Een team van docenten en een vakdidacticus wilden in de geest van Pólya een praktische opdracht ontwerpen en uitproberen. Na een uitermate leerzame periode willen **Mark van den Aarssen**, **Herman Alink**, **Dolf van den Hombergh**, **Bart Jordens**, **Rainer Kaenders**, **Richard Klein Breteler** en **Carolijn Tacken** verslag geven van hun bevindingen en u uitdagen de praktische opdracht zelf uit te (laten) voeren.

# Spelen op een slimme manier

## Boter, kaas en eieren

Boter, kaas en eieren is een populair spel op de middelbare school. Als de twee spelers zo slim mogelijk spelen, eindigt het altijd in remise. Voor de ontwikkeling van deze waarheid of stelling en de bijbehorende strategie hebben de meeste leerlingen hun hele schooltijd nodig, en velen komen er nooit achter, want anders zou dit spel niet zo populair blijven. Diegenen die erachter zijn gekomen hebben het toch meestal zelf moeten ontdekken door veel te spelen.

Voor 'boter, kaas en eieren' is er een wiskundige theorie, de theorie van de combinatorische spelen, waarin je bovengenoemde stelling kunt bewijzen. Ernst Zermelo, die aan de basis stond van deze theorie, heeft haar aan de hand van beschouwingen over het schaakspel ontwikkeld. Hij bewees in 1913 dat er voor een van beide spelers een niet-verliezende strategie moet bestaan, die bij het schaken tot de dag van vandaag nog niemand expliciet kent. Analoge beschouwingen leveren ook het bewijs dat boter, kaas en eieren niet te winnen is. De ideeën hierachter zijn ook voor een leerling goed te doorgronden.

Zermelo was een groot wiskundige. Zijn wiskundige verdienste bestond er niet uit dat hij zijn theorie kon leren, maar dat hij hem heeft ontwikkeld. In zijn artikel (Zermelo, 1913) is deze ontwikkeling – het proces van abstrahering – nog af te lezen. Het ging destijds concreet over het schaakspel en de veralgemeniseringen lagen vervolgens voor het oprapen.

In de wiskundeles confronteren wij de leerlingen veel met kant en klare wiskunde. Dat is onvermijdelijk en belangrijk voor de overdracht van de wiskundige cultuur. En toch weet elke wiskundige dat de kern van de wiskunde in het bedrijven van wiskunde ligt. Aan de basis van het bedrijven van wiskunde staat een actieve en zelfstandige houding van degene die wiskunde doet. De wiskundige George Pólya (1887-1985) die ons bij dit onderzoek een wiskundedidactisch begrippenkader geeft, zei dat zo (Pólya, 1954):

> 'Mathematics is regarded as a demonstrative science. Yet this is only one of its aspects. Finished mathematics presented in a finished form appears as purely demonstrative, consisting of proofs only. Yet mathematics in the making resembles any other human knowledge in the making. You have to guess a mathematical theorem before you prove it; you have to guess the idea of the proof before you carry through the details. You have to combine observations and follow analogies; you have to try and try again.'

De AZL-vakgroep wiskunde bestaat uit zes ervaren wiskundeleraren en één vakdidacticus en maakt deel uit van het project Actief en Zelfstandig Leren bij het Instituut voor Leraar en School van de Radboud Universiteit Nijmegen. Deze groep heeft al eerder ervaring met de problematiek van het zelfstandig leren opgedaan en heeft enkele moeilijkheden kunnen onderzoeken die zich voordoen als leerlingen tot gemotiveerd zelfstandig leren worden aangezet. Destijds werd een A-lympiadeopdracht over krasloten omgezet naar een praktische opdracht waaraan de leerlingen in beperkte mate vrij konden werken. Het bleek toen al dat leerlingen heel snel lopen aan 'de leiband van de leraar, in plaats van hun eigen gedachtenspoor te volgen'. Een conclusie uit deze opdracht was 'dat klassikale activiteiten op de goede momenten zo'n opdracht veel efficiënter kunnen maken en aanzienlijk kunnen bijdragen tot het leereffect' (Van Schalkwijk, 2000).

Ook wij wilden de leerlingen het eigen gedachtenspoor laten volgen door ze wiskunde te laten bedrijven, bijvoorbeeld in de zin van Freudenthal (1991, p.49): 'Since I stressed mathematics as an activity my answer to the question 'where to?' will be: 'to an activity'.' Geleide heruitvinding noemt hij het geschikte principe om dit te bereiken. Het stellen van eigen problemen die een eigen productiviteit tot gevolg hebben beschouwt hij als wezenlijk hiervoor (Freudenthal, 1991, 2.1.3).

Twee jaar lang hebben wij mogelijkheden onderzocht om leerlingen bij een praktische opdracht over het onderwerp nul-som-spelen uit de wiskundige speltheorie zelfstandig wiskunde te laten doen. Maar hoe stuur je een dergelijk leerproces aan? Freudenthal zegt hierover (1991, p.55):

> 'Guiding means striking a delicate balance between the force of teaching and the freedom of learning. It depends on

> such a perplexing manifold of hardly retrievable and only vaguely discernible variables that it seems inaccessible to any general approach.'

