

Het derde artikel gebaseerd op het *Second International Handbook of Mathematics Education*. **Marco Swaen**, bespreekt 'Examining the mathematics in mathematics teacher education' door Thomas Cooney en Heide Wiegel (University of Georgia, USA). Stof tot nadenken voor lerarenopleiders over de positie van het vak wiskunde in hun opleiding en voor de toekomstige collega's van hun studenten.

De wiskunde van de wiskundeleraar

Boven de stof

Op school speelde ik al met de gedachte wiskundeleraar te worden. Ik vroeg mij af wat ik dan, na het examen, eigenlijk nog zou moeten leren – alle schoolstof die ik zou moeten behandelen, had ik dan immers zelf al gehad. De standaard tegenwerping tegen dit denkbeeld was: een leraar moet boven de stof staan. Geen grotere afgang was denkbaar dan dat je als leraar op een onverhoedse vraag uit de klas het antwoord schuldig zou moeten blijven.

Daar denken we tegenwoordig anders over. Als leraar hoef je onverhoedse vragen helemaal niet te beantwoorden, je zoekt het gewoon op voor de volgende les, of nog beter: je zorgt dat de leerling het antwoord op die vraag zelf zoekt.

De toekomstige leraar doorloopt desalniettemin nog steeds een hele studie. Tijdens die opleiding leert de student hoe je met leerlingen, ouders, collega's en je professionele zelf moet omgaan. Maar ook wordt de student nog steeds geacht meer van wiskunde te leren dan alleen de stof die hij/zij later behandelen zal. Waarom eigenlijk nog, zou men zich kunnen afvragen, en welke wiskunde afgezien van de schoolwiskunde is van belang voor de toekomstige leraar.

Het handboekartikel

Dit is de vraag waar Thomas Cooney en Heide Wiegel zich mee bezig houden in hun handboekartikel. Zij doen dat vanuit een specifieke opvatting over de richting die het wiskundeonderwijs volgens hen uit zou moeten gaan. Zogezegd: het wiskundeonderwijs moet van formalistisch naar constructivistisch; de termen komen straks uitgebreid aan de orde.

Onderbouwd met de bevindingen van diverse onderzoekers formuleren zij drie uitgangspunten voor een verantwoord wiskundeprogramma in de lerarenopleiding. Zonder verdere toelichting noem ik die drie uitgangspunten nu alvast:

1. wiskunde als mensenwerk,
2. schoolwiskunde,
3. wiskunde in uitvoering.

Ik zal beginnen de termen formalisme en constructivisme in verband met wiskundeonderwijs nader uit te werken. Daarna geef ik de boodschap van het handboekartikel weer en ik eindig met een beschouwing over de betekenis van het artikel in de Nederlandse situatie.

Van vraag naar vraag

Zodra we proberen te bepalen hoe de wiskunde op de lerarenopleiding eruit zou moeten zien, raken we al gauw van de ene vraag in de andere. De student wordt opgeleid voor het wiskundeonderwijs van de toekomst – hoe zal dat eruit zien, of: hoe zou je willen dat dat eruit ziet? Vragen over wiskundeonderwijs raken onvermijdelijk ook aan de nog fundamentele vraag: wat is wiskunde? Het is bij die vraag dat wij de termen constructivisme en formalisme tegenkomen. De meeste filosofen die zich gebogen hebben over *de aard van de wiskunde* zijn het erover eens dat wiskundigen zich bezig houden met structuren, maar zij zijn het oneens over *waar* die wiskundige structuren zich bevinden. Sommigen kennen structuren een bestaan buiten ons toe, anderen zien structuren vooral als iets dat in ons zit, iets waarmee wij de wereld om ons heen begrijpen. De *platonisten*, in navolging van Plato, staan in dit spectrum helemaal aan de wereld-kant. Getallen, lijnen en cirkels zijn werkelijkheid al bevinden die zich wel in een tijdloze 'ideeënwereld' waar wij met onze gebruikelijke zintuigen geen toegang toe hebben. Edoch door ons verstand, middels onweerlegbare redeneringen, kunnen wij die wiskundige structuren hun geheimen ontfutselen. Aan de andere kant van het spectrum staan de *constructivisten*. Volgens hen bestaan wiskundige structuren alleen voorzover wij ze zelf bedenken. De wiskundige structuren zijn constructies van onze geest. Een van de best uitgewerkte constructivistische opvattingen is die van het intuïtionisme, van L.E.J. Brouwer (1881-1996).

