

In het kader van het WELP-project is onderzocht in hoeverre applets een rol kunnen spelen bij de begripsvorming van de letteralgebra. Elders in deze *Nieuwe Wiskrant* wordt ingegaan op de werking van diverse applets; hier beschrijft **Michiel Doorman** de ervaringen die met de leerlingen opgedaan zijn.

Van touwpuzzels tot oppervlaktealgebra

Inleiding

Dit artikel gaat over ervaringen met een alternatieve aanpak van de algebra van het letterrekenen in klas 2 van HAVO en VWO, een aanpak waarbij we ernaar streven dat leerlingen steun hebben aan meetkundige modellen die deze algebra betekenis geven. Het artikel begint met een beschrijving van een eerste les met vervangend lesmateriaal¹. Daarna volgen de uitgangspunten voor dit materiaal en enkele ervaringen uit de volgende lessen. Aan het eind van het artikel reflecteren we op die uitgangspunten en in het bijzonder op de rol van ICT in het lesmateriaal. Deze lessen vinden plaats in het WELP-project. Het artikel 'WELP: Letterrekenen met applets' elders in dit nummer geeft een analyse van deze algebra in de huidige schoolboeken² en laat zien hoe ICT daarbij een bijdrage kan leveren.

Puzzels: touwpuzzels en leeftijdspuzzels

Walle en Mark zitten achterin een 2h/v klas van het Gregorius College. Ze werken aan een touwpuzzel:

Een touw van 30 meter wordt verdeeld in 5 korte en 3 lange stukken. Een kort en een lang stuk zijn samen 9 meter. Hoe lang zijn de stukken?

Mark schetst het touw, verdeelt het in acht stukken en vindt het antwoord door drie keer een kort en een lang stuk samen te nemen. Walle probeert eerst verschillende waarden voor het korte en het lange stuk, maar komt er niet uit. Als hij ziet dat een tekening kan helpen, schetst hij het touw. Hij weet echter niet hoe dat te verdelen zonder dat je de maten van kort en lang kent. Na enkele aanwijzingen van Mark lukt het hem om een schetsmatige verdeling te maken en met de gegevens de puzzel op te lossen. In figuur 1 is een antwoord van een leerling te zien dat representatief is voor wat de meeste leerlingen deden. Tijdens de bespreking van deze touwpuzzelopgaven blijkt dat een aantal leerlingen de antwoorden vindt met proberen. De docent geeft aan dat er kennelijk twee manieren zijn: met proberen en door te berekenen met behulp van een tekening.

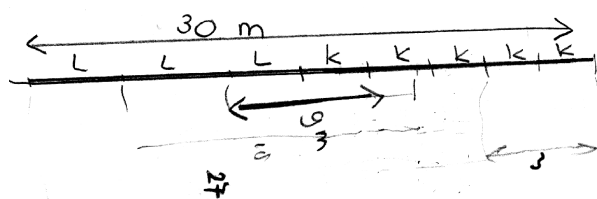


fig. 1 Uitwerking van een leerling bij de touwpuzzel

In de volgende puzzels wordt ook gebruikgemaakt van notaties als '2lang + kort + 5 = 28' en 'lang + kort = 12'. Leerlingen interpreteren '2lang' als twee lange stukken. Lang en kort zijn namen van stukjes touw, maar vermoedelijk nog geen 'variabelen' die je kunt optellen of vermenigvuldigen. In de schriften van de leerlingen zien we hun antwoorden ook veranderen van losse berekeningen bij schetsen naar beschrijvingen in woorden. Zo schrijft bijvoorbeeld Aysenur in haar schrift:

*Er zijn 2 lange stukken, een kort stuk en een stuk van 5 cm;
lange stuk + korte stuk samen zijn 12 cm. Totaal is het 28;
antw: $28 - 5 = 23$ $23 - 12 = 11$ lange stuk = 11 cm
korte stuk = 1 cm.*

Na deze touwpuzzels werken leerlingen aan enkele leeftijdspuzzels. We vermoeden dat meetkundige plaatjes ook hier redeneringen kunnen ondersteunen. Een leeftijdspuzzel is:

In een gezin worden na elkaar vier zonen geboren. Het leeftijdsverschil is steeds 3 jaar. Inmiddels zijn ze samen 50. Hoe oud is de jongste nu?