Als er dus geen algemene aanpak mogelijk schijnt, wie vertelt ons dan hoe we het moeten doen? Wij zijn mondige wiskundeleraren met eigen opvattingen over ons vak, die erin geloven dat deze houding ook onmisbaar is voor een leraar. Net als in de wiskunde vertrouwen wij ook bij deze zoektocht op onze eigen waarnemingen. Het is ons uit het hart gegrepen wat George Pólya schreef: 'Dear fellow teacher, do not accept any authority except your own well-digested experience and your own well-considered judgement.' (Pólya, 1965), of Freudenthal: 'Ik houd van een mentaliteit van het zelf willen doen, van niet slaafs in het leidsel lopen.' (Freudenthal, 1979). Het gemeenschappelijk doorgevoerde actieonderzoek geeft hiervoor de ruimte en laat onze opgedane ervaringen en ideeën toch ten goede komen aan een bredere groep wiskundeleraren.

Gedurende de laatste twee jaar werd de praktische opdracht aan de hand van onze ervaringen en inzichten steeds verder ontwikkeld. De hierbij optredende dynamiek kan bijvoorbeeld door het paradigma van collaboratief actieonderzoek worden beschreven: General Plan → First actionstep → Monitoring → Evaluation → Rethinking/reflecting/discussing: understanding → Revised General Plan enzovoorts (Henson, 1996)[1]. Naast de ontwikkeling van de praktische opdracht streven wij in dit project naar onze eigen ontwikkeling als wiskundedocenten en didactici. Afgezien ervan dat wij uit onze ervaringen leren, lezen wij gezamenlijk wiskundige en wiskundig didactische literatuur, die in verband staat met onze praktische opdracht. Ook deze aspecten proberen wij in dit artikel naar voren te laten komen, zodat een collega wiskundeleraar er zowel praktisch mee aan de slag kan als ook gestimuleerd wordt om zich bij zulke activiteiten aan te sluiten c.q. ze zelf op te zetten en zijn verantwoordelijkheid voor de inhoud van het wiskundeonderwijs niet volledig over te laten aan uitgevers van schoolboeken.

## Waarom dit onderwerp en dan op deze manier?

Als uitgangspunten dienden ons de volgende twee didactische vragen.

1. Hoe stimuleren wij bij leerlingen het bedrijven van wiskunde en welke activiteiten zijn daar van onze kant voor nodig? Het is onze overtuiging dat wij niet van leerlingen kunnen verwachten dat ze actief, zelfstandig, creatief en origineel aan het werk gaan als wij dit niet zelf proberen te doen. Vandaar dat onze praktische opdracht de activiteit van de leraar noodzakelijk maakt en intrinsiek heeft ingebouwd:

   > 'Everybody demands that the high school should impart to the students not only information in mathematics but know-how, independence, originality, creativity. Yet nobody asks these beautiful things for the mathematics teacher – is it not remarkable?' (Pólya, 1965).

   Bij het bedrijven van wiskunde staan algemene activiteiten zoals het vinden van goede begrippen (definities), het raden en formuleren van vragen, vermoedens en mogelijk ook antwoorden centraal. Hiervoor moeten leerlingen actief en onder eigen verantwoordelijkheid aan de slag. Dit vereist een hoge motivatie van leerlingen. Omdat de meeste leerlingen er nog weinig ervaring mee hebben, leek ons een laagdrempelig onderwerp met de potentie voor hogere wiskundige beschouwingen, zoals wij dat in eindige combinatorische spelen hebben gevonden, hiervoor zeer geschikt.
2. Hoe kun je een leerproces concipiëren zonder het te anticiperen? Anders gezegd, is het mogelijk leerlingen ook echte (en geen voorgespiegelde) inhoudelijke vrijheid in hun leerproces te geven? En wat is de kijk op leren die hieruit voortvloeit? Weer bij Pólya (1965) vinden wij een leertheoretische aanpak die hij al formuleerde – lang voordat de constructivistische leeropvatting populair was. Pólya heeft het over 'three principles of learning':
   1. active learning;
   2. best motivation;
   3. consecutive phases: exploration, formalization, assimilation.

   Maar hoe organiseer je heel concreet een praktische opdracht die de leerlingen echte inhoudelijke vrijheid geeft en die aan de idealen van Pólya voldoet? In de opzet van onze praktische opdracht proberen wij dit te bereiken door in de eerste helft van de opdracht de leerlingen vaste instructies te laten volgen, maar de instructies voor de tweede helft afhankelijk te maken van de ideeën van de leerlingen en de interactie met de leraar. Hiervoor dienen de leerlingen voorstellen in. Belangrijk is dat er ook nog in de tweede helft degelijke instructies zijn - alleen hangen die af van de ideeën van de leerlingen. De precieze opbouw van de praktische opdracht beschrijven wij later in dit artikel.

