In het kader van het WELP-project is er voor de algebra van klas 2 en 3 van HAVO en VWO nieuw lesmateriaal ontwikkeld waarin het gebruik van applets een centrale plaats inneemt. **Peter Boon** gaat in dit artikel in op het onderdeel letterrekenen en beschrijft de applets en modellen die bij dit onderwerp zijn te gebruiken.

WELP: letterrekenen met applets

Inleiding

Het WELP-project is een vervolg op het Wisweb-project. In WELP (Wisweb En LessenPraktijk) werd gewerkt aan een bredere implementatie en verspreiding van de bij Wisweb ontwikkelde software, kennis en ervaringen. Behalve het FI (Freudenthal Instituut), werkten aan dit project vier VO-scholen, drie uitgevers van wiskundemethoden, het APS en Texas Instruments mee.
In WELP is door het FI samen met de scholen een algebraleerlijn voor klas 2 en 3 van HAVO en VWO ontwikkeld en geïmplementeerd. Er werd uitgegaan van de leerdoelen zoals die er nu zijn, maar de leerlijn werd zo opgezet en ontwikkeld, dat optimaal gebruik wordt gemaakt van de didactische mogelijkheden van ICT (voornamelijk applets).

Er is een goede reden om bij het maken van nieuw lesmateriaal met applets aandacht te besteden aan de algebraonderwerpen. Zowel uit onderzoek als uit praktijkervaring is gebleken dat er een probleem is op het gebied van de algebraïsche vaardigheden die leerlingen in de onderbouw zouden moeten leren. Zie hiervoor onder andere het artikel van Monica Wijers (2000). Een citaat daaruit: ‘Er is in de uitwerking van de algebraleerlijn geen goed evenwicht gevonden tussen de aandacht voor begrip en betekenis en het inoefenen van vaardigheden. Vaardigheden worden in de haast aangeboden en er is een weinig doordachte aanpak voor de wijze voor het oefenen daarvan’. Toen ging het om de eerste schoolboeken bij het nieuwe W12-16 programma, maar de problemen zijn nog steeds actueel. Binnen WELP werd aan deze problematiek aandacht besteed, en er werd gekeken hoe applets een bijdrage konden leveren aan een mogelijke verbetering. In dit artikel staat het algebra-onderdeel letterrekenen, een van de onderwerpen die in het WELP-materiaal opnieuw werden vormgegeven, centraal. De specifieke problemen en discussies rond dit onderwerp worden aangestipt, we laten iets zien van de manier waarop dit onderwerp in enkele wiskundeboeken is uitgewerkt en hoe het WELP-materiaal zich daarvan onderscheidt. Dit artikel schetst verder de mogelijkheden die de verschillende applets op dit gebied te bieden hebben.
Een tweede artikel in dit nummer, ‘Van touwpuzzels tot oppervlaktealgebra’ gaat gedetailleerder in op een deel van het in WELP ontwikkelde lesmateriaal rond dit onderwerp en de ervaringen die daarmee zijn opgedaan in de tweede klas.

Betekenisvolle algebra en letterrekenen

Het eerste deel van het nieuw ontworpen WELP-lesmateriaal had als onderwerp ‘symbolisch rekenen’ of ‘letterrekenen’, en moest min of meer vervangend zijn voor de inhoud van hoofdstuk 5 van klas 2 van *Moderne Wiskunde*, met de titel ‘Haakjes’. Bij het maken van het WELP-lesmateriaal is eerst begonnen met een analyse van de algebra in dit hoofdstuk, en er is ook gekeken naar de samenhang met de algebra die leerlingen in klas 1 hebben gehad.

De algebra van de eerste klas richt zich voor een groot deel op de introductie van het begrip formule. Dat gebeurt vanuit een rijke verzameling van realistische contextproblemen, waarin allerlei verbanden een belangrijke rol spelen. Eerst worden verbanden ontdekt en beschreven met woorden, maar ook met tabellen en (aanvankelijk globale) grafieken. Vervolgens worden in die verbanden rekenstappen ontdekt die met rekenpijlen worden gevisualiseerd. Rekenpijlen worden gecombineerd tot machientjes met een etiket waarop staat welke berekening wordt uitgevoerd. Zo’n etiket wordt vervolgens de formule die het verband beschrijft. Een mooi voorbeeld van progressief formaliseren, waarbij wiskunde stap voor stap formeler wordt, maar met een stevige verankering in betekenisvolle situaties. In *Moderne Wiskunde* wordt voor dat proces rustig de tijd genomen. Er worden vier hoofdstukken aan besteed voordat de formele formulenotatie wordt ingevoerd. In de tweede klas wordt op deze kennis voortgebouwd in het hoofdstuk over lineaire formules.