Walle tekent twee schetsen bij deze puzzel. Hij maakt het iets complexer dan nodig is door het probleem voor vijf zonen op te lossen. Eerst tekent hij de vijf leeftijden naast elkaar met stokjes voor het verschil van 3. Dan stapelt hij ze om gebruik te kunnen maken van het totaal 50 (zie figuur 2). Aysenur tekent niet meer. Zij geeft haar antwoord met letters (zie figuur 3).

In de uitwerkingen van de leerlingen zien we hoe ze stukjes *samen nemen* of *verdelen*, hoe ze *vergelijken* en *rede-*

A hand-drawn diagram of a number line from 0 to 100. The line is marked with numbers 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, and 100. A bracket on the right side of the line groups the numbers from 0 to 30, labeled '30'. Another bracket on the right side groups the numbers from 30 to 50, labeled '20'. The number 50 is also written below the line. To the left of the line, there are several vertical lines of varying heights, representing the numbers 1 through 10.

$$\begin{array}{r} 4.2 + 18 \\ \underline{2} \\ \underline{2+3} \\ \underline{2+6} \\ \underline{2+9} \end{array} \quad \begin{array}{l} 4.2 = 50 - 18 = 32 \\ 2 = 8 \quad (32 : 4) \end{array}$$

Uitgangspunten voor deze algebra

Er is voor gekozen om in deze fase de algebra te verbinden met de meetkundige modellen als lengtes en oppervlakten. De stap naar abstractere rekenschema's, zoals de vermenigvuldigingstabel, wordt uitgesteld tot een volgend hoofdstuk. Zo hebben de meetkundige modellen niet de functie van een korte illustratie van de regels die moeten worden geleerd, maar vormen ze de context van waaruit deze regels worden ontwikkeld. Je vindt als leerling de algebra daardoor in zekere zin opnieuw uit. We maken hierbij gebruik van computerprogramma's om leerlingen de mogelijkheid te geven uitvoerig met die modellen te werken en tot de beoogde 'uitvindingen' te komen.

Het materiaal voor negen lessen begint met touw- en leeftijdspuzzels om meetkundige beschrijvingen te ontlocken in het werk van de leerlingen. Na deze puzzels en de bespreking van lijnenstapelingen voor (lineaire) uitdrukkingen gaan leerlingen twee lessen aan de slag met het applet *Geometrische Algebra 1d* (zie het artikel 'WELP: letterrekenen met applets' elders in dit nummer).

fig. 4 Vergelijk $3 + x$ met $x + x + x$

Andere activiteiten met *Geometrische Algebra 1d* besteden aandacht aan verschillende vormen van (lineaire) uitdrukkingen. Doelen van de computerlessen met het applet zijn:

- het betekenis geven aan $2x$ en aan het verschil tussen $2x$ en $2 + x$;
- een voorbereiding op het oplossen van vergelijkingen: de vraag naar de waarde van x waarvoor $2x + 3 = 10$ roept het beeld met de pijlen op, waarmee je kunt concluderen dat die waarde gelijk is aan de waarde van x waarvoor $2x = 7$;
- het inzicht dat je gelijksoortige termen kunt samennemen, bijvoorbeeld $x + 3 + x + 5 = 2x + 8 = 2(x + 4)$, en dit is verwant aan het herschikken van onderdelen in een pijlenstapeling.