Formalisme als filosofie

Dwars op de discussie over het wezen van de wiskunde lanceerde D. Hilbert (1862-1943) een bijzonder denkbeeld. Hij stelde dat we kunnen doen of wiskunde helemaal niet over wiskundige structuren gaat, maar gewoon een betekenisloos, formeel spel is, waarvoor wij de regels

als het ware willekeurig mogen kiezen. Het enige waar we wel voor moeten zorgen is dat het spel geen tegenspraken oplevert. Dit denkbeeld staat bekend als het *formalisme*. Hilberts opzet bleek niet haalbaar, met het weggooien van de betekenis bleef er namelijk niets meer over dat garandeerde dat er inderdaad geen tegenspraken konden optreden. Voor het formalisme als filosofie van de wiskunde viel daarmee in de jaren dertig het doek. Als ‘stijl van de wiskunde’ echter is het formalisme alleen maar sterker geworden.

Formalisme als gezicht van de wiskunde

Wie namelijk een wiskundig vaktijdschrift openslaat, ziet dat de wiskunde tegenwoordig een onmiskenbaar formalistisch gezicht heeft. Waar artikelen ook over gaan, steeds tref je er hetzelfde formele stramien in aan van definities, lemma's en proposities met hetzelfde verzamelingsjargon en de neiging alles van begin af aan in zo algemeen mogelijke termen te formuleren. In de artikelen gaat het vrijwel nooit over de betekenis van de gehanteerde begrippen, laat staan over de intuïties die de schrijver tot de gemelde vondsten leidde.

Waarom is het gezicht van de wiskunde zo formeel?

De belangrijkste reden is gelegen in het wezen van de wiskunde zelf. Wiskundige structuren (waar ze zich ook bevinden) kunnen niet als natuurverschijnselen geobserveerd worden. Het enige dat we erover weten is wat we er met onfeilbaar redeneren over kunnen bedenken. Zekerheid berust uitsluitend op de betrouwbaarheid van onze gedachten en redeneringen, die daarom zo scherp mogelijk geformuleerd moeten worden, ontdaan van dubbelzinnigheid, misleidende associaties en bijbetekenissen. Consequent formalisme is daar de beste garantie voor.

De formalistische stijl werd langzamerhand ook de toon waarop wiskunde aan de universiteiten gedoceerd werd. In colleges en dictaten wordt vaak eerst de theorie in zo algemeen mogelijke vorm behandeld. Mocht er dan nog tijd over zijn, dan kan bij wijze van voorbeeld of toepassing nog wat worden opgemerkt over de specifiekere contexten waarvandaan deze theorieën ontstonden.

Formalistisch wiskunde-onderwijs

In de jaren zestig drong de formalistische stijl als Moderne Wiskunde (NewMath) ook het middelbaar onderwijs binnen, in sommige landen ook het basisonderwijs, soms tot aan het kleuteronderwijs toe.

De geest van de Moderne Wiskunde is nergens treffender weergegeven dan op de kaft van het Belgische *Moderne Wiskunde deel 1* van Papy. We zien een jongen en een meisje die de moeizame weg van het abstraheren overgeslagen schijnen te hebben, en regelrecht op de wiskundige structuren zijn afgelopen. Plato zou jaloers zijn op deze kinderen; kon hij de tijdloze ideeënwereld alleen waarnemen in zijn geest, zij lopen er gewoon rond en onderzoeken de structuren er met hun ogen en handen.



Wiskunde in het aldus verbeelde onderwijs treedt op als absolute waarheid, waaraan je deelachtig wordt door directe overgave. De gedaante van deze waarheid is formalisme; door de onderliggende betekenissen weg te laten hoopt men direct tot de abstracte structuren te geraken.

Wiskunde in uitvoering

Wat het formalistisch onderwijs over het hoofd ziet, is dat formalisme in de echte wiskunde een stijl van communiceren is en een middel om de eigen redeneringen te controleren, maar niet de werkelijke inhoud. Met die echte wiskunde bedoel ik de *wiskunde in uitvoering*, de wiskunde in het hoofd van de wiskundige onderzoeker. Die wiskunde is vaag, hypothetisch, steeds onaf. De onderzoeker wordt geleid door ongefundeerde intuïties, door associaties en analogieën. Verbanden worden pas later duidelijk. Voor de onderzoeker heeft alles waar hij/zij over denkt betekenis en is werkelijkheid. Abstractie ontstaat waar vele betekenissen uitwisselbaar en diepere structuren zichtbaar worden.