Wiskundig is het voor ons van belang dat leerlingen zelf wetmatigheden en symmetrieën kunnen ontdekken. Zij kunnen leren hierover zorgvuldig na te denken, waterdicht te argumenteren en de kracht van sterke argumenten te ervaren. Verder zien zij dat onder de concrete argumenten het ene intelligenter of eleganter is dan het andere. En uiteindelijk activeert deze opzet ook ons leraren om met de stof én met de leerlingen mee te denken.

## Hoe gaan wij zelf aan de slag?

In onze groep volgen wij een drieledig doel: het ontwikkelen van bruikbaar lesmateriaal met een handleiding voor leraren, de ontwikkeling van vak- en vakdidactische kennis, onderzoek van ervaringen en communicatie daarover, uitmondend in 'lokale theorievorming'.

Maandelijks komen wij bij elkaar. In het begin van deze praktische opdracht hebben wij met z'n allen stukken van Pólya gelezen om een gezamenlijk didactisch begrippenkader als uitgangspunt te hebben. Vervolgens zijn wij ons inhoudelijk gaan voorbereiden op het onderwerp 'eindige combinatorische spelen' door gezamenlijk literatuur te lezen die door verschillende groepsleden werd aangedragen: Bewersforff, 2001; L. van den Broek en S. Oortwijn, 1999; Zaal, 2000; Teeuwen en Van Hoek, 1976 en Zermelo, 1913. De hoofdstelling van deze theorie luidt (Zermelo, 1913): Elk eindig combinatorisch spel kent een winnende of niet-verliezende strategie voor een van beide spelers[2]. Deze stelling heeft een niet moeilijk, maar wel subtiel bewijs dat een centrale rol speelt voor het onderwerp – ook op laag niveau. Juist hierbij werd het werken in een groep en het samen bestuderen van de achterliggende wiskunde door de vakgroepleden als bijzonder prettig ervaren. Zoals wij in het vervolg nog zullen uitleggen, is een tweede belangrijke activiteit de beoordeling van en de reactie op voorstellen van de leerlingen. De meeste voorstellen van de leerlingen hebben wij samen besproken. Vervolgens hebben we er gezamenlijk een advies over uitgesproken. Steeds meer werd in de groep duidelijk dat de voorstellen van de leerlingen in te delen zijn in verschillende soorten (zie later in dit artikel). De vreugde over bijzonder originele voorstellen konden wij delen met elkaar. Er ontstond ervaring in het omgaan met leerlingenvoorstellen bij dit onderwerp. Bovendien moeten wij docenten hier zelf inhoudelijk actief worden. Hierdoor ontstonden regelmatig vruchtbare inhoudelijke discussies over wiskundige en didactische problemen.
En uiteindelijk ook het onderzoek naar de effecten van onze praktische opdracht was een activiteit van de hele groep met medewerking van de leerlingen.
Op alle vier scholen waren er collega's die onze praktische opdracht in hun klassen hebben getest. Ook hun ervaringen zijn verwerkt in de ontwikkeling van de praktische opdracht. Wij zijn hen allemaal dankbaar voor de hulp. Verder hebben wij ons ook door verschillende mensen van de universiteit laten adviseren, zowel wiskundig als ook in onze onderzoeksactiviteiten.

## De opzet

Na een korte inleiding door de leraar beginnen de leerlingen zelf aan de concreet geformuleerde opdrachten A en B te werken. Leerlingen hebben het doorgaans als moeilijk ervaren bij door ons gegeven voorbeelden van spelen een gepaste manier van formuleren en bewijzen te vinden. Hun eerste beschrijving van de spelen gebeurt vaak in omgangstaal, en mist de nodige precisie die voor een wiskundige verhandeling nodig is. Maar juist hierop ligt de nadruk in dit eerste stuk. Daarnaast wilden wij op die manier de leerlingen in contact brengen met inspirerend materiaal voor het creatieve en vrije gedeelte. Vervolgens dienen de leerlingen bij de docent voorstellen in van zelfverzonnen spelen met bijbehorende vragen die zij in het vrije gedeelte willen behandelen. De vragen betreffen meestal mogelijke strategieën van zo'n spel, maar kunnen ook gaan over bijvoorbeeld symmetrieën of andere eigenschappen van het spel. Na onze goedkeuring van en aanvulling op deze voorstellen werken de leerlingen hun voorgestelde vragen zelf uit. Er zijn drie belangrijke begeleidingsmomenten:

1. De opgaven A en B van de leerlingen worden ingeleverd, heel nauwkeurig nagekeken en teruggegeven. Pas hierna dienen de leerlingen hun onderzoeksvoorstellen in.
2. De voorstellen van spelen met vragen worden door ons gemeenschappelijk besproken (op z'n minst in twijfelgevallen) en van concrete hints en aanvullende vragen voorzien (en in uitzonderingen afgewezen).
3. In het begin van het vrije gedeelte proberen wij de leerlingen wiskundig gereedschap - zoals bijvoorbeeld binaire getalvoorstellingen bij NIM-spelen of het gebruik van diagrammen - aan te reiken, dat hen bij het beantwoorden van hun eigen vragen kan helpen.