Het applet wordt tijdens de twee computerpractica misschien even een wereld op zich, met specifieke mogelijkheden en beperkingen. Dit heeft als gevaar dat de leerlingen kunnen denken dat hun bevindingen alleen binnen die wereld gelden. Het is daarom belangrijk die bevindingen te verbinden met wat eerder aan de orde is geweest en later

terug te verwijzen naar wat met het applet is gedaan³. In de volgende lessen wordt het oppervlaktemodel voor vermenigvuldigen geïntroduceerd. Dit deel staat aanvankelijk los van het voorgaande. Aan het eind van deze les-serie komen de verschillende lijnen bij elkaar. De rekenfout $13 \times 13 = 100 + 9 = 109$ is hier uitgangspunt. Een plaatje met 13 bij 13 ruitjes leidt tot het interpreteren van een vermenigvuldiging als de berekening van een oppervlakte. Het doel is om twee berekeningen te vergelijken: de oppervlakte als product van de hele randen (13×13) of als som van de delen ($100 + 9 + 30 + 30$).

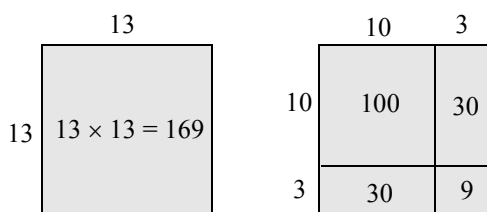


fig. 5 Oppervlakte als som van de delen

Vanuit de rekenvoorbeelden komen ook berekeningen met letters naar voren: $(a + b) \times (a + b)$ wordt gevisualiseerd met een vierkant met zijde $a + b$. Hiervoor is het ook weer nodig om een zijde te kunnen interpreteren als som der delen, zoals ook gebeurt bij de pijlenstapeling bij het applet *Geometrische Algebra 1d*.

De bedoeling is dat de twee vormen $(a + b) \times (a + b)$ en $a^2 + b^2 + a \cdot b + a \cdot b$ tijdens een nabespreking benoemd worden als rechthoeksvorm en stukkenvorm. De relatie tussen deze twee vormen krijgt daarbij specifieke aandacht. Zo'n bespreking gaat dan vooraf aan oefeningen met de computer (eventueel thuis) met het applet *Oppervlaktealgebra* (zie het artikel 'WELP: letterrekenen met applets' elders in dit nummer):

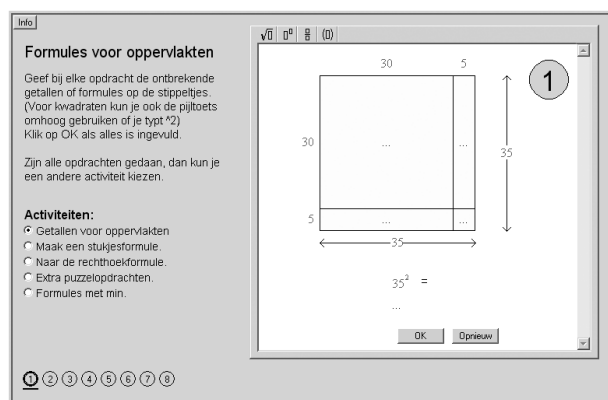


fig. 6 Oppervlaktealgebra

De laatste lessen uit dit hoofdstuk gaan over vormen met min. We herhalen met het applet *Geometrische Algebra 1d* eerst iets over het rekenen met negatieve getallen. Het onderscheid tussen x omkeren (min ervoor met rechtermuisknop) en x negatief maken (pijl naar beneden slepen)

wordt vervolgens onderzocht binnen de meetkundige wereld van het applet. De dynamiek van het veranderen van waarden van variabelen en de koppeling met de stapeling van pijlen worden hierbij benut. Leerlingen maken bijvoorbeeld $y - x$ en onderzoeken hoe de waarde daarvan varieert afhankelijk van de waarden van x en y . Zo zien ze met het applet de gevolgen van het invullen van een negatief getal voor x of y en het verschil met het omkeren van een pijl (dus van x naar $-x$). Dat is best lastig, want in het eerste geval wordt de waarde van y negatief, maar y wordt geen $-y$.