Het hoofdstuk voor klas 2 over letterrekenen is echter heel anders van aard dan de eerdere algebrahoofdstukken. Formules worden hier niet in de eerste plaats gebruikt om realistische situaties te beschrijven zoals voorheen gebeurde, maar worden nu veel meer los van een context bekeken en bestudeerd. De vaardigheden waar het om gaat,

betreffen nu niet het beschrijven of algebraïseren van contexten, maar vooral het manipuleren van de formules zelf (herleiden, haakjes wegwerken enzovoort). Er worden wel contexten gebruikt, maar dan vooral als korte illustratie bij formele manipulaties. Bovendien verdwijnen deze alweer snel naar de achtergrond of worden vervangen door een makkelijk te onthouden rekenschema.
Natuurlijk is het een punt van discussie, en die discussie is niet nieuw (zie Kemme, 1990), in hoeverre de verbinding met contexten voor deze algebra rond het letterrekenen nodig en wenselijk is. Een argument tegen zou kunnen zijn dat bij dit onderwerp een niveau van algebra bedrijven bereikt is, waarbij het juist de bedoeling is om los te komen van de contexten. Wanneer een bepaald probleem is vertaald in algebrataal, biedt dit de mogelijkheid om los te komen van de ballast van de detailkennis over die context, en op een veel efficiënter niveau te redeneren en afleidingen te maken. Dus waarom zouden we ons bij het onderwijzen van letterrekenen niet beperken tot het aanleren van de regels en grammatica van de algebrataal?
Een argument om bij letterrekenen wel aandacht te geven aan betekenisvolle situaties, is dat daarmee voorkomen kan worden dat algebra een geïsoleerde wereld van aangeleerde, maar niet begrepen trucjes wordt. Door een stevigere verbinding met betekenisvolle situaties worden niet alleen de regels en grammatica van de algebra makkelijker te begrijpen, ook biedt het meer mogelijkheden om algebra te ontdekken als gereedschap voor het oplossen van problemen. In de praktijk van het onderwijs zal een balans moeten worden gezocht tussen opdrachten waarin contexten een rol spelen, en opdrachten waarin die contexten meer naar de achtergrond verdwijnen om efficiënter algebra te kunnen bedrijven. De verschillende wiskundemethoden maken daarin een eigen keuze.
Een voorbeeld uit *Moderne Wiskunde* (figuur 1): dit is een context waarin het samennemen van gelijke termen zinvol is.

1 Astrid legt een rechthoek met rietjes. De lengte van deze rietjes in cm noemt ze r.
a Leg uit dat je de omtrek van deze rechthoek in cm als volgt kunt opschrijven:
omtrek $= 4r + 2r + 4r + 2r$
b Hoe groot is de omtrek als $r = 5$? En als $r = 15$?
c Zoek uit hoe groot r is als de omtrek 36 cm is.
d Volgens Astrid kun je de formule korter schrijven: *omtrek* $= 12r$
Hoe is ze aan deze formule gekomen?
e Bereken r als de omtrek 84 cm is. En ook als de omtrek 30 cm is.
f Leg uit waarom *omtrek* $= 12r$ een lineaire formule is.

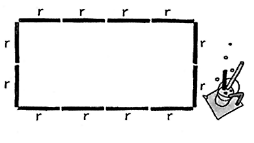


fig. 1 Context uit Moderne Wiskunde

Een bladzijde verder wordt de formele regel gepresenteerd (figuur 2). Die moet vervolgens worden toegepast op een rijtje te herleiden formules.

In de formule $l = 4a + 2a$ zijn $4a$ en $2a$ **gelijksoortige termen.** Gelijksoortige termen kun je samennemen. Je krijgt dan: $l = 6a$
In de formule $v = 2p + 4q$ zijn $2p$ en $4q$ geen gelijksoortige termen. Deze formule kun je daarom niet korter schrijven.

formule	formule korter
$a = 2p + 3p$	$a = 5p$
$w = 4r - 7r$	$w = -3r$
$f = 8g + 8h$	kan niet korter
$y = 9 + 6x$	kan niet korter

fig. 2 Uit Moderne Wiskunde

Een ander voorbeeld wordt gegeven in figuur 3: Het oppervlaktemodel (rechthoekmodel) wordt gebruikt als illustratie voor de distributieve wet: $10\,(p + 3) = 10p + 30$.