Het formalistische gezicht staat haaks op de dagelijkse praktijk van wiskundig onderzoek, waarin begrip niet dan met vallen en opstaan veroverd wordt, waarin geen absolute waarheid bestaat, maar slechts zekerheid over wat je zelf bedenkt en construeert, en mogelijk vertrouwen in wat anderen je vertellen.

Wiskunde is mensenwerk

In de hoogtijdagen van de Moderne Wiskunde, terwijl leerlingen de wiskunde als onfeilbare waarheid gepresenteerd krijgen, groeit ook een tegenstroom die juist uitgaat van het feilbare karakter van de wiskunde in uitvoering. Met zijn succesvolle boek *Proofs and Refutations* (1976), maakte Lakatos een breed publiek attent op het dynamische karakter van *wiskunde in uitvoering*.

Het boek leest als het verslag van een avontuurlijke zoektocht die een groep leerlingen beleeft rond de formule van Euler. Al doende passeren alle ingrediënten van echt wiskundig onderzoek, zoals geschikte definities kiezen, de goede voorbeelden vinden, vermoedens formuleren en bijstellen, tegenvoorbeelden bedenken, bewijzen zoeken, en steeds verder generaliseren.

De dogmatische waarheid van de formalistische wiskunde blijft niet onbekritiseerd in een tijd dat elk dogma onder vuur genomen wordt. Waarom zouden immers een paar enkelingen (ongetwijfeld elitaire, westerse, blanke mannen) mogen bepalen wat wel en wat geen wiskunde is? Ook buiten de westerse academische wereld bestaat wiskunde, zoals in de geometrische patronen van natuurvolkeren, in rekensystemen uit andere tijdperken en cultuurfases, in het dagelijkse praktijk van allerlei beroepsgroepen, in het traditionele vrouwenwerk, of in de denkwereld van een leerling. Wiskunde is overal: op straat, op het werk, in de kunst. Aldus ontstaat een alternatief pluriform beeld van de wiskunde: *wiskunde als mensenwerk*.

Constructivistisch wiskunde-onderwijs

Bij het beeld van wiskunde als mensenwerk past ook een ander wiskundeonderwijs, met uitgangspunten diametraal tegengesteld aan de formalistische.

1. De wiskunde wordt niet als tijdloos en absoluut gepresenteerd, maar als veranderlijk en veelvormig in historische, maatschappelijke en culturele dimensie.
2. Wiskundige begrippen maakt de leerling zich eigen door ze zelf te construeren. Dat kan de leerling alleen op grond van (voor de leerling) betekenisvolle contexten.
3. Bij wiskunde gaat het niet alleen om kennis, maar ook om een kritische houding en vaardigheid in het oplossen van problemen.
4. Iets is niet waar omdat de leraar het zegt, of het boek, maar omdat je er zelf van overtuigd bent.
5. Samenwerking tussen leerlingen bevordert het leerproces.

Terminologie

Ik heb ervoor gekozen dit type wiskundeonderwijs aan te duiden met de term *constructivisme*. Ik doe dat in navolging van anderen, die daarmee verwijzen naar de constructivistische school in de leerpsychologie en niet zozeer naar het constructivisme van wiskundigen als Brouwer. De twee soorten constructivisme, in de didactiek enerzijds en in de filosofie van de wiskunde anderzijds, hebben met elkaar gemeen dat bij beide het beeld van de wiskunde gebaseerd wordt op de *wiskunde in uitvoering*.

De schrijvers van het handboek-artikel hebben het over 'vernieuwend wiskundeonderwijs' en gebruiken afwisselend termen als 'process-oriented', 'pluriform', 'experimental' en 'reform-based'.