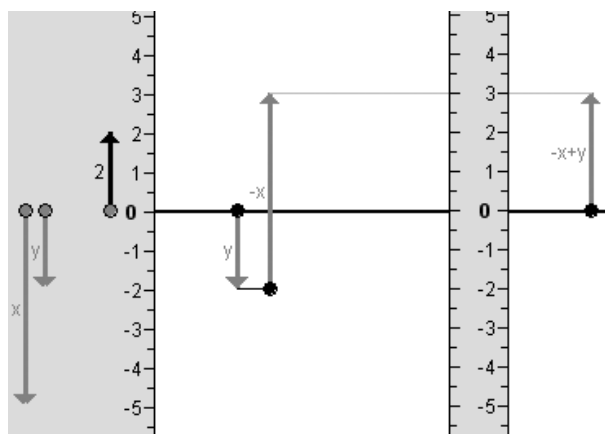


fig. 7 Werken met negatieve getallen

We beperken de vormen met min tot wat mogelijk is in de wereld van het applet, zoals bijvoorbeeld $10 - (7 - x)$. Producten als $(10 - x) \cdot (7 - y)$ stellen we uit tot een volgend hoofdstuk. Pas dan gaan we uitvoeriger in op de overgang van het oppervlaktemodel naar het werken met tabellen. Uiteindelijk wordt bij de opgaven nauwelijks nog direct gerefereerd aan een ondersteunend lijnenmodel of oppervlaktemodel. We laten leerlingen wel weten dat ze daarvan gebruik kunnen maken als ze vastlopen. Het zijn middelen geworden om een vraag betekenis te geven of om de gewenste algebraïsche handelingen te achterhalen. Handelingen die leerlingen bij de touwpuzzels al hanteerden: samen nemen, verdelen, vermenigvuldigen, optellen, vergelijken, korter schrijven.

Ervaringen

Dit artikel is begonnen met de ervaringen van de eerste les. Na de bespreking van de touwpuzzels en de leeftijd-puzzels gingen de leerlingen vervolgens aan de slag met het applet *Geometrische Algebra 1d*.

Lineaire expressies maken

Tijdens het begin van het computerpracticum vergeleken leerlingen een stapeling van x en x en x (op het scherm verschijnt naast de pijl $3x$) met een stapeling van x en 3. De vraag is wanneer de ene stapeling kleiner is dan de andere. Dit kun je onderzoeken door de waarde van x te veranderen. De dynamiek in deze vraag werkte in eerste instantie

goed bij de meeste leerlingen. Ze keken naar het scherm en bewogen x . Snel werd de waarde 4,5 als ‘omslagpunt’ gevonden. De volgende vraag was of ze dat ook konden berekenen. Het kostte leerlingen dan vaak moeite om die 1,5 en 4,5 (de waarde van x en de totale lengte) niet te gebruiken. De meeste leerlingen kwamen echter wel op het idee dat de twee x -en gelijk aan 3 moesten zijn. We hoorden opmerkingen als: ‘oh ja, net als bij die touwpuzzels’. Na deze les werkten ze nog een les met het applet waarin het gebruik van haakjes naar voren komt. Het kopiëren en plakken van een eerdergemaakte pijlenstapeling is hiervoor aanleiding. Er werd gevraagd of ze drie verschillende uitdrukkingen (met en zonder haakjes) konden geven bij getekende pijlenstapelingen. In het antwoord van Yvette is te zien dat dit niet altijd vlekkeloos ging (zie figuur 8).