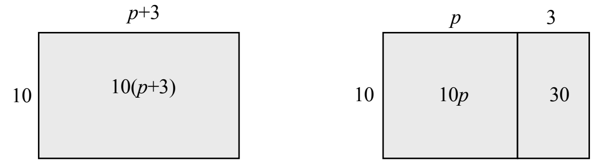
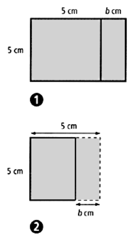


fig. 3 Oppervlaktemodel

In één paragraaf wordt dit model bij vier opdrachten gebruikt. Vervolgens wordt het oppervlaktemodel verlaten en ingeruild voor de vermenigvuldigingstabel, zodat ook negatieve getallen mogelijk worden (figuur 4).

16a Aan een vierkant met zijden van 5 cm wordt eerst een strook met een breedte van b cm gelegd.
Geef voor de totale oppervlakte een formule met haakjes en een formule zonder haakjes.
b Daarna wordt er een strook van b cm afgehaald.
Leg uit dat nu geldt: $opp = 5(5 - b)$
c Schrijf deze formule zonder haakjes.
d Waarom kun je bij $p = -5(5 + b)$ geen rechthoek tekenen?
e Maak een vermenigvuldigtabel en schrijf de formule zonder haakjes.
f Schrijf $p = -5(5 - b)$ zonder haakjes.



Bij het zonder haakjes schrijven van formules waarin negatieve getallen voorkomen, is het niet altijd mogelijk een rechthoek te tekenen. Maar met behulp van een vermenigvuldigtabel kun je deze formules wel zonder haakjes schrijven.

$r = -4(3 - a)$
geeft
$r = -12 + 4a$

×	3	−a
−4	−12	+4a

$s = -b(b + 6)$
geeft
$s = -b^2 - 6b$

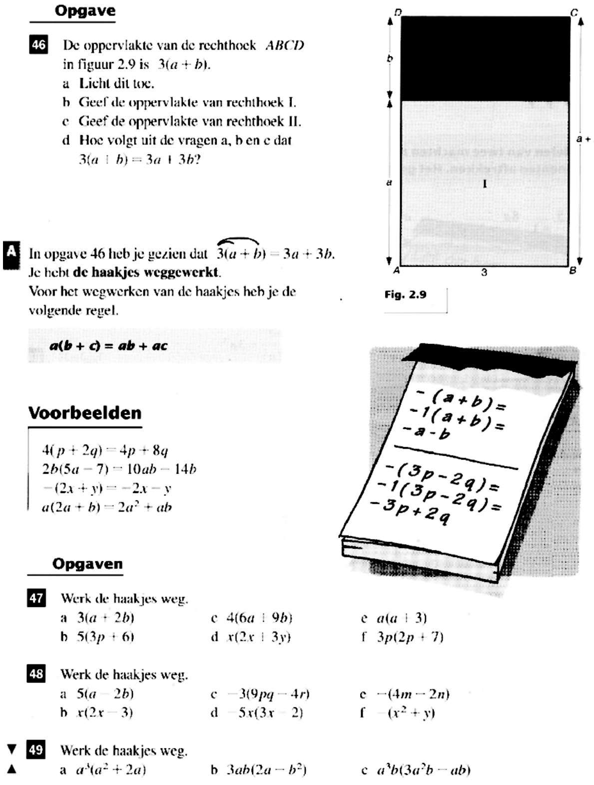
×	b	+6
−b	$-b^2$	−6b

17 Schrijf de volgende formules zonder haakjes.
Gebruik eventueel een vermenigvuldigtabel.
a $t = 6(c - 3)$ **e** $h = 11(6 - 4a)$
b $y = 13(2 - x)$ **f** $p = -6(-t - 14)$
c $w = -5(3d + 5)$ **g** $d = -k(5 + 3k)$
d $g = e(e - \frac{1}{2})$ **h** $r = -8(-7 - q)$
Extra oefening – opdracht E-6

fig. 4 Naar de vermenigvuldigingstabel

In feite wordt hiermee de context al vroegtijdig ingeruild voor een handig rekenschema bij de formele regel. In figuur 5 zien we dat in *Getal en Ruimte* de stap naar het werken zonder context nog veel sneller wordt gemaakt. Als rekenschema wordt hier de zogenaamde ‘papegaaienbek’ (boogjes) gebruikt.