Opleiden van formalistisch naar constructief

Vakdidactici en onderwijskundigen huldigen vaak de

constructivistische opvatting van het wiskundeonderwijs. Wie zich namelijk verdiept in leerprocessen, zal daar wiskunde zien in een, net als in het wiskundig onderzoek, feilbare gedaante. In veel landen is het wiskundeonderwijs nog steeds op formalistische leest geschoeid. Op de lerarenopleiding melden zich dan studenten aan die waarschijnlijk door dat formalistische wiskundeonderwijs aangesproken werden. Zij krijgen dan te maken met vakdidactici die willen opleiden voor hun wiskundeonderwijs van de toekomst, dus voor het constructivistische. Hoe moeten die opleiders de studie inrichten om te bereiken dat hun studenten zich losmaken van het formalisme uit hun schoolverleden en zich ontwikkelen tot constructivistische leraren? Dat is de centrale vraag in het handboekartikel, waarbij het in de eerste plaats gaat om het vakspecifieke gedeelte van de opleiding, dat wil zeggen de wiskundecursussen en de vakdidactiek.

Drie principes

De schrijvers formuleren drie uitgangspunten, waar het wiskundeonderwijs op de opleiding aan zou moeten voldoen. Die drie uitgangspunten zijn:

1. De student moet de wiskunde leren kennen als mensenwerk, dus niet als absoluut, maar als veranderlijk in historisch, maatschappelijk en cultureel perspectief.
2. De student moet zich bezighouden met de schoolwiskunde, en die op een fundamentele manier gaan begrijpen.
3. De student moet zelf de procesmatige kant van wiskunde in uitvoering ervaren.

Deze uitgangspunten onderbouwen de schrijvers puttend uit de resultaten van recente wetenschappelijke onderzoeken naar zogenaamde *teacher's beliefs*, oftewel naar de gedachtenwereld van de leraar.

In de meeste studies die de schrijvers aanhalen, werd een beperkt aantal studenten of leraren gedurende een langere periode gevolgd en met geregelde tussenpozen gevraagd naar hun denkbeelden. Zulke onderzoeken leveren geen of nauwelijks kwantitatieve informatie. Wel kan zo'n studie een beeld geven van de mogelijke ontwikkelingsgang van leraren in opleiding. De studie kan duidelijk maken dat een bepaalde aanpak niet altijd werkt en waar die aanpak dan faalt.

Academische wiskunde

Traditioneel was de opleiding in de eerste plaats bedoeld om de toekomstige leraar een stevige portie hogere wiskunde bij te brengen. Vanzelfsprekend is alleen maar meer academische wiskunde niet genoeg om de student op het spoor van vernieuwend wiskundeonderwijs te brengen. Een dergelijke nadruk op academische wiskunde zal de student hoogstens bevestigen in zijn/haar idee dat het in wiskundeonderwijs in de eerste plaats gaat om wat de leraar weet.

Voorts leidt meer kennis van de academische wiskunde

niet automatisch tot een beter begrip van de schoolwiskunde, maar legt daar hoogstens een fundament voor. Blijft het verband met de schoolwiskunde buiten beschouwing, dan is de student, eenmaal voor de klas, voor zijn begrip van de stof weer aangewezen op wat hij zich herinnert van zijn eigen schooltijd. En zal hij de stof doceren op de (formalistische) manier zoals hem die ooit onderwezen werd.

Beeld van de wiskunde

Wat de diverse studies vooral laten zien is dat de student sterk beïnvloed wordt door het beeld dat hij/zij heeft van de wiskunde. Blijft dat beeld formalistisch, dan zal de student later hoogstwaarschijnlijk ook weer onderwijs gaan geven in de formalistische trant.

Zo volgde Frykholm studenten tijdens en na hun studie, en zag hoe zeer zij hingen aan de formalistische wiskunde uit hun eigen schooltijd en studie. Ook al betoonden zij zich in discussies over onderwijs soms fervente voorstanders van vernieuwing, in hun latere praktijk probeerden zij die vernieuwingen toch niet uit.

Zou dat er aan kunnen liggen dat deze studenten alleen het formalistische onderwijs uit hun eigen schooltijd kennen en geen voorbeelden van vernieuwend wiskundeonderwijs? Nee, tenminste, niet volgens Grant, Hiebert en Wearne. Zij lieten studenten demonstratielessen bekijken van ervaren (constructivistische) leraren, en vroegen hen naar hun oordeel daarover. Het bleek dat de studenten vooral zagen wat strookte met hun eigen beeld van de wiskunde. De vernieuwingsgezinde studenten waren positief, zij waardeerden bijvoorbeeld hoe de leerlingen actief met wiskunde bezig waren. De studenten behept met een formalistisch wiskundebeeld echter waren negatief, zij vonden dezelfde lessen verwarrend en schadelijk voor het begrip van de leerlingen.