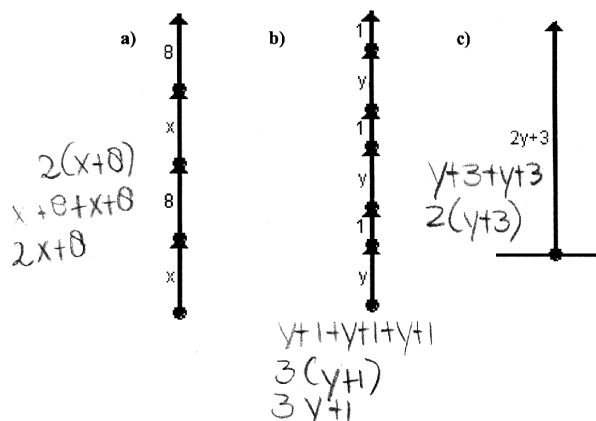


fig. 8 Yvette's uitdrukkingen bij pijlenstapelingen

Om de variatie in de oplossingen aan te geven, volgen hieronder nog twee antwoorden bij de rechter pijl c door Arjen en Aysenur:

$$\begin{array}{ll} 2(y+1,5) & 2(y+1)+1 \\ 2y+3 & 1+y+1+y+1 \\ y+y+3 & 2y+3 \end{array}$$

fig. 9 Antwoorden van Arjen en Aysenur

Het vermenigvuldigen van tweetermen

In de overgang naar het oppervlaktemodel tekenden leerlingen eerst vierkanten bij kwadraten. De analogie tussen die kwadraten en het berekenen van oppervlakten met onbekenden bleek voor leerlingen minder vanzelfsprekend dan wij dachten. In de opgaven met kwadraten hebben we misschien ook te weinig benadrukt dat het plaatje bij 13^2 een vierkant is met zijde $10 + 3$.

Tijdens een nabespreking van deze opgave heeft de docent op het bord een vierkant getekend van 13^2 en ernaast een tekening van $(a+b)^2$. Uit de vragen van de leerlingen bleek hoeveel die tekeningen en de notaties langs de zijden voor hun toch verschillen. Wij zien de overeenkom-

sten direct, maar zij kwamen tijdens de les regelmatig op die twee tekeningen terug met vragen als: ‘Dus je kunt 13^2 ook schrijven als $(10 + 3)^2$?’ De deel- of geheelinterpretatie van de zijden van een rechthoek wilden we benutten voor het onderscheid tussen de rechthoeksvorm en de stukkenvorm in de berekening van de oppervlakte.

In het leerlingenwerk is te zien dat ze moeite hebben met deze interpretaties. We zagen veel verschillen tussen de leerlingen onderling, met name in het moment waarop ze de beoogde rechthoeksvorm en stukkenvorm correct hanteerden. In onderstaande uitwerkingen van Elianne is tenminste één typische fout te zien. Ze moest de stukkenvorm bij $(3+x) \cdot (5+y)$ en bij $(2+v) \cdot (3+2w)$ zien te vinden.