## De creatieve ideeën en de inbreng van leerlingen

De leerlingen willen liefst een spectaculair spel ontwerpen. Het probleem is dan dat het moeilijk, zo niet ondoenlijk is een niet-verliezende strategie te vinden. Een mogelijkheid is dan eindspelen te beschrijven, winnende posities te zoeken enzovoorts.

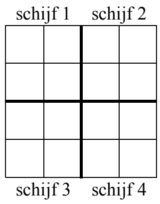
*fig. 1 Chantal, Marloes en Gilian spelen TALMAGI*

De meeste spelen die de leerlingen bedachten waren bordspelen, enkele variaties op boter-kaas-en-eieren en NIM-spelen. Dergelijke spelen kwamen ook in de inleidende opdrachten aan bod. Exemplarisch willen wij een vijftal spelen beschrijven waaronder goede en slechte voorbeelden.

TALMAGI is een voorbeeld van een creatief en door leerlingen verzonnen spel. Op de volgende bladzijde zijn de spelregels uitgelegd. Het is de leerlingen niet gelukt een niet-verliezende strategie te vinden. Dat betekent niet dat er geen verstandig onderzoek te doen was. Zij hebben wel winnende posities beschreven zoals bijvoorbeeld in het

***Spelregels van het spel*** **TALMAGI**

TALMAGI bestaat uit:
– een spelbord
– vier draaischijven
– 10 witte stenen
– 10 zwarte stenen




Doel van het spel:
Vier-op-een-rij behalen

Spelregels:
De spelers mogen om beurten kiezen uit twee mogelijkheden: een steen neerleggen of een van de schijven een kwartslag draaien.
Na het draaien van een schijf mag de volgende speler deze niet meteen terugdraaien, maar wel een kwartslag verder draaien. De volgende beurt mag er wel weer teruggedraaid worden. Het spel is beëindigd als een van de spelers vier-op-een-rij behaalt. Wanneer door een draaibeurt beide spelers tegelijk vier-op-een-rij behalen, is het spel door geen van beiden gewonnen, maar in remise geëindigd.

kader hieronder en hierbij ook hun beweringen weten te bewijzen. De leerlingen merken op dat dit zo ongeveer het eerste bewijs is ‘wat je invalt, daar kom je na een paar keer spelen meteen achter’.

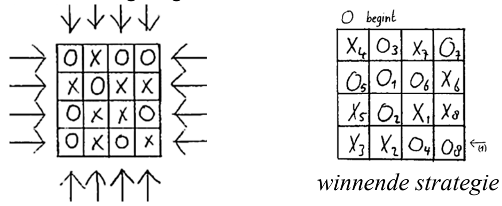
Beschouwing van een van de winnende posities bij TALMAGI met bewijs van de bewering. Met ‘zekere kans’ bedoelen de leerlingen dat dan de winst verzekerd is:

‘Er zijn meerdere mogelijkheden die een zekere kans op winst geven.
Allereerst is er de drie-twee positie. Daarmee bedoelen we dat een speler (minstens) drie stenen op een bepaalde schijf heeft liggen en (minstens) twee stenen heeft liggen op de schijf die er meteen naast ligt.’
‘De speler met twee stenen horizontaal of verticaal op het ene vierkantje en drie stenen op een ernaast liggend vierkantje moet in de volgende zet een kwartslag draaien.’

Aardverschuiving heet het voorstel van Bas en Peter. Dit is een voorbeeld van een origineel en ook goed te onderzoeken variant op boter, kaas en eieren.

Helaas is het onderzoek van dit voorstel erg summier en schiet duidelijk te kort. Er blijven te veel vragen open. Dit is jammer omdat het voorstel zeer geschikt is. Het geeft wel weer op welke manier leerlingen argumenteren als zij het wiskundige doel van deze praktische opdracht niet hebben bereikt, om hun argumenten te expliciteren. In wezen blijft het onderzoek bij hun conclusie:
‘Na onderzoek zijn wij erachter gekomen dat er uitsluitend een winnende strategie voor de beginnende speler is. Dit is naar onze mening te wijten aan het feit dat de beginnende speler zichzelf in een positie kan manoeuvreren wanneer het aankomt op het verleggen van de tekens. De beginnende speler kan in een zestienvlakkig vierkant namelijk altijd drie tekens op een rij krijgen, daarnaast is het voor de niet-beginnende speler niet mogelijk te voorkomen dat de beginnende speler zich een winnende positie verschaft voor het verschuiven van de tekens. In figuur 2 hebben we in een speelvlak toegelicht wat een winnende strategie is voor de beginnende speler.’

