Een evenwichtige toets bevat vragen op de drie niveaus van de piramide van Jan de Lange die in het vorige artikel van **Truus Dekker** aan de orde is geweest. Maar hoe maak je een evenwichtige toets? Over contexten en non-texten gaat dit artikel.

Een evenwichtige toets maken

Inleiding

In een vorig artikel beschreef ik het piramidemodel voor het maken van een evenwichtige toets. Met een *evenwichtige* toets bedoel ik er eentje die niet alleen toetst of leerlingen allerlei begrippen en definities kennen, en of ze uit het hoofd geleerde oplossingsmethodes kunnen reproduceren (niveau I), maar ook of ze hun kennis kunnen toepassen in een nieuwe situatie, zelf hun wiskundige gereedschap kunnen kiezen om een bepaald probleem op te lossen (niveau II) en kunnen generaliseren, redeneren en bewijzen (niveau III).
Een vuistregel voor de verhouding van opgaven op niveau I : niveau II : niveau III is 3 : 2 : 1.

Hoe gaat dat nu in de praktijk, hoe maak je goede toetsopgaven die passen in het piramidemodel en hoe stel je een evenwichtige toets samen? Daarover gaat dit artikel.

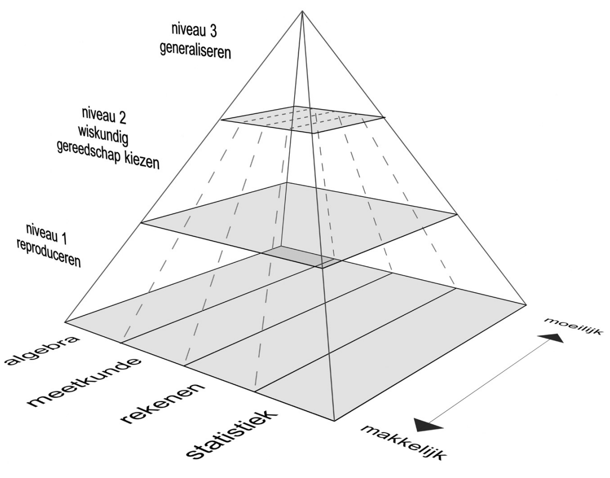


fig. 1 Het piramidemodel

Moeten alle opgaven in een evenwichtige toets een context hebben?

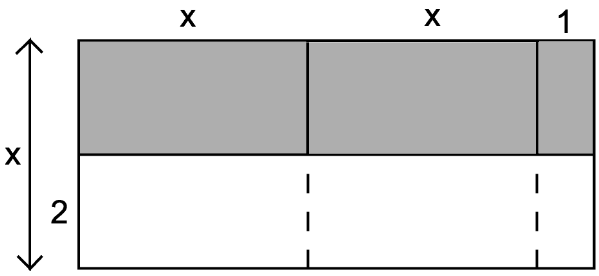
Sommige onderwerpen zijn niet geschikt om via een context te vragen. Vooral op niveau I zullen de vragen soms zonder context gesteld worden. Als ik wil weten of leerlingen handig kunnen manipuleren met formules is het vaak onzin om daar zelf een context bij te verzinnen.

Dan krijg je wat ik *non-texten* noem, zoals in het voorbeeld hieronder. Dit is overigens een voorbeeld uit een toets die door een uitgever beschikbaar is gesteld.

Meneer de Vries heeft een rechthoekig stuk bouwland. De lengte is $(2x + 1)$ hm en de breedte is $(x - 2)$ hm. De oppervlakte is 18 ha.

a. Stel een vergelijking op.
b. Laat zien dat je de vergelijking kunt schrijven als $2x^2 - 3x - 20 = 0$
c. Bereken de lengte en de breedte van het stuk bouwland.

In zo'n geval zou ik maar kiezen voor een 'kale' opgave. De opgave hierboven kan ook op de volgende manier worden gesteld:



a. Schrijf een formule op voor de oppervlakte O van het gearceerde deel.
b. Veronderstel dat O = 18. Laat zien dat de vergelijking die daarbij hoort te schrijven is als $2x^2 - 3x - 20 = 0$
c. Voor welke lengte en breedte van de gearceerde rechthoek geldt dat O = 18?

Een aantal opgaven in de toets zal waarschijnlijk wel binnen een context worden gesteld. We willen immers weten

of leerlingen hun kennis kunnen toepassen in een voor hen onbekende situatie?
Zelf begin ik altijd met de grotere contextopgaven in een toets. Het is gemakkelijker om later nog een paar opgaven op niveau I toe te voegen over onderwerpen die nog aan de orde moeten komen, dan een context te vinden die bij een heel specifiek onderwerp uit de toets past. En vaak gebruik ik de toets van de uitgever als uitgangspunt. Soms kun je een opgave waarvan je de context wel geschikt vindt, maar de vragen die erbij gesteld worden niet, aanpassen zodat de vragen wel aan jouw eisen voldoen. Zelf nieuwe contexten vinden is meer werk.

