Gaan boekbesprekingen tot het verleden behoren? In deze *Nieuwe Wiskrant* treft u er geen aan. Wel een bespreking van het software pakket ORSTAT2000-VWO. En volgens de recensist **Henk Pfaltzgraff** leest het als een spannend boek...

Het pakket ORSTAT2000-VWO

Herwonnen verwondering

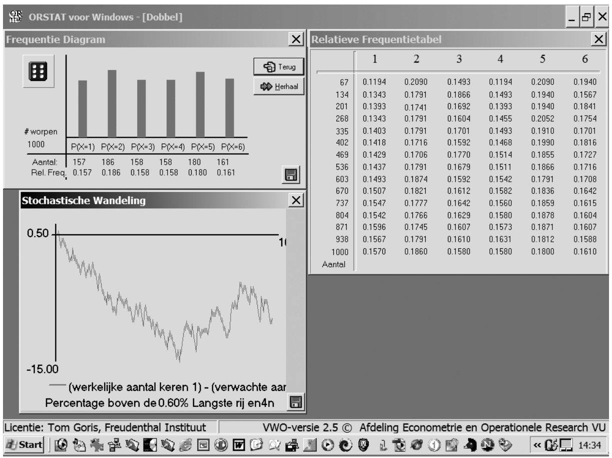
Het softwareteam van de Vrije Universiteit heeft, alweer een paar jaar geleden, een uitbreiding op de serie VU-Grafiek, VU-Stat, VU-Dif en ORSTAT geproduceerd. Het gaat hier om ORSTAT2000-VWO: wat mij betreft een aanrader. Iedere schoolmediatheek zou er een moeten hebben. De prijs (€ 175 all-in) mag geen belemmering zijn, want de school krijgt het recht om kopieën aan de leerlingen te verschaffen voor thuisgebruik. Het pakket is bruikbaar bij alle profielen (E&M, N&G en N&T) die aansluiten op een studie econometrie en wellicht ook bedrijfswiskunde.

Pas onlangs kreeg ik het programma onder ogen en reeds bij de eerste blik beviel het. Natuurlijk zijn er onderdelen die wat minder geschikt lijken voor de huidige middelbare scholier. Daarover straks, maar overheersend is het gevoel dat de verwondering weer een beetje terug is.

Het is 1955, de laatste les voor de kerstvakantie in de derde klas van de HBS. Aan vijftig minuten (zolang duurden die lessen indertijd, vijf keer vijftig minuten wiskunde plus nog een paar uur huiswerk per week) heeft de leraar genoeg om ons het wonder van de complexe getallen te openbaren. Ik herinner me dat ik een goed deel van die kerstvakantie bezig geweest ben om de acht oplossingen van de vergelijking $x^8 = 16$ te vinden en het bewijs van de productregel voor complexe getallen te geven. Dat lukte betrekkelijk gemakkelijk. Het wegwerken van haakjes, het optellen van ongelijknamige breuken en het toepassen van goniometrische formules, zoals die voor $\tan(\alpha + \beta)$, waren immers dagelijks werk voor ons. In mijn studententijd kwam die verwondering, dat ontzag, met enige regelmaat terug. George Gamow (*One Two Three ... Infinity*) met zijn populaire beschouwingen over oneindigheid, limieten en relativiteit herinner ik me uit de jaren zestig. Later zijn die gevoelens van nieuwsgierigheid, onderzoekingsdrang, verbazing, schoonheid en romantiek wat op de achtergrond geraakt. Een opleving was er in de jaren zeventig toen Nederlandse schaakprogrammeurs uitstekende resultaten behaalden met een inzichtelijk getinte probleemaanpak. (Toen kwamen de Amerikanen met hun *Brute Force* oplossingen en was het sprookje voorbij).

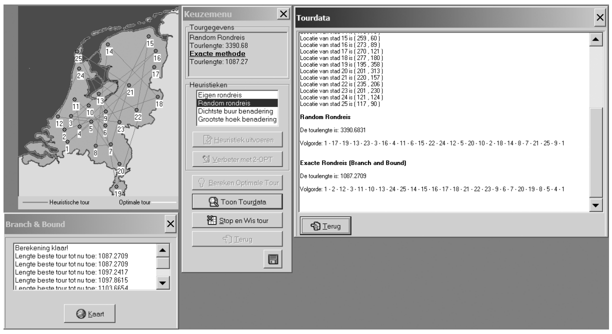
Sinds kort echter hebben we weinig te klagen. Er zijn sterk motiverende boeken verschenen van John Allen Poulos, Martin Gardner en Simon Singh (*Het laatste raadsel van Fermat*). Het Nederlandse wiskundeonderwijs ontwikkelde na het tijdschrift *Pythagoras* de Zebrareeks en de Epsilon-uitgaven. Maar een enorm probleem is het tekort aan technische vaardigheden en feitelijke voorkennis van de studiehuisgeneratie (die daarvóór geslachtofferd werd in de basisvorming). Ik heb steeds een beetje het gevoel dat onze opdracht is een pianist op te leiden zonder toonladders, drieklanken en notenbalken. Gaat de studiehuisgeneratie zodoende geleidelijk over in een generatie van autodidacten? Zeker weten doe ik het niet, maar het lijkt me rijkelijk laat om op je zeventiende nog te moeten beginnen met elementaire algebra. Toch blijven we het proberen. Elke poging om aan onze leerlingen dat gevoel van verwondering over te brengen, verdient onze waardering.