Peter & Bas SVB
Spel: Aardverschuiving
Doel: het maken van 4-op-’n-rij
Spelregels:
Het spel wordt gespeeld op een 16-vlakkig vierkant. Eerst leggen beide spelers (om de beurt!) ieder 8 fishes op het vierkant. Wanneer er dan nog geen 4-op-’n-rij is gehaald door een van de spelers, mogen de spelers om de beurt een steen in het spel brengen zoals hieronder is uitgelegd.




De spelers mogen op deze manier om de beurt proberen een 4-op-’n-rij te forceren. Het is niet toegestaan de steen die buiten het spel valt weer direct in het spel te brengen.

Onderzoeksvraag:
Is er een winnende/niet verliezende strategie voor dit spel?

*fig. 2 ‘Aardverschuiving’, het voorstel van Bas en Peter*

Een voorbeeld van een heel ander spel dat laat zien dat er meer mogelijk is dan het verzinnen van zuivere bordspelen, komt van Tijmen, Robert en Camiel. Hun spel YALI is op een voorspelbare manier beïnvloed door de zwaartekracht. In figuur 3 is hun voorstel te zien.

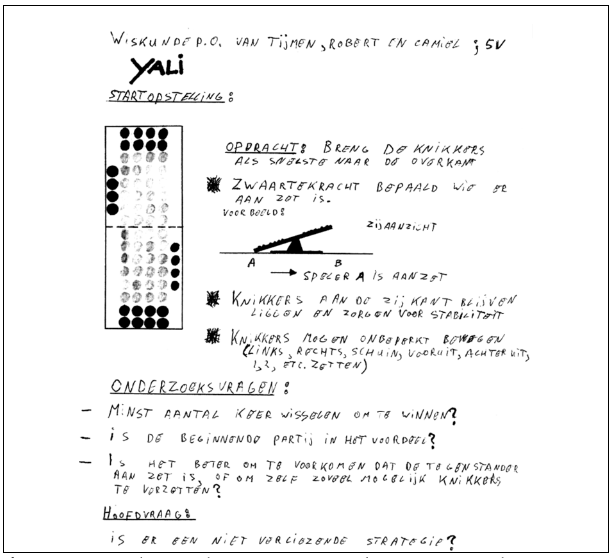



*fig. 3 ‘YALI’, het spel van Tijmen, Robert en Camiel*

Lex, Gijs en Bo hadden het volgende simpele spel met de naam LUCI bedacht dat op het in figuur 4 afgebeelde bord wordt gespeeld.
Iedere speler heeft een witte of een zwarte pion en twee streepjes. Ze beginnen tegenover elkaar en hebben als doel met hun pion de overkant te bereiken. Om de beurt hebben ze de kans hun pion te verzetten of een streepje te zetten op een van de twaalf lijnstukken. (Deze twaalf lijnstukken bakenen de negen vierkanten af) met dit streepje kun je je tegenstander tegenhouden, maar ook jezelf.

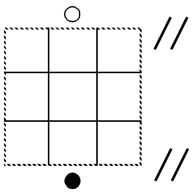
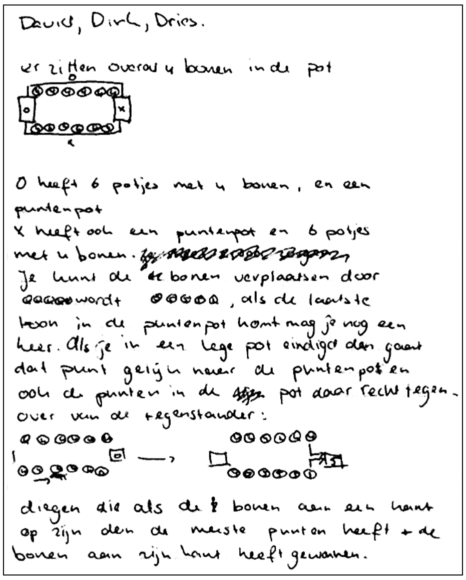


*fig. 4 Het bord voor het spel LUCI van Lex, Gijs en Bo*

Bij de eerste beurt heeft de speler de keus om een streepje te zetten of zijn pion in een vakje op de eerste rij te zetten. Het is niet toegestaan om met twee pionnen op één vakje te staan. De streepjes mogen niet verzet worden. Wanneer de streepjes van een speler op zijn, is hij verplicht zijn pion te verzetten.
Het is niet toegestaan een gebied met je streepjes zo af te bakenen dat een of meerdere vakjes niet meer betreden kunnen worden, of dat een pion het gebied niet meer kan uitkomen.
Het spel eindigt in een gelijkspel als er geen verdere zetten meer mogelijk zijn of als de pionnen de gehele tijd in hetzelfde patroon worden geplaatst. Bijvoorbeeld dat zowel de zwarte als de witte van links naar rechts en andersom wordt verplaatst. De witte pion is als eerste aan zet.
Ondanks de originele opzet van het spel was ook hier de analyse van de verschillende mogelijkheden voor verbetering vatbaar.