Waar haal ik goede contexten vandaan?

Goede contexten vinden is een kwestie van verzamelen. Veel docenten hebben een hele stapel knipsels en foto's waar ze uit kunnen putten. Kijk in de omgeving van de school of maak foto's van interessante objecten in de buurt; leerlingen waarderen het wanneer een opgave betrekking heeft op hun eigen omgeving. Vraag vrienden en bekenden om geschikte plaatjes of krantenknipsels te bewaren. Zoek op het internet. Dat materiaal zal niet altijd direct gebruikt kunnen worden, maar iets gaan zoeken op het moment dat je het nodig hebt is tijdrovend. De tekst, en soms ook het bijbehorende plaatje, moet vaak aangepast worden zodat de taal die gebruikt wordt de leerlingen niet hindert bij het begrijpen van de (wiskundige) inhoud.

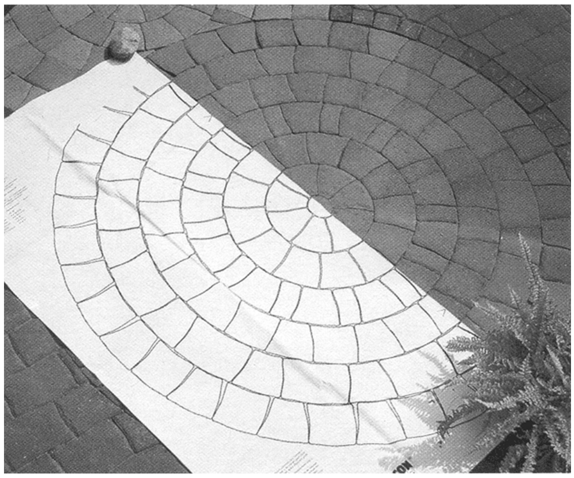
Mijn eerste vraag bij een bestaand contextprobleem is altijd: 'Waarom zou iemand dat willen weten? Is het wel een echt probleem?' Natuurlijk zullen leerlingen de vragen die we ze stellen heus ook wel beantwoorden als het geen echte problemen zijn. In hun lesboeken komen ze ook allerlei onzinproblemen tegen, maar dat is nog geen reden om die in een goede toets aan hen voor te leggen.

Opnieuw een voorbeeld. De wiskundige inhoud die getoetst moet worden is het werken met de formule voor het berekenen van de oppervlakte van een cirkel.

> Annelies is pizza-koerier. Zij bezorgt pizza's die verpakt zijn in vierkante kartonnen dozen. De bodem van zo'n doos is 28 bij 28 cm. Een ronde pizza past er precies in.
> Bereken de oppervlakte van een pizza. Rond af op helen.

De context deugt niet voor die vraag. Waarom zou iemand de oppervlakte van een pizza willen weten? Je kunt proberen om de opgave aan te passen, maar een andere context zoeken die een vraag met dezelfde wiskundige inhoud mogelijk maakt, kan ook. Dat heb ik in dit geval gedaan.

De volgende tekening komt uit een catalogus van een tuincentrum. De tekst 'circa 9 m^2' uit de catalogus is aangepast tot 'oppervlakte cirkel ongeveer 9 m^2'.



> Terracotta cirkel, oppervlakte cirkel ongeveer 9 m^2
>
> In de catalogus staat: *Een rond terras, geschikt voor vier personen, moet ten minste een doorsnede van drie meter hebben.*
> Is de terracotta cirkel van de foto geschikt als terras voor vier personen?

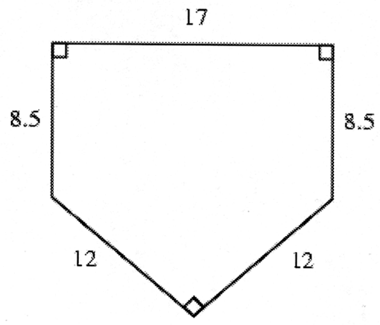
De vraag kan op twee manieren worden beantwoord. Je kunt, uitgaande van een oppervlakte van 9 m^2, de bijbehorende diameter berekenen (3,39 m, dus de terracotta cirkel is geschikt als terras) of beginnen bij een doorsnede van 3 meter en de bijbehorende oppervlakte berekenen (7 m^2 en de terracotta cirkel is groter, namelijk 9 m^2)

En de opgaven op niveau III? Die zijn moeilijk te vinden of te maken.

Opgaven op niveau III zijn inderdaad niet alleen de moeilijkste voor de leerlingen, maar ze zijn ook het lastigst om te ontwerpen. In het begin heb je de neiging om een vraag het stempel 'niveau III' te geven wanneer de leerling een groot aantal stappen moet maken om het probleem op te lossen. Dat laatste maakt het een ingewikkeld probleem, maar het kan nog steeds een opgave op een laag niveau zijn. Vragen naar het berekenen van een lichaamsdiagonaal in een balk is een stuk lastiger dan het berekenen van de hypotenusa van een rechthoekige driehoek, maar het is allebei niveau I.
Bedenk dat er een dimensie gemakkelijk → moeilijk in de piramide zit.