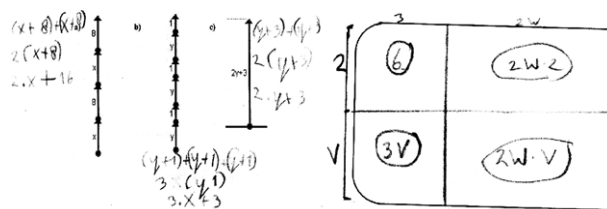


fig. 10 Elianne's uitwerkingen

Elianne neemt 3 en x samen tot $3x$ langs de zijde van de linker rechthoek. Dit zagen we ook bij andere leerlingen. In de rechtertekening is te zien hoe ze met $2w$ omgaat. Het kan zijn dat ze $2w$ geïnterpreteerd heeft als een naam van een deel van een zijde. Een interpretatie die het uitwerken van $2w \cdot 2$ tot $4w$ in de weg staat. We merkten dat we in het lesmateriaal (te) snel het keer-teken $\times$ lieten wegvallen. Tijdens de bespreking van deze uitwerkingen zorgde de docent voor verwijzingen naar stukkenvorm en rechthoeksvorm, waarbij de deel/geheelinterpretatie van de zijden aan bod kwam. Hierna gingen de leerlingen met het applet *Oppervlaktealgebra* aan de slag. De leerlingen waren de hele computerles actief bezig met de opdrachten van het applet. Vrijwel alle tweetallen gingen door tot de laatste gemengde opdrachten. Aan het eind van het hoofdstuk konden leerlingen zelf nog schetsjes maken bij het uitwerken van uitdrukkingen met haakjes. Dit werd gedaan door enkele zwakke, maar ook nog door een aantal heel goede leerlingen. In ieder geval viel op dat de leerlingen die schetsten de opgaven beter hadden gemaakt dan de anderen. Hieronder staat zo'n schets van Aysenur (een van de sterkere leerlingen) bij een vraag naar een uitwerking van $(2x+5) \cdot (x+7)$:

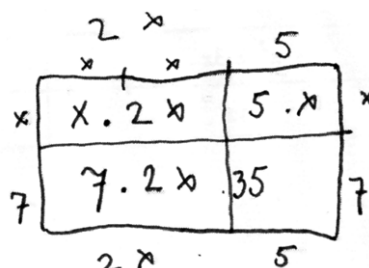


fig. 11 Een schets van Aysenur

Expressies met min

Vervolgens werkten leerlingen weer met het applet *Geometrische Algebra 1d* en maakten vormen met min. Om een vorm als $-(3+x)$ te maken moesten ze eerst x en 3 samen nemen en dat dan omkeren. Ze merkten het verschil met $-3+x$ waarbij ze x en -3 stapelen. Het veranderen van de waarden van x en y stelde ze in staat om te ervaren dat de stapelingen $x+y$ en $y-x$ positieve en negatieve waarden kunnen hebben en onder welke condities dat het geval is. Toch verliep niet alles zoals verwacht. Zo nu en dan ontstond verwarring over de min: -3 kun je maken door een pijl van lengte -3 te pakken, of door een pijl van 3 om te keren. In het applet kun je alleen pijlen stapelen en dat staat voor optellen: $7-x$ wordt gemaakt door eerst x om te keren en daar dan 7 bij op te tellen. De verschillende rollen van het min-teken tijdens deze computerles vormde voor leerlingen een struikelblok om een algemene structuur achter het bewerken van expressies met min te zien.

Het proefwerk

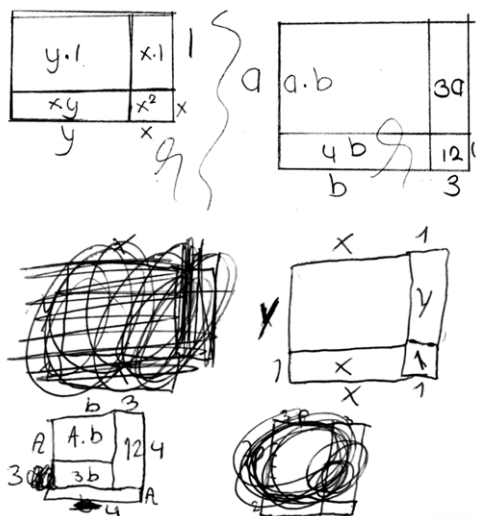
Het afsluitende proefwerk werd redelijk gemaakt. Een opgave waarin we de gekozen benadering van dit hoofdstuk terugzagen was de volgende:

Hier zie je steeds links een rechthoeksvorm en rechts een stukkenvorm die ermee gelijkwaardig is. Vul de stipfels in zodat het klopt! (Als je wilt, maak je er een schetsje bij.)

$$(x + \dots) \cdot (\dots + \dots) = x \cdot y + x + \dots + 1$$

$$(3 + \dots) \cdot (\dots + \dots) = a \cdot b + 3 \cdot \dots + \dots + 12$$

In de uitwerking van Maartje is te zien dat het niet altijd zo eenvoudig is om een bruikbare schets te maken. Ze had een verkeerde verdeling gekozen voor de zijden van de rechthoek van de eerste opgave. De berekening bij het plaatje is echter wel goed. Walle worstelde ook met de tekening om greep te krijgen op de vraag. Bij de eerste kwam hij er nog wel uit. De schets bij de tweede is onvolledig, desondanks wist hij die opgave ook goed te beantwoorden.