David, Dirk, Dries.

er zitten overal 4 bonen in de pot

O heeft 6 potjes met 4 bonen, en een puntenpot
X heeft ook een puntenpot en 6 potjes met 4 bonen.
Je kunt de bonen verplaatsen door wordt , als de laatste boon in de puntenpot komt mag je nog een keer. Als je in een lege pot eindigt dan gaat dat punt gelijk naar de puntenpot en ook de punten in de pot daar recht tegen-over van de tegenstander:

diegen die als de bonen aan een kant op zijn dan de meeste punten heeft + de bonen aan zijn kant heeft gewonnen.

*fig. 5 Een te ingewikkeld spel voor de PO*

Het voorstel van David, Dirk en Dries is een zogenaamd 'MANCALA-spel' (zie bijvoorbeeld Donkers & Uiterwijk, 2003). Figuur 5 beschrijft een spel dat zeker veel te ingewikkeld is om in het kader van een praktische opdracht te kunnen onderzoeken. De spelregels zijn veel te complex en er is ook geen voor de hand liggende simplificering van het spel te vinden. Zelfs eindspelbeschouwingen zijn hier moeilijk en lijken uiteindelijk niet interessant.
In de eerste ronde experimenteren met deze praktische opdracht werd dit toch wel toegelaten. Maar de leerlingen konden later weinig met hun eigen voorstel beginnen. Hun beschouwingen verloren zich in details waarvan het belang niet duidelijk werd. Achteraf gezien werd wel duidelijk dat dit voorstel niet geaccepteerd had mogen worden.


*fig. 6 Leerlingen houden van knutselen*

Samenvattend werden de volgende soorten spelen door de leerlingen voorgesteld:

- heel veel variaties op klassieke bordspelen
- enkele bijzonder originele spelen, zoals TALMAGI of YALI
- variaties op SIM- en op NIM-spelen
- spelen waarin de zetten van de tegenstander worden gekopieerd
- spelen met eigen symmetrie
- 3D-spelen.

Enkele groepen hebben veel moeite gedaan in de daadwerkelijke presentatie van hun spelen door de stukken, de borden en de verpakking in elkaar te knutselen.

## Wat leren leerlingen, leraren en didactici hiervan?

De uiteindelijke praktische opdracht is het resultaat van twee jaar ontwikkeling in negen klassen op vier verschillende scholen. Wij hebben een VWO-versie en een versie voor de HAVO getest en ontwikkeld. Het product is onze ervaring en niet alleen de ontstane schriftelijke instructie.

Wij hebben leerlingen en onszelf, dat wil zeggen de leraren en de vakdidacticus, gevraagd naar de leerresultaten. De docenten die de praktische opdracht hebben gegeven,

hebben in hun klassen een schriftelijke enquête afgenomen en deze in een nagesprek met de leerlingen doorgenomen. Met deze enquête wilden wij erachter komen in hoeverre wij bij deze praktische opdracht Pólya's ideeën waar konden maken. Deze enquête is met het werkstuk meegegroeid.
Over het algemeen geven leerlingen aan dit een leuke praktische opdracht te vinden. Dit is overigens ook te zien op een video-opname van leerlingen die met gekleurde M&M's en briefjes een spel spelen, en zich afvragen hoe je de zetten kunt noteren. Anderen zijn met stiften een NIM-spel aan het spelen en leggen aan elkaar uit hoe het werkt. Het is weer eens wat anders om met het spelen van spelletjes punten voor wiskunde te verdienen. Wiskunde is blijkbaar ook gezellig, creatief en veelzijdig. Ze vonden het een uitdaging om niet-verliezende strategieën te vinden. Het valt op dat VWO-leerlingen met wiskunde B er weinig 'echte' wiskunde in zien; het is meer uitproberen en puzzelen en er zijn geen formules bij nodig: 'meer een wiskunde A-opdracht'. Ze vinden wel dat het hun inzicht verhoogt.
Leerlingen kunnen (eventueel na enige klassikale uitleg) zelf aan de slag met de gesloten onderdelen, die ze een goede inleiding vinden op de open opdracht. De opdrachten vinden ze goed ingeleid en duidelijk gesteld. Het koste sommige groepen wel even tijd om boter, kaas en eieren meteen volledig te behandelen, daarom is er in de uiteindelijke versie van deze praktische opdracht voor gekozen met een simpeler spel te beginnen, en de behandeling van boter, kaas en eieren meer te beperken.
De meeste leerlingen vinden het maken van het eigen spel het moeilijkst en dan met name om in te schatten of een spel misschien te moeilijk is om er een niet-verliezende strategie bij te kunnen bedenken. Ondanks de paar genoemde voorbeeldspellen, die veel leerlingen wel herkennen, kiezen de meesten toch voor een eigen spel omdat dat leuker is. Leerlingen hebben soms wel in de gaten dat ze het zo moeilijk kunnen maken als ze zelf willen, maar ze zouden toch graag meer duidelijkheid willen over de precieze eisen van dit laatste onderdeel.