Het pakket ORSTAT2000-VWO bevat de modules *Dobbel*, *Roulette*, *Monte Carlo*, *Tabellen en Grafieken*, *Normale Verdeling*, *Wachtrijen*, *Lineaire Programmering*, *Kortste-Pad* en *Handelsreizigersprobleem*. De grafieken en de helpteksten kunnen gekopieerd en geplakt worden, maar pas op voor sommige al-te-vrolijk gekleurde plaatjes die milliliters toner verspillen. De toegankelijkheid en het gebruikersgemak staan voorop. Als je een van de (in het algemeen uitstekende!) helpteksten wilt raadplegen, klik je in één keer direct naar het betreffende onderwerp. Over die helpteksten is goed nagedacht. Wie wel wat (kleuren)inkt kan missen, bundelt zonder veel moeite al deze teksten tot een prettig leesbaar boek met tien hoofdstukken (tweezijdig afdrukken). Prettig leesbaar ook voor de leerlingen (dat is in het algemeen gesproken: het onderwerp Lineaire Programmering nodigt niet uit tot knus in een hoekje zitten lezen, lijkt me).

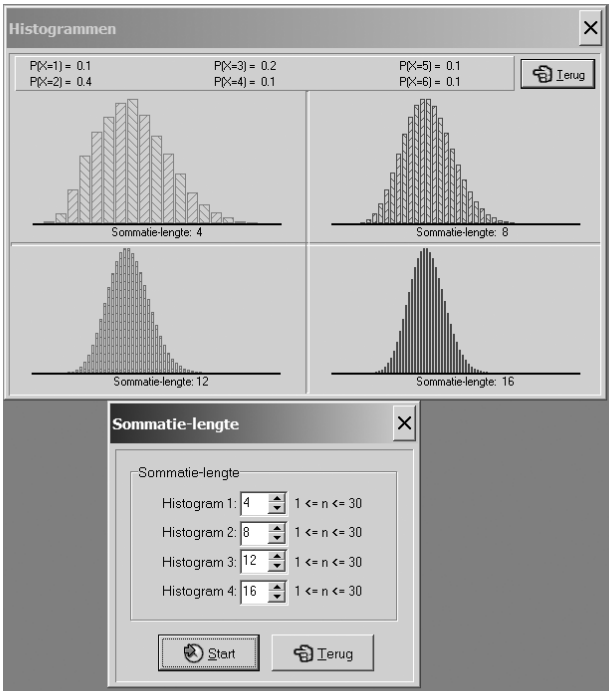


Dobbel geeft de leerling de kans met een (onzuivere) dobbelsteen of munt tienduizenden keren te werpen. De schrijvers merken terecht op dat het uitvoeren van grote aantallen simulaties leidt tot een beter gevoel voor stochastische fluctuaties dan welke theoretische beschouwing dan ook. Die grillige fluctuaties worden wel heel erg geprononceerd bij de stochastische wandeling die gemaakt kan worden (met p = 0.5). Hierbij wordt het verschil tussen de verwachte fractie en de waargenomen fractie tijdens het simulatieproces voortdurend in beeld gebracht. Het relatieve verschil gaat naar nul. Zo komt en passant de Wet van de Grote Aantallen ter sprake. Het absolute verschil echter wordt geleidelijk steeds groter. Dat is direct al de eerste verrassing. De gokker die eenmaal aan de verliezende hand is, mag niet verwachten snel zijn verliezen goed te maken. De stochastische wandeling verloopt immers over het algemeen bijna voortdurend aan één kant van de nul-as. Onderaan het eerste grafiekje verschijnt de langste serie enen die voorkwam. Daar is ter controle wat aan uit te rekenen. Jammer is dat het grafiekje van de stochastische wandeling niet helemaal in zijn jasje past. Wat ik heftig gemist heb zijn de experimenten met twee of meer dobbelstenen en munten.