Conclusies

Klassendiscussies

Het taalgebruik tijdens deze klassikale discussies bleek belangrijk om betekenis te geven aan en consensus te krijgen over terminologie als *proberen* versus *berekenen*, *stukkenvorm* versus *rechthoeksvorm*, *deel* versus *geheel* en *omkeren* versus *negatief maken*. Na dergelijke discussies zagen we direct die termen functioneren bij veel leerlingen, omdat ze in een behoefte voorzagen en hielpen bij de volgende problemen. De afwisseling tussen het geven van vrijheid aan leerlingen om een aanpak te bedenken en het bespreken van die aanpakken voor sturing naar het vervolg, hadden we niet overal goed vormgegeven. De gevolgen waren dan vaak snel te merken, met name als in de volgende opgaven sprake was van een slechte formulering of een onhandig gekozen probleem.

De klassendiscussies bleken bovendien nuttig om duidelijk te maken wat wel schetsmatig kan, en waarover je precies moet zijn. Zo gingen enkele leerlingen met liniaal touwen op schaal natekenen en probeerden ze op schaal te verdelen (zoals Walle), terwijl de schaal van die verdeling juist de uitkomst was. Die leerlingen kozen dus voor een precisie die nu even niet nodig was. Discussie over de relatie tussen het gebruik van het model in het gegeven probleem bleek ook belangrijk bij de overgangen naar de modelomgevingen in de computer en van de computeractiviteiten naar het vervolg. Die relaties hadden anders het gevaar onzichtbaar te blijven (bijvoorbeeld bij de overgang van de touwpuzzels naar *Geometrische Algebra 1d*, of van *Geometrische Algebra 1d* naar de deelbare zijden van rechthoeken).

Van puzzels naar letterrekenen

De meetkundige strategie bij de touwpuzzels functioneerde bij leeftijdspuzzels en later bij *Geometrische Algebra 1d*. Woorden en letters lijken in eerste instantie vooral te worden gebruikt als naamgevers ('1 lange is 11', of '3x voor een stapeling van x en x en x'). Pas na een tijdje worden het onderdelen van een formule waarmee je kunt rekenen (zoals $x+x+x$ of $3x$). Die overgang van verkortingen van spreektaal met algebraïsche notaties naar 'echte' algebraïsche uitdrukkingen gaat geleidelijk.

Het lastige voor leerlingen is dat 4 *korte* in het eerste stadium wel past, maar niet expliciet wordt geïnterpreteerd als '4 keer *korte*'. Pas na een tijdje leek verwarring hierover te ontstaan. Wellicht schrijven wij te gemakkelijk $4k$ en is het niet verwonderlijk dat leerlingen zo'n uitdrukking ook gebruiken bij een lengte van een zijde die bestaat uit een stukje 4 en een stukje k . Bovendien is in het taalgebruik van de leerlingen de vermenigvuldiging bij '4 *korte*' anders dan bij de oppervlakte van een rechthoek van 4 bij *kort*. In beide gevallen schrijven we $4k$.

Tijdens de overgang van de touwpuzzels naar het letterrekenen maken we impliciete keuzes en hanteren we con-

venties zoals het verschillend gebruik van het min- en het keer-teken. Op allerlei – schijnbare – trivialiteiten zagen we leerlingen ontsponen, maar het geheel convergeerde. Die convergentie vindt echter plaats in een uiteenlopend tempo.