## Leerlingen zijn over het algemeen tevreden over de wijze van beoordelen

Een groot deel van de leerlingen zegt er meer tijd aan te hebben besteed dan ervoor stond. Dit gebeurde veelal buiten de les, thuis. Strategieën vinden kost veel tijd, maar het opschrijven ook. Er gaat met name veel tijd zitten in het onderscheiden en noteren van gevallen. Het zou wat hun betreft meer benadrukt mogen worden dat de eerste onderdelen veel tijd kosten, maar dat ze in de planning genoeg tijd moeten nemen voor de laatste opdracht waar ze de meeste punten mee kunnen verdienen. Een aantal leerlingen zou meer tijd willen hebben in de les. Toch vindt ook een aardig deel dat ze bij een goede planning wel uitkomen met de tijd.
De meeste leerlingen zijn tevreden over de samenwerking binnen hun groep: samen strategieën zoeken, samen nadenken en elkaar steunen in tijden van frustratie. Docenten laten over het algemeen de groepjes door de leerlingen zelf samenstellen.
Als wiskundige elementen in deze praktische opdracht worden onder meer genoemd: het zoeken naar structuur, logica, gevallen onderscheiden, abstractie, nadenken, slim spelen, inzicht in strategieën en strategieën beschrijven met boomdiagrammen of zelfbedachte notaties. Ze vinden dat ze weinig hebben aan wiskundige voorkennis, al wordt inzicht wel genoemd als zijnde aangeleerd bij het vak wiskunde.

De leerlingen vinden het prettig als er duidelijke begeleiding, hulp, tussentijdse beoordeling, tips en sturing is bij met name (de planning van) het laatste onderdeel. Tijdens de inleidende opdrachten verwachten ze vooral hulp op afroep. Met name in 4 HAVO vinden sommige docenten deze praktische opdracht minder geschikt, omdat zij in wiskunde B graag een gedeelte van de eerder geleerde stof toegepast zien bij een praktische opdracht.
Leerlingen zien dan meteen het nut van deze stof en het is bovendien een noodzakelijke herhaling. De leerlingen op 4 HAVO hebben in het algemeen veel moeite met rekenwerk en dat kan in een praktische opdracht worden geoefend. Bij deze praktische opdracht ontbreekt het hiervoor genoemde aspect. Maar er zijn wel andere kanten die goed aan bod komen zoals creativiteit, het samenwerken in groepjes, het zoeken naar oplossingen en dergelijke. In dat opzicht vinden zij het een uitstekende praktische opdracht.
Hun (voorlopige) conclusie is dan ook dat ze de komende jaren toch liever een meer bij de leerstof aansluitende praktische opdracht willen geven, waarbij ook rekenen noodzakelijk is en die aansluit bij hetgeen de leerlingen horen te beheersen.

De docenten uit onze AZL-groep gaven aan dat zowel het bestuderen van wiskundige inhouden als ook het samenwerken op didactisch gebied in onze groep voor hen prettig en behulpzaam was.

## Conclusie

De praktische opdracht 'Spelen op een slimme manier' is een opdracht die buiten het kader van de gewone schoolstof valt. Dit heeft voor- en nadelen. Voordelig is dat leerlingen een beeld van wiskunde kunnen krijgen zoals de studie van mentale objecten met reproduceerbare eigenschappen (Davis & Hersh, 1980). Zij leren dat waterdicht argumenteren en herkennen van structuren iets heel universeels is, en voelen de kracht van goede argumenten. Het onderwerp is zodanig dat deze aspecten zich niet achter geavanceerde wiskundige technieken verschuilen. Ook kunnen de leerlingen zien dat intuïtie een niet onbelangrijke rol in wiskunde kan spelen. Bijvoorbeeld de meeste strategieën worden eerst intuïtief duidelijk voor-

dat ze concreet worden geformuleerd. Al bij boter, kaas en eieren krijgen zij snel het gevoel dat de beginposities van heel verschillende kwaliteit kunnen zijn.
Naast de intuïtie kunnen zij zien dat creativiteit een grote rol bij wiskundig onderzoek speelt. Het formuleren van de spelregels en ook het vormen van goede begrippen die het spel doorzichtig maken, zijn creatieve handelingen. Juist bij deze creatieve delen van de praktische opdracht gaan zij heel gemotiveerd en actief aan de slag.
Nadelig is dat deze praktische opdracht alleen op een redelijk abstracte manier bij de verdieping van de gewone schoolstof kan helpen. De ervaring bij HAVO-groepen laat zien dat praktische opdrachten in dit opzicht wel zeer belangrijk zijn en de leraar zich vaak niet kan permitteren de gelegenheid tot verdieping van de gewone stof niet hiervoor te gebruiken.
Het werk in zo'n AZL-groep heeft uitstraling. Het materiaal wordt snel verspreid op alle deelnemende scholen, en de deelnemende leraren geven hun expertise graag aan collega's door. Wiskundeleraren hebben het weer eens over wiskunde. Wij nodigen iedereen uit om hiermee verder te gaan – iedereen die 'het zelf wil doen, en niet slaafs in het leidsel wil lopen' van kant en klaar lesmateriaal.

