Onder de titel 'Wiskunde moet uitdagender en spannender' werd op 16 december 2003 door de Universiteit Groningen een lerarendag georganiseerd. **Frederik van der Blij** gaf de slotlezing, vol met uitdagingen. Vergeet u vooral niet om kladpapier mee te nemen op vakantie!

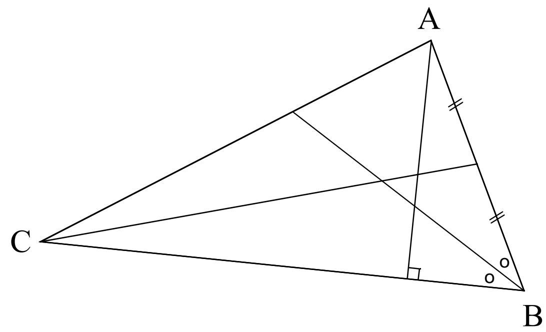
Wiskunde moet uitdagender en spannender

Wie daagt wie uit?

Allereerst moet ik opmerken dat ik met de titel al aangaf dat ik alleen over uitdaging in het onderwijs wil spreken. Ik laat de vraag naar minder saaiheid, meer spanning, aantrekkelijker presentatie enzovoort dus liggen.
Uitdaging wil ik opvatten als een prikkel om zelf aan het werk te gaan. Wanneer de Mont Blanc een uitdaging voor bergbeklimmers is, is dat geen prikkel om naar een film over die beklimming te gaan kijken, maar een prikkel om zelf aan de beklimming te beginnen. Wanneer een vriendinnetje in de klas voor de wiskundetest een negen heeft gehaald, is dat een uitdaging om zelf bij de volgende test een tien te halen.
Ik weet dat u mij nu hartelijk uitlacht, hoe irreëel is het een wiskundetest te vergelijken met seconden winst op de 500 meter schaatsen!

En toch is dat voor mij de betekenis van het woord 'uitdaging'. Maar waardoor wordt de uitdaging een prikkel; door een hoge geldprijs, door publiciteit of eerbetoon? Bij de Olympiades en verschillende competities speelt dit wellicht een rol. Maar ik geloof niet dat een van de Fieldsmedaillewinnaars daarvoor jaren wiskundig onderzoek deed. De uitdaging lag in de wiskunde zelf! En dat maakt het in de onderwijssituatie niet makkelijk.
Laat ik bij mezelf beginnen en u daarbij als wiskundigen betrekken.

Een paar voorbeelden
In de Gorsselse serviceflat leerde ik de heer Kletter, een oud-wiskundedocent en schoolleider, kennen. Hij vertelde mij van een probleem uit zijn jeugd. Om te controleren of de leerlingen de begrippen hoogtelijn, zwaartelijn en bisectrice kenden liet hij een driehoek tekenen met uit het hoekpunt A de hoogtelijn, uit het hoekpunt B de bisectrice en uit het hoekpunt C de zwaartelijn, maar hij wilde de driehoek zó kiezen dat deze drie lijnen door één punt gaan. Daartoe zocht hij een driehoek met geheeltallige zijden. Hij had er geen kunnen vinden.
Wel mooie meetkundige constructiemethoden voor driehoeken, waarbij de drie lijnen door één punt gaan, er zijn er oneindig veel, maar hebben sommige van deze ook geheeltallige zijden? Natuurlijk is de gelijkzijdige driehoek een flauwe oplossing.
Dit was voor mij een uitdaging, enkele dagen werken om een oplossing te vinden, en het lukte om zelfs meer dan één oplossing te vinden. De 'spin off' van dit probleem is nog steeds uitdagend en de stapel kladpapier is al centimeters hoog.



Is dit probleem voor u ook een uitdaging om er de komende vakantie aan te besteden? Ik wil u wel verklappen dat u er geen 'hogere' wiskunde bij nodig hebt en dat ik u de oplossing in een lesuurtje goed kan uitleggen. Wie gaat aan het werk?

Een tweede voorbeeld. In het nummer van april 2003 van *Pythagoras* stond een artikel van D. Oldegaarden en M. Swaen over een fraaie manier om de inhoud van een piramide (zonder infinitesimale beschouwingen) door splitsing in een eindig aantal kleinere lichamen af te leiden uit de inhoud van een blok. Maar een van de beroemde problemen door Hilbert in 1900 geformuleerd, was de vraag of een bepaling van de inhoud van een piramide zonder infinitesimale methoden kon worden gegeven. M. Dehn gaf kort daarna het bewijs dat dit niet mogelijk is. Alweer een uitdaging; hoe is deze paradox op te lossen? In het artikel in *Pythagoras* zit geen fout, in het bewijs van Dehn ook niet! Een paar dagen denken en wat lezen in klassieke meetkundeboeken gaf de oplossing van deze paradox. In een half uurtje kan ik u de hele zaak duidelijk maken.

Maar gaat u zelf aan het werk? Ook u heeft wel het materiaal voorhanden om de oplossing te vinden. Maar de ‘spin off’ kost wat meer tijd.