We zien in de boeken van *Moderne Wiskunde* en, in nog sterkere mate, van *Getal en Ruimte* een neiging om bij het onderwerp letterrekenen snel de betekenisvolle modellen en contexten los te laten, en het onderwijs te richten op het leren van de formele regels. De geboden hulpmiddelen bij het leren van deze regels zijn rekenschema’s zoals de vermenigvuldigingstabel en de papegaaienbek.
Of deze middelen bijdragen aan een echt begrip van wat equivalente formules zijn, en inzicht geven waarom het nuttig is om daarmee te kunnen werken, is de vraag.



Opgave

46 De oppervlakte van de rechthoek $ABCD$ in figuur 2.9 is $3(a+b)$.
a Licht dit toe.
b Geef de oppervlakte van rechthoek I.
c Geef de oppervlakte van rechthoek II.
d Hoe volgt uit de vragen a, b en c dat $3(a+b)=3a+3b$?

A In opgave 46 heb je gezien dat $3(a+b)=3a+3b$.
Je hebt **de haakjes weggewerkt**.
Voor het wegwerken van de haakjes heb je de volgende regel.

$$a(b+c)=ab+ac$$

Voorbeelden

$4(p+2q)=4p+8q$
$2b(5a-7)=10ab-14b$
$-(2x+y)=-2x-y$
$a(2a+b)=2a^2+ab$

Opgaven

47 Werk de haakjes weg.
a $3(a+2b)$ c $4(6a+9b)$ e $a(a+3)$
b $5(3p+6)$ d $x(2x+3y)$ f $3p(2p+7)$

48 Werk de haakjes weg.
a $5(a-2b)$ c $-3(9pq-4r)$ e $-(4m-2n)$
b $x(2x-3)$ d $-5x(3x-2)$ f $-(x^2+y)$

▼ **49** Werk de haakjes weg.
▲ a $a^3(a^2+2a)$ b $3ab(2a-b^2)$ c $a^3b(3a^2b-ab)$

fig. 5 Uit Getal en Ruimte

In een artikel in de *Nieuwe Wiskrant* (december 1999) neemt Martin Kindt hierover een duidelijk standpunt in: '... Natuurlijk weet ik ook wel dat je in de wiskunde veel steun hebt aan optische schema's en dat je, als je steeds wilt teruggrijpen op inzicht, misschien niet hard genoeg opschiet en op den duur zelfs vastloopt. Het fundamentele probleem is echter dat het schematiseren vrijwel altijd wordt geforceerd voordat het aan te leren procédé begripsmatig is verwerkt; het schema vervangt het inzicht ... Het gaat bij het 'symbolisch rekenen' nog steeds vooral over het 'hoe' en niet over het 'waarom'.
Het lijkt er wel op of de klassieke algebra een ander soort wiskunde is, die je alleen kunt aanleren via nadoen en oefenen en waarbij je eigenlijk maar zo min mogelijk moet nadenken ...'
Natuurlijk zullen leerlingen bij dit soort kale trainingen in symbolisch rekenen specifieke vaardigheden opdoen, maar of dit de vaardigheden zijn waarmee ze in de tweede fase van het voortgezet onderwijs echt verder komen is de vraag.
In het artikel: 'Welke algebra heb je nodig in 4 VWO' (2000) van Monica Wijers en Sieb Kemme, laten de schrijvers zien dat opgaven waarin uitsluitend een beroep wordt gedaan op deze specifieke instrumentele vaardigheden in de vierdeklasboeken in de minderheid zijn. Voorts betogen zij dat, wanneer dit soort vaardigheden kaal en los zijn aangeleerd, leerlingen vaak niet in staat zijn ze in te zetten in opgaven waarin ze meer ingebed gebruikt moeten worden. Ook dit soort signalen pleiten ervoor het verwerven van algebraïsche vaardigheden in te bedden in een betekenisvolle omgeving.