Tabellen en Grafieken is de zwakste module. Maar gelukkig zijn al de getoonde verdelingen – op de hypergeometrische na – op de Grafische Rekenmachine TI-83 terug te vinden onder de knop [DISTR]. Bovendien is de invoer af en toe knap verwarrend (waar de letters x en z door elkaar gebruikt worden bij de Normale Verdeling en waar de invoertabel soms hinderlijk uit twee kolommen bestaat). De helpteksten, gelardeerd met opgaven en voorbeelden, hebben de gebruikelijke kwaliteit. Het spel *Lucky 10* wordt behandeld, helaas zonder dat daarmee geëxperimenteerd kan worden.

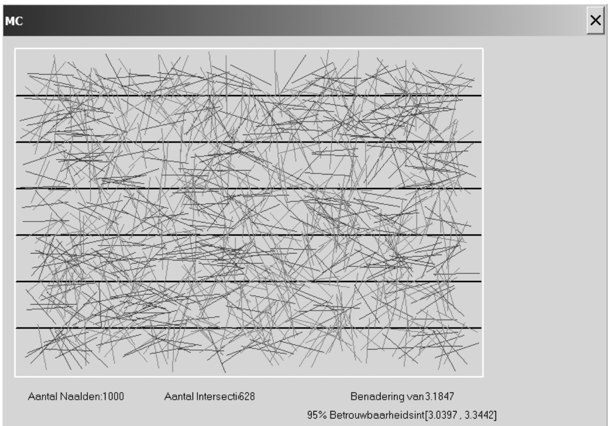


Het *Handelsreizigersprobleem* is een inspirerend spel. Ik koos zelf 35 steden op de kaart van Nederland en maakte een eigen (zo kort mogelijke) rondreis van 1810 km. Met enige trots zag ik dat ik het beter deed dan de *Dichtste Buur* methode (2151 km) en zelfs ook nog iets beter dan de *Grootste Hoek* methode (1848 km). Maar de *Branch & Bound* zoekmethode versloeg me ruimschoots, weliswaar pas na enkele minuten. De toelichtende tekst bevat geen algebra, waardoor dit programmadeel uitermate geschikt is voor moderne leerlingen. De module *Kortste Pad* is een variant op het vorige onderwerp. In een puntenrooster van bijvoorbeeld 10 bij 10 met onderlinge randomafstanden moet je proberen de kortste route te vinden. Ook hier was ik sneller dan de *Bijziende methode* en de *Bijna Bijziende methode*, maar dat kostte wel veel denkwerk omdat ik meer dan één zet vooruit probeerde te denken. Maar uiteraard werd ik verslagen door de methode die het beste (optimale) pad beschreef.



Ook op de presentatie van *de Normale Verdeling* is weinig aan te merken. Er staan prachtige plaatjes in dit demonstratieve en leerzame onderdeel. De Centrale Limietstelling is een fundamentele verworvenheid van de statistiek en dat wordt de leerling goed duidelijk gemaakt. Je moet even experimenteren met de variabelen, maar algauw kreeg ik met een onzuivere dobbelsteen (p_1=0.1, p_2=0.4, p_3=0.2, p_4=p_5=p_6=0.1) en een toenemend aantal onafhankelijke variabelen in de vier histogrammen een mooi verloop van scheef/hoekig naar symmetrisch/vloeiend: de kromme van Gauss dus. In deze module komen nog de Wortel-n wet en de Betrouwbaarheidsintervallen aan de beurt. De leerlingen zullen weinig moeite hebben met de demoplaatjes. De formulerijke tekst over de betrouwbaarheidsintervallen zullen ze overslaan, voorspel ik.