Een oude liefde kwam weer eens boven. Het aantal oplossingen van de diophantische vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = n$ met gehele x, y en z bij gegeven gehele n, vraagt een heel moeilijke berekening en wordt gegeven door een gecompliceerde formule. Een artikel in de *American Mathematical Journal* van 2003 door G. Shimura besteedt er vele bladzijden aan. Maar het aantal roosterpunten op een bol met middelpunt in de oorsprong en een gehele straal is een eenvoudige formule. Is die dan ook eenvoudig af te leiden? (Het is het geval waarin $n = m^2$.) Het lukt me niet en ik zie er geen enkel licht in, maar toch een uitdaging!
En een iteratieprobleem waarbij je aan het punt (x,y) het punt $(a\ (x+y),\ y/x)$ toevoegt, jaren geleden door H. Lauwerier mij opgegeven, heb ik nog steeds als uitdaging op de rol staan.

Maar er zijn ook kleinere uitdagingen zoals: wanneer vallen Suikerfeest en Sint Nicolaas weer op dezelfde dag? Maar dat daagt me niet genoeg uit. En het krantenbericht dat er een theorie is geconstrueerd waarin het heelal beschreven is als een object in de vorm van een regelmatig twaalfvlak zou een uitdaging kunnen zijn, maar ik weet daarvoor veel te weinig van de recente ontwikkelingen in de theoretische natuurkunde, dus wel een uitdaging, maar ik ga er niets mee doen!

Ik heb u wel heel erg lang met mijn uitdagingen, die naar mijn smaak ook gedeeltelijk voor u als wiskundigen uitdagingen kunnen zijn, beziggehouden. Maar toch ga ik nog even verder in op uitdagingen in het algemeen voor ik aan de leerlingen toekom.
Ik stel nu een paar andere problemen kort aan de orde:

- Welke is de relatie tussen de gnosticus Valentinus uit de tweede eeuw met andere ‘ketterse’ stromingen in die tijd in het Christendom?
- Hoe is de volgorde van ons alfabet totstandgekomen?
- Is het kleurpatroon op de vlindervleugel de laatste eeuwen constant gebleven, en hoe is dat patroon genetisch vastgelegd?
- Hoe waren de relaties voor het eigendomsrecht in Nederlands Indië gezien het lokale adatrecht, het Chinese recht en het Romeinse rechtssysteem?
- Hangt het sociaal gedrag van kinderen af van de huwelijksleeftijd van de ouders?

Ik denk dat niet velen onder u de komende vakanties aan deze problemen gaan besteden. ‘Ik ben wiskundige en dat interesseert me niet’. Of zelfs ‘waarom maak je daar een probleem van?’ Maar misschien zijn er collega’s in de lerarenkamer, die vanuit hun studie in de letterenfaculteit, de rechtenfaculteit, de sociale faculteit of de biologiestudie het zinvolle en misschien zelfs uitdagende problemen vinden.

En bedenkt u nu dat in uw klas maar bij uitzondering een aanstaand wiskundige zit en wel aanstaande studenten in andere disciplines? Wat zal hen als andersdenkenden dan uitdagen?

Het is een uitdaging voor de didactiek om de wiskunde op school boeiend en spannend te maken, maar wellicht slechts voor enkelen uitdagend. Maar toch wil ik proberen er een aanzet voor te geven.
Ik som een aantal suggesties op, sommige voor de onderbouw, andere voor de bovenbouw en weer andere op verschillend niveau te proberen. U had deze ook zelf kunnen bedenken en de uitwerking lijkt me niet moeilijk. De vraag is, en dat zou experimenteel onderzocht kunnen worden, hoe de leerlingen hierop reageren. Welke problemen zien zij als uitdaging en prikkelen hen tot eigen denkwerk? Eventueel ingebouwd als werk dat in schoolkader een beloning (extra puntjes) geeft.

1. Hoe maak je een eerlijke dobbelsteen met zeven kanten?
2. Hoe bepaal je de oppervlakte van een cirkel?
3. Hoe bepaal je de inhoud van een bol?
4. Hoe maak je een conservenblik met een inhoud van één liter en een minimale hoeveelheid blik?
5. Klopt de formule Z + H = R + 2 voor ieder veelvlak?
6. Hoe groot is de som van de hoeken van een (rechthoekige) driehoek?
7. Hoe bepaal je het product van twee getallen van acht cijfers met een eenvoudige rekenmachine?
8. Hoe bereken je de derde zijde van een driehoek als je twee zijden en de ingesloten hoek weet? (Eventueel in te kleden in een landmeetkundige context.)
9. Hoe construeer je een vierkant met dezelfde oppervlakte als een gegeven rechthoek (driehoek)?
10. Hoe ziet de doorsnede van twee cilinders eruit?
11. Hoe bepaal je met de rekenmachine de decimalen van repeterende breuken als $\frac{1}{13}$ en $\frac{1}{17}$?
12. Hoe vind je het middelpunt van een reeds getekende cirkel?
13. Probeer ieder getal als som van zo min mogelijk priemgetallen te schrijven; hoeveel is voldoende?
14. Zelfde vraag als dertien met priemgetallen vervangen door kwadraten.
15. Hoe groot is de kans dat, als je zo maar een driehoek tekent, deze stomphoekig is?
16. Van een breuk zijn teller en noemer kleiner dan 500. Ik reken de deling uit met de rekenmachine in bijvoorbeeld acht decimalen. Kan ik uit deze decimalen de breuk terugvinden?
17. Waarom gebruik je voor het meten van sommige grootheden lineaire en voor andere logaritmische schalen?
18. Hoe is volgend jaar de verhouding van de aantallen witte, rode en roze bloemen in een tuintje als ik nu een aantal witte en rode bloemen in verhouding 1 tot 2 zaai?