Wat applets kunnen bijdragen

In het WELP-lesmateriaal is bij het onderdeel letterrekenen gekozen voor een aanpak met meer aandacht voor betekenisvolle contexten en modellen dan in de meeste schoolboeken het geval is. In de rest van dit artikel bekijken we de specifieke bijdrage die de verschillende WisWeb-applets in deze richting kunnen leveren. In het artikel van Michiel Doorman wordt een deel van het lesmateriaal zelf en de ervaringen ermee in de klas besproken. Op het WisWeb zijn verschillende applets die gebruikt kunnen worden bij letterrekenen. Er zijn applets die primair gericht zijn op de visualisatie van formules en variabelen in het lengte- en oppervlaktemodel, en die binnen dit model allerlei activiteiten mogelijk maken, die zonder computer niet, of veel lastiger zijn uit te voeren. We denken dan aan applets als *Geometrische Algebra 1d*, *Geometrische Algebra 2d* en *Oppervlaktealgebra*. Verder zijn er applets als *Haakjessommen* (verschillende varianten) en *Vermenigvuldigen met tabellen*, waarbij de vaardigheden op een formeler niveau worden geoefend, maar waarbij wel nog steeds de mogelijkheid wordt geboden om terug te gaan naar de onderliggende modellen.

Geometrische Algebra 1d
In dit applet kunnen optellingen worden uitgevoerd waarbij getallen lengtes voorstellen. Pijlen van een bepaalde lengte kunnen aan elkaar worden gekoppeld tot nieuwe pijlen, waarbij de totale lengte wordt geëvalueerd. Een pijl van lengte 3 en een pijl van lengte 8 leveren een pijl van lengte 11. Er zijn echter ook pijlen met een variabele lengte te gebruiken. Daarvan zijn er drie soorten: x, y en z. De lengtes van deze pijlen kunnen steeds (onafhankelijk van elkaar) worden aangepast door te slepen met de muis. Deze pijlen zijn op dezelfde manier als de pijlen met een vaste lengte te combineren tot nieuwe pijlen. Twee pijlen van lengte x en een pijl van lengte 3 worden, aan elkaar gekoppeld, één pijl met lengte $2x + 3$ (zie figuur 6). De pijlen hebben niet alleen een lengte, ze hebben ook een richting. Daarmee krijgen ook negatieve getallen betekenis in het model (zie figuur 7).
Het applet biedt de mogelijkheid om vanuit bekende zaken zoals het optellen van positieve en negatieve getallen, met dezelfde operaties variabele expressies op te bouwen. De dynamiek die het mogelijk maakt om de variabelepijlen van lengte te veranderen laat het verband van de variabelewaarde en de corresponderende expressiewaarde overtuigend zien. Op deze wijze kan onder andere een aanschouwelijke basis worden gelegd voor het oplossen van vergelijkingen. Binnen dit applet zijn ook allerlei activiteiten te ontwerpen die aandacht besteden aan de gelijkwaardigheid van verschillende (eerstegraads) expressies. Zie hiervoor de voorbeelden in de figuren 8, 9 en 10.