Een opgave op niveau III gaat altijd over een context die de leerling niet eerder heeft gezien. De context kan overigens ook uit de wiskunde zelf komen. Meestal moet de leerling zelf nog het vereenvoudigde wiskundige model maken dat nodig is om het probleem op te lossen. Soms geven we het model en vragen welke aanpassingen er nodig zijn. Eventueel moeten aannames gedaan worden als

Home Plate



Hierboven zie je de specificaties voor een 'home plate', gebruikt bij baseball. De maten zijn in inches. Er staan drie aanduidingen voor een rechte hoek in de tekening. Kun je zeker weten dat het rechte hoeken zijn?

er onvoldoende informatie is. En er moet (wiskundig) geredeneerd worden, er worden argumenten gegeven, generalisaties gemaakt. Jezelf vragen kunnen stellen en je eigen opgaven ontwerpen kan daar ook onder vallen. Voor ik zelf opgaven op dit niveau ging ontwerpen heb ik vooral veel naar voorbeelden van anderen gekeken en die, soms in aangepaste vorm, voor mijn eigen leerlingen gebruikt. Dat geldt voor de toetsen van alle leerlingen aan wie ik les heb gegeven, van beroepsonderwijs tot gymnasium, voor klas 1 tot en met klas 6.

Ook voor het basisonderwijs heb ik goede voorbeelden gezien. Zo'n opgave probeerde ik eerst vaak uit in een klas, op papier of mondeling. Daarna paste ik hem aan; soms was de taal die ik gebruikte te moeilijk of kon een leerling de opgave anders lezen dan ik bedoeld had. De uitwerkingen van die probeersels bewaarde ik om te gebruiken bij de antwoordmodellen. Veel opgaven sneuvelden in dat stadium; als ze geschikt bleken, gebruikte ik ze het jaar daarop in een toets.

Veel werk? Jazeker, maar je kunt het werk verdelen en niet alles hoeft in een keer. Samen met de collega's is er een mooi bestand met allerlei verschillende toetsen per hoofdstuk opgebouwd.

Een voorbeeld van een opgave, gevonden via het internet (met dank aan Aad Goddijn):
Een rechthoek met zijden van 8,5 en 17, dat is geen probleem. Als je aanneemt dat de basis van de driehoek 17 inches is, kunnen de bovenste twee hoeken precies 90 graden zijn. Zeker weet je dat niet, het zou ook een parallellogram kunnen zijn waarbij de ene hoek net iets meer en de andere hoek net iets minder dan 90 graden is. Je zou ook nog moeten weten dat de diagonalen even lang zijn om zeker te weten dat het om een rechthoek gaat. Die diagonalen zijn echter niet gegeven.

En dan de driehoek. Van een rechthoekige driehoek kun je met behulp van de stelling van Pythagoras de langste zijde berekenen: $12^2 + 12^2 = 144 + 144 = 288$.
Maar $17^2 = 289$. Niet precies een rechte hoek dus? Maar als ik de wortel uit 288 bereken vind ik 16,97…. en dat is afgerond 17. Die maat 17 zou een afgeronde maat kunnen zijn. Hoeveel maakt het trouwens uit, in graden?

$$\cos\,(\text{halvetophoek}) = \frac{8{,}5}{12}$$

De halve tophoek is 44,9° en de hele tophoek $2 \times 44{,}9° = 89{,}8°$, een verschil van 0,2 graden. Als ik uitga van die 16,97… vind ik een halve tophoek van precies 45°.

Conclusie: Die hoeken kunnen precies recht zijn wanneer het bovenste deel een rechthoek is en wanneer de maat van 17 inches een afgerond getal is. Wat vindt u van zo'n redenering?

Hoe bereid ik mijn leerlingen voor op dit soort vragen?

Beantwoorden van met name vragen op niveau II en III gaat niet vanzelf. Door ze in de klas, tijdens een klassendiscussie, aan de orde te stellen en de antwoorden op dit type vragen – als u ze in een toets hebt gesteld – na te bespreken, helpt u de leerlingen om goede antwoorden te formuleren op open vragen. Vraag leerlingen ook eens om zelf uitwerkingen die u hebt verzameld - liefst van een andere klas of een ander leerjaar - te beoordelen aan de hand van uw normering. De leerlingen zelf toetsvragen laten maken bij een hoofdstuk, uiteraard met de uitwerkingen en wellicht een normering, helpt ook.
Meerkeuzevragen beantwoorden moet je ook leren, dus waarom zouden we veronderstellen dat het beantwoorden van open vragen wel vanzelf gaat? Ik denk overigens dat het leren beantwoorden van open vragen zoals hier besproken, meer zin heeft en dus ook meer aandacht zou moeten krijgen in de klas.

Truus Dekker, Freudenthal Instituut, Utrecht