*Mark van den Aarssen, Lindenholt College, Nijmegen*
*Herman Alink, Dolf van den Hombergh en Bart Jordens, Elzendaalcollege, Boxmeer*
*Rainder Kaenders, ILS, Radboud Universiteit en Canisius College,Nijmegen*
*Richard Klein Breteler, Canisius College, Nijmegen*
*Carolien Tacken, Zwijsen College, Veghel*

## Noten

[1] Dergelijke onderzoeksmethoden hebben al een lange traditie. Bijvoorbeeld in de befaamde Wiskobasgroep: 'Het was praten. Niet in het luchtledige, maar om onderwijs te ontwikkelen, praten over ontwikkeld onderwijs dat beproefd zou worden en dat beproefd was. Eén keer beproefd, herzien en bepraat, een tweede keer beproefd en wederom herzien en bepraat, en wellicht nog een derde keer.' (Freudenthal, 1979).
[2] Het artikel van Zermelo beslaat maar vier bladzijden en is zonder veel voorkennis goed leesbaar.
[3] Het artikel van Zermelo, de praktische opdracht, de enquête: u kunt alles downloaden op www.fi.uu.nl/wiskrant.

---

## Wiskunde en werkelijkheid

***Zomercursus van 28 juni t/m 2 juli***
Internationale School voor Wijsbegeerte, Leusden
Begeleiding: Gerard Alberts en Erik Heijerman

We leven in een mathematisch universum. Zonder wiskunde is het reilen en zeilen van onze maatschappij totaal ondenkbaar geworden; de alomtegenwoordigheid van computers, de dienstregeling van de NS, de verkenningen van Mars ... Het wiskundig denken is het centrale instrument om de wereld te verkennen en te beheersen. De zuiverste van de wetenschappen blijkt tegelijk de meest toepasselijke te zijn. Dat is een wonder!
Deze zomercursus voert u op een originele manier door de geschiedenis van de wiskunde. De gebruikelijke gang van het oude Babylonië, via de Arabieren en de Grieken, naar het moderne en postmoderne Westen wordt afgelegd met een filosofische invalshoek, namelijk de verhouding tussen wiskunde en werkelijkheid. Hoe dacht en denkt men over deze verhouding en hoe werkt die opvatting door in de toepassing van het wiskundig denken?
Praktische opdrachten maken deel uit van het programma, maar een wiskundeknobbel is voor het volgen van deze cursus beslist niet vereist!

***Programma***

**Maandag 28 juni**
10.30 Het thema: wiskunde en werkelijkheid - *Gerard Alberts*
10.45 Het Pythagoreïsche wereldbeeld en de filosofie van de wiskunde in Griekenland - *Frans de Haas*
15.00 Hoe abstract is wiskundig denken? - *Louk Fleischhacker*
20.00 Filosofie van de wiskunde in de Middeleeuwen - *Paul Bakker*

**Dinsdag 29 juni**
09.30 Aan wie heeft Willem Bartjens zijn roem te danken? - *Marjolein Kool*
15.00 De rol van de wiskunde in de kunst van de Renaissance - *Joop Doorman*
20.00 Wiskunde of religie – Newton en Spinoza - *Klaas Landsman*

**Woensdag 30 juni**
09.30 De mathematisering van het wereldbeeld in de 17e eeuw - *Rienk Vermij*
15.00 Het ontstaan van de zuivere wiskunde in Nederland - *Danny Beckers*
20.00 De ontdekking van de niet-euclidische meetkunde: van geometrie naar groepentheorie (19e eeuw) - *Teun Koetsier*

**Donderdag 1 juli**
09.30 De grondslagenstrijd rond 1900 - *Albert Visser*
14.00 De filosofie van de wiskunde bij L.E.J. Brouwer - *Erik Heijerman*
14.30 Excursie naar Brouwers graf / gedenksteen in Blaricum en Mondriaan kijken in Laren
20.00 Van waarheid naar model; de parallelle ontwikkeling van modeltheorie en wiskundig modelleren – *Gerard Alberts*

**Vrijdag 2 juli**
09.30 Wiskundig modelleren en computational science. Wiskunde van de 20e eeuw: geschiedenis en maatschappelijke functie - *Gerard Alberts en Robbert Dijkgraaf*
12.30 Afsluitende lunch

**Kosten**
Cursus: € 310,- (Vrienden ISVW € 296,50)
Verblijf: € 313,90 (zonder logies/ontbijt € 188,50).

**Aanmelding en informatie**
ISVW, Dodeweg 8, 3832 RD Leusden
033-4227200 of info@isvw.nl
www.isvw.nl