Van bovenstaande problemen zijn voor sommige door de leerlingen oplossingen te vinden, soms met zinvolle redeneringen, bij andere problemen zal men een beetje gaan experimenteren en dan tot een vermoeden komen. Dit is dan een goede aanleiding om het belang (de rol) van het bewijs in de wiskunde aan de orde te stellen. Van deze problemen is soms wel de oplossing bekend, maar ligt deze niet binnen het bereik van de leerlingen. Maar ook in de natuurkunde worden zaken besproken en behandeld, die de leerlingen op gezag moeten geloven; niet ieder experiment kan in de klas uitgevoerd worden.
Een ander soort uitdaging kan aangeboden worden in discussievorm; een voorbeeld:

19. Als de gehele getallen *a*, *b* en *c* de drie zijden van een rechthoekige driehoek zijn, is het product *abc* steeds door 60 deelbaar. Bij 3, 4, 5 klopt het, maar klopt het altijd?
    Laat de klas stemmen: wie is voor wie is tegen? Alle kans dat er verdeeldheid ontstaat. Nu is een bewijs nodig om de discussie te beslissen. Hierbij moet wel een probleem gebruikt worden waarover discussie kan ontstaan, de vraag of een gelijkbenige driehoek gelijke basishoeken heeft is niet bruikbaar, dat zie je toch zo!
20. Van iedere driehoek gaan de drie zwaartelijnen door één punt.
    Antwoord: Natuurlijk, er is een zwaartepunt van de driehoek, experimenteel vast te stellen met een kartonnen driehoek, maar is dat een bewijs?
21. Zelfde vraag als in 19, maar nu voor middelloodlijnen.
    Antwoord: Natuurlijk, want er is een omgeschreven cirkel, maar is dat een bewijs?
22. Zelfde vraag voor bissectrices.
    Zelfde vraag voor hoogtelijnen.
    Deze is veel moeilijker, maar is nu ook zo'n aanschouwelijk overtuigende redenering te geven?
23. Uitdagende vraag voor de docent, de stellingen over het door één punt gaan van zwaartelijnen, middelloodlijnen, bissectrices kunnen direct zowel met overtuigende redeneringen als met echte wiskundige bewijzen gegeneraliseerd worden naar de situatie van een viervlak in de ruimte. Die voor de hoogtelijnen niet, want de hoogtelijnen van een viervlak gaan in het algemene geval niet door één punt. In welk speciaal geval wel? Toch is er met de vier hoogtelijnen van een viervlak in het algemene geval ook iets bijzonders aan de hand; wat is die speciale eigenschap?
24. In een weiland begrensd door een rechte sloot liggen twee punten A en B, zoek de kortste weg van A naar B waarbij onderweg de sloot moet worden aangedaan.

Het is een wat willekeurig opgebouwde verzameling mogelijke uitdagingen. Sommige kunnen met wat nadenken wel opgelost worden, andere zullen misschien op internet opgezocht worden, en weer andere zullen wellicht na wat zoekwerk aanleiding geven om bij de docent aan te kloppen. Wel hangt natuurlijk veel af van de manier waarop de docent de vraagstelling poneert en toelicht. En wil het als uitdaging functioneren, dan zal enige tijd moeten verlopen eer de oplossingen besproken worden. De leerlingen moeten enige tijd hebben om aan de uitdaging te werken.

We geven heel bewust in dit verhaal niet veel aanwijzingen, om het ook voor de lezer uitdagend te maken. Indien er belangstelling voor is, zouden we de redactie kunnen vragen nog eens op achtergronden van sommige problemen terug te komen, om de lezers niet met al te veel uitdagingen, aan welke niet voldaan kon worden, te laten zitten.

Meer uitdagend wiskundeonderwijs is een moeilijke zaak waarover ik in de studeerkamer wel makkelijk kan denken, maar de situatie in de klas zal in iedere klas weer een andere aanpak vragen. Dus voorlopig ook maar eerder aandacht geven aan spannend en leuk en duidelijk aanbieden van de gewone schoolstof. Persoonlijke inbreng van de leraar is belangrijker dan het leerboek en zeker belangrijker dan de studeerkameroverpeinzingen van ondergetekende.

Frederik van der Blij, Gorssel