Het beeld van de wiskunde speelde ook een groep PABO-studenten parten, die gevolgd werden door Gellert. De studenten hadden in hun studie geen uitgesproken moeite met de wiskunde, (anders hadden zij geen wiskunde gekozen) maar hadden wel slechte herinneringen aan de (formalistische) wiskunde uit hun eigen schooltijd. Om hun leerlingen diezelfde negatieve ervaringen te besparen vereenvoedigen zij de wiskundige inhoud, met name als het ging om abstractie.

Beheersing van de schoolwiskunde

Onzekerheid over de stof kan ook een reden zijn dat leraren zich vasthouden aan een formalistische stijl. Hun eigen wankel begrip staat hen niet toe mee te gaan op de zijpaden die leerlingen kiezen zodra die zelf aan het denken slaan.

In de opleiding moet de schoolwiskunde daarom expliciet aan de orde komen. Een van de schrijvers haalt hier zijn eigen ervaring aan van toen hij op de opleiding een cursus startte waarin de schoolwiskunde centraal stond. Met de cursus bereikte hij in eerste instantie echter niet wat hij wilde: studenten waardeerden de cursus als een

handig overzicht van de stof, in plaats van dat zij de fundamentele begrippen van de schoolwiskunde beter gingen doordenken. Zo bevestigde de cursus de studenten in hun idee dat de leraar voornamelijk een kennisbron is.

Ervaring met wiskunde in uitvoering

Als derde principe noemen de schrijvers dat de studenten zelf moeten ervaren wat het betekent zelf wiskunde te ontwikkelen. Zij geven zelf een inspirerend voorbeeld van een project op het grensgebied van wiskunde en mechanica, dat zij hun studenten hebben laten doen. Hieronder staat de centrale vraag van het onderzoek, de lezer moet er maar eens de tanden in vastbijten.

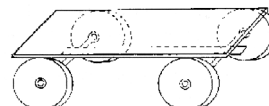


Figure 1. Cart with cardboard resting on wheels.

As the cart shown in Figure 1 moves forward, the strip of cardboard on top of the wheels also moves forward. What is the relationship between the distance d_c the cart moves and the distance d_s that the strip of cardboard moves? State the relationship and provide a rationale that justifies the relationship beyond the existence of empirical evidence.

Het beeld veranderen

Het is vooralsnog niet duidelijk welke factoren ervoor zorgen dat een student zijn beeld van de wiskunde bijstelt. Uiteraard zijn er een heleboel noodzakelijke voorwaarden te noemen, de student moet een pluriform beeld geboden worden van de wiskunde, moet kennis nemen van constructivistische inzichten, een fundamenteel begrip krijgen van de schoolwiskunde, zelf ervaring opdoen met vernieuwende didactiek, zelf de dynamiek van wiskunde in uitvoering beleven. Maar wat zorgt er uiteindelijk voor dat de toekomstige leraar zijn/haar beeld van wiskunde en wiskundeonderwijs van formalistisch naar constructivistisch verandert. Vaak wordt hier gehoopt op de heilzame werking van reflectie, mijns inziens ten onrechte. Iemand die meer gaat reflecteren krijgt hoogstens meer greep op zijn eigen handelen, maar gaat daarmee op zich niet anders nadenken over de doelen van dat handelen.

De situatie in Nederland

Nu wil ik de inhoud van het handboekartikel plaatsen tegen de achtergrond van de Nederlandse verhoudingen. Sowieso is onze uitgangssituatie anders. De studenten die zich bij de Nederlandse lerarenopleidingen aanmelden hebben doorgaans geen formalistisch wiskundeonderwijs gehad. De verzamelingensoep werd in ons land namelijk niet zo warm opgediend, en al vrij snel gevolgd door diverse gerechtjes uit de constructivistische keuken.