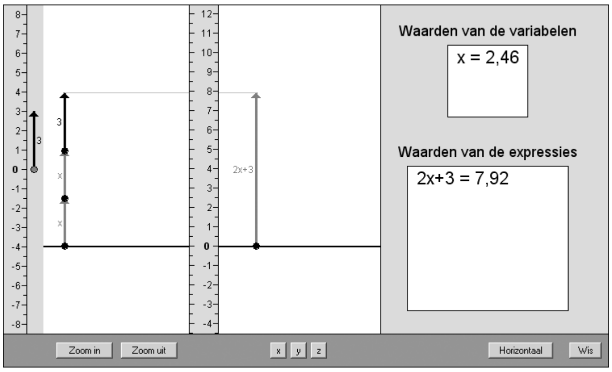


fig. 6 Pijlen optellen

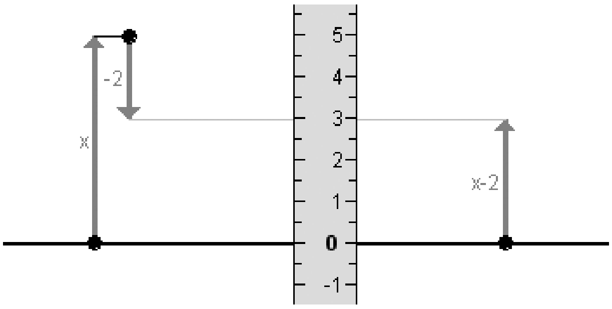


fig. 7 Ook negatieve getallen krijgen betekenis

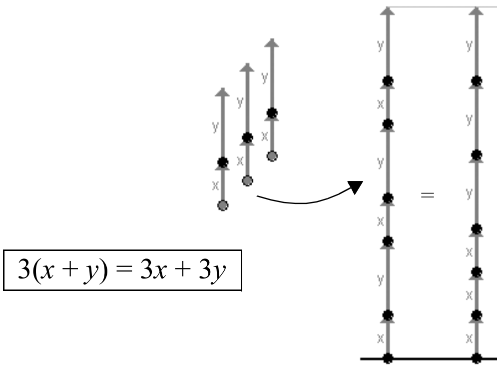


fig. 8 Gelijkwaardigheid van expressies

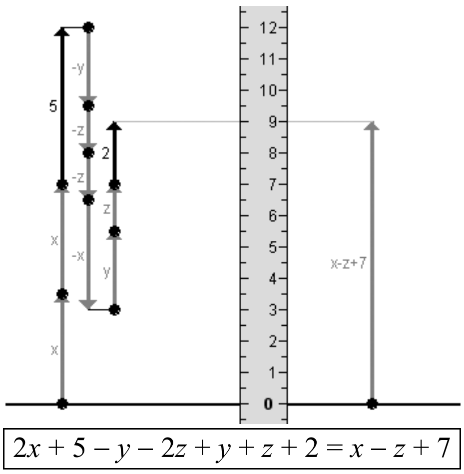


fig. 9 ...en van ingewikkelde expressies

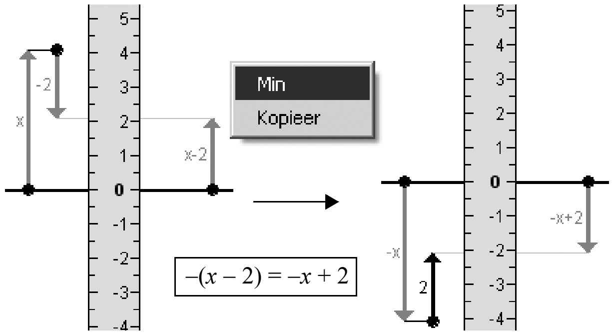


fig. 10 Het tegengestelde bepalen

Geometrische Algebra 2d

Dit applet is een uitbreiding van *Geometrische Algebra 1d*. De pijlen kunnen niet alleen ‘opgeteld’ worden, maar ook ‘vermenigvuldigd’, door ze op te laten treden als lengte en breedte van een rechthoek. Op die manier kunnen ook tweedegraads expressies worden gebouwd. In *Geometrische Algebra 2d* worden de gebouwde expressies niet automatisch geëvalueerd naar de kortst mogelijke expressies zoals bij *Geometrische Algebra 1d*.

Via een popup-menu kunnen de gemaakte rechthoeken worden bewerkt (gesplitst, samengevoegd, losgemaakt enzovoort) waardoor er verschillende gelijkwaardige expressies kunnen worden gemaakt door herordening van de aanwezige rechthoeken (zie figuur 12). Algebraïsche bewerkingen, zoals haakjes wegwerken en ontbinden, krijgen dus betekenis in het herordenen van oppervlakte, te vergelijken met het herordenen van pijlen in *Geometrische Algebra 1d.*

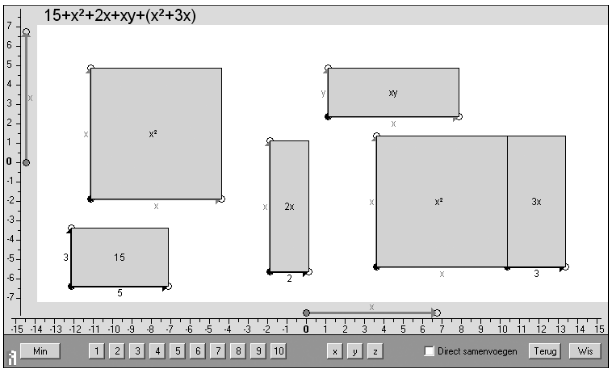


fig. 11 Oppervlaktealgebra

Oppervlaktealgebra

In het applet *Geometrische Algebra 2d* zijn leerlingen vooral bezig met het construeren van oppervlakten bij gegeven formules en het herordenen van oppervlakten tot figuren met gelijkwaardige formules. Het opstellen van de bijbehorende formules wordt gedaan door het programma en vormt daarmee een voortdurende feedback op de handelingen van de leerlingen. Het applet *Oppervlaktealgebra* werkt omgekeerd. De rechthoeken of samenstellingen daarvan zijn gegeven. Het is aan de leerling om de bijbehorende formules of delen daarvan te vinden. De contextgebonden begrippen: rechthoekformule en stukjesformule worden hier gebruikt in plaats van formele begrippen als ontbinding en uitwerking (zonder haakjes).