De rol van de applets

Uit eerdere experimenten was al gebleken dat het gebruik van een applet als *Geometrische Algebra 1d* wel enige voorbereiding vraagt. Voor inzicht in de werking en bedoeling van de applet bleek het goed om leerlingen eerst zelf vergelijkbare plaatjes te laten tekenen (zoals bij de touwpuzzels). De activiteiten met het applet lagen zo op een natuurlijk manier in het verlengde van het voorgaande, waardoor er geen vragen kwamen als ‘wat willen ze nu van me’.

Dynamische exploraties rond het vergelijken van $3x$ (of eigenlijk 3 stukjes van lengte x) met $x + 3$ en het onderzoeken van waarden van $x - y$ motiveerden alle leerlingen tot algebraïsche redeneringen. Het tempo en het gebruik van de juiste taal verschilden, waardoor klassengesprekken achteraf noodzakelijk bleken voor consensus over de bereikte resultaten.

De concrete terminologie (zoals rechthoeksvorm, stukenvorm en omkeren) en de ervaringen met de dynamische beelden van de applets gaven handvatten om essentiële stappen te maken en boden mogelijkheden om betekenissen te achterhalen. Lessen later kon er nog naar verwezen worden.

Het werken met vormen met min in de wereld van *Geometrische Algebra 1d* bleek meer problemen met zich mee te brengen dan verwacht. Dit onderwerp vraagt meer aandacht dan de twee lessen die we ervoor hadden gereserveerd, met name vanwege de drie verschillende rollen van het min-teken: $-(-3 - x)$.

Leerlingen oefenden fanatiek met het applet *Oppervlaktealgebra* en waren in staat om ingewikkelde opgaven te maken. Dit bleek echter niet te garanderen dat leerlingen dezelfde prestaties leverden met pen en papier.

Tot slot

We hebben tijdens deze experimenten geleerd over de complexiteit van het ontwikkelen van deze algebra vanuit uitwerkingen van leerlingen. We wilden niet te snel overgaan tot het oefenen van systematische methoden, omdat een betekenisvolle onderbouwing dan ontbreekt. We zochten naar een benadering waarbij we enerzijds leerlingen de mogelijkheid bieden om algebraïsche technieken te automatiseren, en anderzijds de werking en de betekenis van een methode konden achterhalen door gebruik te maken van een ondersteunend model. Dat gebruik is niet alleen nodig voor minder snelle leerlingen, maar ook voor anderen om na een langere tijd een techniek weer te reconstrueren of aanpassingen te kunnen maken in nieuwe situaties. We hebben met deze experimenten een stap gedaan in de richting van zo’n benadering en hebben het idee op de goede weg te zijn, maar alle hobbels zijn zeker nog niet gladgestreken.

Michiel Doorman, Freudenthal Instituut, Utrecht

Noten

- [1] In het bijzonder is hierbij gebruikgemaakt van ervaringen in de klassen van Karin Zwetselaar, Wout van Helsdingen en Maaike van Houten van het Gregorius College te Utrecht.
- [2] Zie bijvoorbeeld Amerom (1998) over een opbouw vanuit informele strategieën van basisschoolleerlingen, en Van Reeuwijk & Wijers (1994) over de opbouw van variabelen en formules vanuit contextproblemen.
- [3] Vergelijkbare bevindingen in het WELP-project zijn beschreven door Bokhove & Van Reeuwijk (2004).
- [4] In een tweede uitvoering van dit hoofdstuk op een andere school is het materiaal aangepast door Gerard Koolstra. Die leerlingen hebben voorafgaand aan het werk met *Oppervlaktealgebra* gewerkt met het applet *Geometrische Algebra 2d*. Ze konden daarmee zelf rechthoeken maken, een construerende activiteit die een goede voorbereiding bleek te zijn op *Oppervlaktealgebra*.