Hoe goed het Nederlandse wiskundeonderwijs thans ook heet te zijn, het maakt in elk geval bijzonder weinig leerlingen enthousiast voor een wiskundestudie. Van de weinigen die wel een universitaire wiskundestudie doen, zetten er werderom slechts weinigen de stap naar het leraar-

schap. Zodoende komen de nieuwe wiskundeleraars in grote meerderheid van de HBO-opleidingen, tweede-graads en eerste-graads. Dit zijn vooral mensen die kiezen voor het beroep van leraar omdat zij met leerlingen willen werken, en niet omdat zij overlopen van uit te dragen wiskundekennis. Wij hebben op lerarenopleidingen dus weinig last van studenten die lijden aan een formalistisch wiskundebeeld. Wij kampen met andere problemen.

In een proces van opeenvolgende herstructureringen is de tijd dat de HBO-studenten zich met wiskunde bezig kunnen houden almaar verminderd, of het nu gaat om wiskunde als mensenwerk, schoolwiskunde of wiskunde in uitvoering. Vakspecifieke tijd is immers duur, en wordt vaak principieel onwenselijk geacht vanuit modieuze onderwijskundige inzichten.

Ook omdat binnen het Voortgezet Onderwijs weinig gelegenheid is zich vakinhoudelijk verder te ontwikkelen, zullen deze nieuwe leraren wat de inhoud van hun lessen betreft overgeleverd zijn aan de lesmethode. Alles wat zij hun leerlingen zullen bieden buiten de voorgekookte sommen van het boek, zal moeten komen uit vrije tijd die zij bereid zijn op te offeren, want vanuit de opleiding hebben zij het niet meegekregen.

Inhoud en vernieuwing

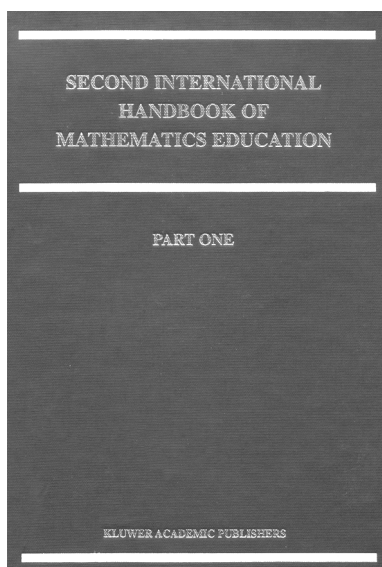
Constructivistisch wiskundeonderwijs gaat uit van het leerproces. Leerprocessen kunnen vooruitgeholpen wor-

den door de leerling zelf, door medeleerlingen, door leerboeken, door interactieve programmatuur, enzovoorts, maar vooral nog vooral ook door leraren. Tenminste als die leraren in staat zijn die processen gedetailleerd te volgen en bij te sturen. Leerlingen aan een onderzoeksoopdracht zetten bijvoorbeeld, is altijd leuk, maar de leerlingen komen er pas wezenlijk verder mee, als zij iemand hebben die ook inhoudelijk op de opdracht ingaat. Die persoon moet hun ideeën kunnen volgen, becommentariëren en kunnen aangeven waar zij goed bezig waren, en wat zij volgende keer kunnen verbeteren. Dit geldt in feite voor vrijwel elke complexere leeractiviteit, of het nu gaat om een PO, een zebrablock of het doorwerken van een hoofdstuk uit het boek.

Vernieuwing van het wiskundeonderwijs in constructieve zin behoeft dus leraren met een goede kijk op leerprocessen, wiskundige inhoud maakt daar integraal deel van uit. De specifieke aandacht voor wiskunde (op alle drie de manieren) in de lerarenopleiding wordt op dit moment zover teruggeschroefd dat de toekomstige leraren niet voldoende toegerust kunnen worden om vernieuwingen van het wiskundeonderwijs in constructivistische zin tot stand te brengen. Tot in lengte van dagen zal dat de ontwikkelingsmogelijkheden van het Nederlands wiskundeonderwijs ernstig beperken.

*Marco Swaen, EFA, Amsterdam
Calandlyceum, Amsterdam*

Second International Handbook of Mathematics Education



Editors: Alan Bishop, Ken Clements, Christine Keitel, Jeremy Kilpatrick, Frederick Leung.

ISBN: 1-4020-1008-7

Uitgever: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

Prijs: € 400,-

 **kluwer**
the language of science

De redactie van de *Nieuwe Wiskrant* wil graag Irene van der Reydt, René de Boo en Marie Sheldon (Kluwer), Alan Bishop en Christine Keitel (Handbook redactieteam) bedanken voor hun inspanningen bij het tot stand brengen van deze serie.