Behalve het oefenen van de overgang van rechthoeksformule naar stukjesformule en omgekeerd, zijn er opdrachten die dit stramien doorbreken. Zie bijvoorbeeld figuur 14. Ook wordt er gewerkt met formules met mintekens, maar alleen voorzover die formules betekenis hebben in een oppervlaktecontext (figuur 14).

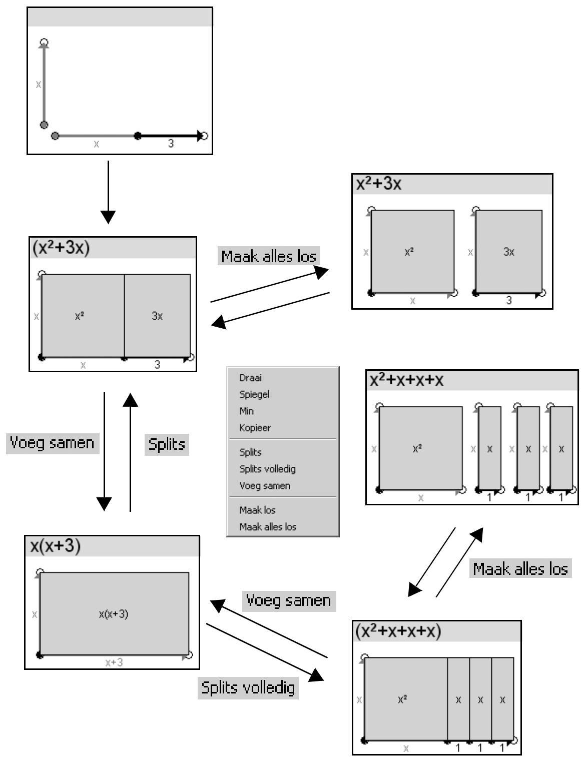


fig. 12 Mogelijkheden van Geometrische algebra 2d

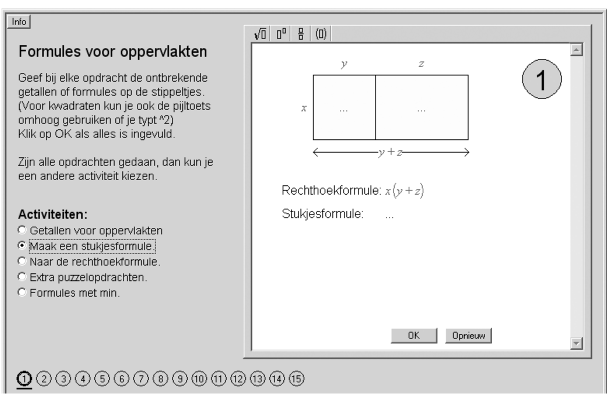


fig. 13 Oppervlakte algebra

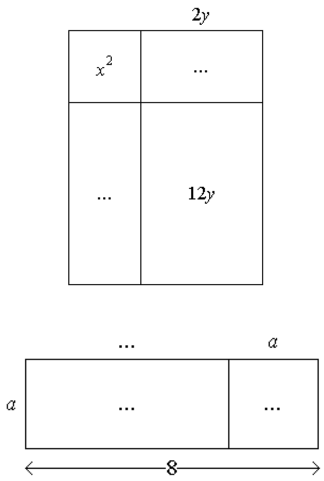


fig. 14 Werken met formules met mintekens

Haakjessommen

In de hierboven besproken applets zijn de activiteiten verweven met de oppervlaktecontexten. In de verschillende varianten van het applet *Haakjessommen* worden de formules en de gevraagde manipulaties in eerste instantie zonder context gepresenteerd. De bedoelde activiteiten zijn daarmee sterk vergelijkbaar met de formele herleid- en ontbindopdrachten uit het boek. Een verschil is dat de oppervlaktecontext toch nog als denkmodel kan worden teruggeroepen en ingevuld (zie figuur 15).

