt: eeuwig zoeken naar een verloren zandkorrel op een hele grote stoep.
Wordt dan snel wakker. Weg met die tegels, opstapelen in de hoek. Maar kijk dan vooral nog even waar al die tussenpunten op de tegels terechtkomen.

Ik ben benieuwd naar reacties!
Aan het bekende redactieadres of direct per email aan A.Goddijn@fi.uu.nl.

Aad Goddijn, Freudenthal Instituut, Utrecht