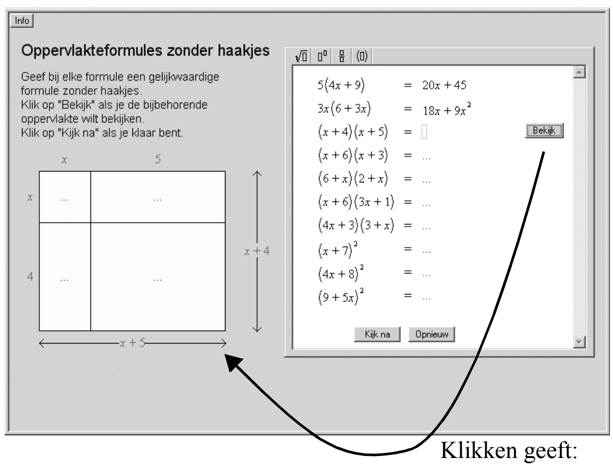


fig. 15 Haakjessommen oppervlaktemodel

Vermenigvuldigen met tabellen

Het applet *Vermenigvuldigen met tabellen* is vergelijkbaar met *Oppervlaktealgebra*, alleen is het oppervlaktemodel geschematiseerd tot een vermenigvuldigingstabel waardoor ook formules met negatieve getallen en coëfficiënten in beeld kunnen komen. In de activiteiten met dit applet is de functie van de vermenigvuldigingstabel net iets ruimer dan een rekenschema voor het uitwerken van haakjes. Het is ook een model waarin gepuzzeld kan worden. Figuur 16 geeft een beeld van een dergelijke activiteit.

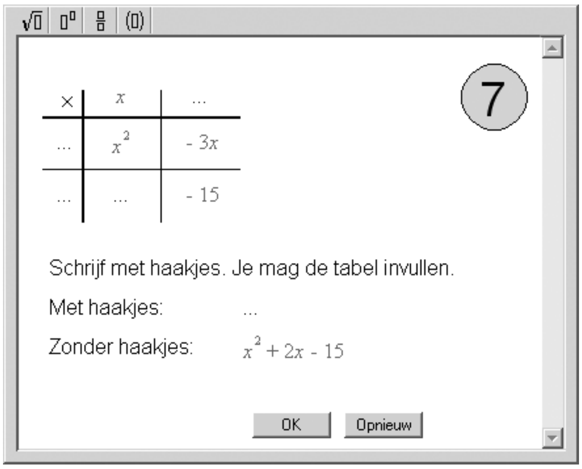


fig. 16 Vermenigvuldigen met tabellen

Tot slot

De hierboven geschetste mogelijkheden van de applets bij het onderwerp letterrekenen laten zien dat er tussen het incidentele gebruik van het oppervlaktemodel als statische illustratie en de formele algebra op abstract niveau, nog een wereld van activiteiten te bedenken is die deze twee zaken overbruggen en aanvullen.
In het WELP-project is een aanzet gegeven tot het exploreren van dit gebied en dat was voor de deelnemers een vaak verrassende zoektocht. Het artikel ‘Van touwpuzzels tot oppervlaktealgebra’ geeft een gedetaileerder beeld van de uitwerking van deze activiteiten tot concreet lesmateriaal en ervaringenen die ermee in de klas zijn opgedaan.

Peter Boon, Freudenthal Instituut, Utrecht

WELP en WisWeb (plus)

De artikelen van Peter Boon en Michiel Doorman beschrijven ideeën, gedachten, ervaringen en applets uit het WELP-project. In dit ICT-implementatieproject hebben twee jaar lang vele partijen geparticipeerd om de kennis, ervaringen en producten (applets en lesmateriaal) uit het WisWeb-project op bredere schaal te implementeren: vier scholen, APS-wiskunde, NVvW, de uitgevers van de wiskundemethoden en Texas Instruments.

Een van de doelstellingen van het WELP-project is een leerlijn ‘algebra met applets’ te ontwikkelen en uit te proberen. Dat is gebeurd voor klassen 2 en 3 in HAVO-VWO. De opbrengsten van het WELP-project omvatten ondere andere een grote verzameling algebra-applets en begeleidend lesmateriaal. Veel van deze applets en materialen zullen via de WisWeb-site beschikbaar worden gesteld. Op het publieke WisWeb komen demo-versies van alle applets, en uitgebreidere versies en oefenvarianten zullen op WisWeb-plus worden geplaatst.

WisWeb-plus is een deel van de WisWeb-site voor abonnees van WisWeb. Een school kan abonnee worden en krijgt zo toegang tot het niet vrij toegankelijke deel van WisWeb. Op WisWeb-plus worden de applets (en begeleidend lesmateriaal) niet alleen in een grote lijst, maar naar leerjaar, onderwerp en thema georganiseerd aangeboden.

Meer informatie over WisWeb, WELP en WisWeb-plus is te vinden op de WisWeb-site: www.wisweb.nl.