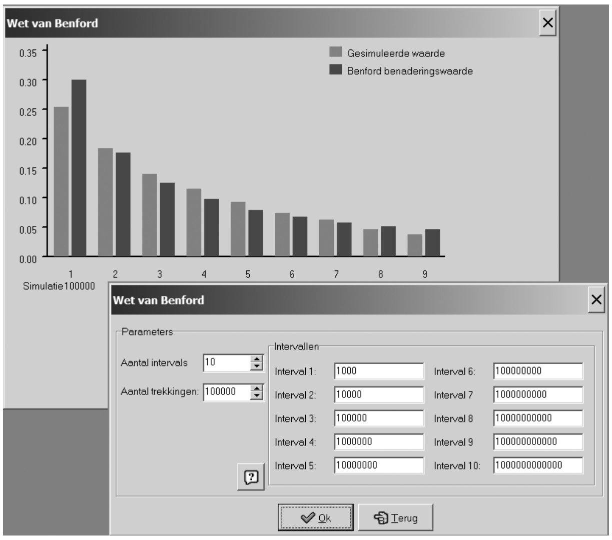
En dan het onderdeel *Monte Carlo Simulatie*. Dit onderdeel komt goed van pas bij het nieuwe vak kansrekening dat voor alle leerlingen in de vierde klas VWO verplicht is. Simulatie leidt tot een beter inzicht in kansrekening en werkt verhelderend voor de leerling, doordat deze concreet geconfronteerd wordt met de kanswetten. *Monte-Carlo* behelst elf submodules die ik niet allemaal bespreek. Het overbekende *verjaardagsprobleem* wordt uiteraard experimenteel (via simulatie) onderzocht. De experimentele fractie wordt in de grafiek vergeleken met de theoretische succeskans. Een prima submodule. Daar is weinig aan toe te voegen. Wij, leraren, zijn de verbazing voorbij sinds dit probleem in alle leerboeken vermeld staat, maar ORSTAT2000 slaagt niettemin de belangstelling bij leerlingen levendig te houden.



De simulaties ter *berekening van π* (eigenlijk zijn het *metingen* van π) zijn natuurkundige experimenten.
(1) Gooi in het wilde weg (random dus, niet mikken) met virtuele pijltjes op de eenheidscirkel die een omgeschreven vierkant heeft. Het aantal treffers zal evenredig zijn met de verhouding van de twee oppervlakten. Een prachtig gezicht is het om het toevalspatroon van de zich uitbreidende stippen te volgen. Helaas staat het aantal treffers niet genoteerd, dat zou de leerling een controleberekening hebben opgeleverd. Bij de volgende module *Buffon* is dat wel gebeurd. Een leermoment is het te ontdekken dat pas na vele tienduizenden pijltjes de benadering van π op twee decimalen correct is.

(2) Wat minder wild en flink wat trager is de meting van π met de vallende naalden van *Buffon*. Je moet heel wat geduld hebben, maar het is een schitterend gezicht, al die honderden dansende naalden. Het duurde op mijn PC anderhalve minuut voor de duizend naalden gevallen waren. En het resultaat was niet indrukwekkend (3.12 voor π). Terwijl je zo zit te kijken komt de verwondering weer boven. Hoe is het mogelijk dat op een patroon van rechte stroken, waar geen cirkel op te zien is, toch een meting van het cirkelgetal π uit de bus komt!? Het antwoord op die vraag wordt in de voortreffelijke helptekst gegeven.

De *Wet van Benford* is weer een voorbeeld van een buitengewoon verrassend en intrigerend contra-intuïtief verschijnsel. Voor wie deze wet niet kent: de kans dat het eerste niet-nul cijfer van een willekeurig getal uit een door toeval ontstane getallenverzameling gelijk is aan het cijfer d wordt bij goede benadering gegeven door ${}^{10}\log(1+1/d)$ voor d = 1, 2, ..., 9; dat geloof je toch echt niet!



Neem alle getallen op de voorpagina's van de laatste honderd kranten, de atoommassa's van de elementen, alle wateroppervlakten van rivieren, de honkbalstatistieken. Het maakt niet uit: het cijfer 1 is bij ongeveer 30% van de getallen het eerste cijfer (en niet bij 100/9 ≈ 11% van de getallen, wat je zou verwachten). Is dat niet verbazingwekkend? De simulatie van de duizenden nodige toevalsgetallen is nogal ingewikkeld, het duurde even voor ik het had begrepen. Uitgegaan wordt van een stuk of tien intervallen [1,n(1)], [1,n(2)], …, [1,n(10)] waarbij de getallen n(1) tot en met n(10) flink groot moeten worden genomen. In elke simulatierun wordt eerst een random getal r uit 1, …,10 gekozen, daarna een random getal uit 1, 2, … n(k); en tenslotte wordt een random getal uit 1, 2, …, r getrokken. Van dit getal wordt het eerste cijfer geteld. Een van de hoogtepunten van het pakket ORSTAT2000, naar mijn smaak!

De grote module over *Wachtrijen* heb ik maar vluchtig bekeken, omdat het niveau me te hoog gegrepen leek voor VWO-ers. Datzelfde geldt mijns inziens voor de *Lineaire Programmering*. Weliswaar staat dit als een van de examenonderwerpen geboekt, maar ik weet uit recente ervaring dat de wiskundige achtergrond te veeleisend is voor de moderne leerling. Het Lineair Programmeren-vraagstuk uit het examen 2003 werd in het land door vrijwel niemand goed gemaakt, heb ik gelezen. Het correct invoeren van de restricties en de doelfunctie is vaak al een hele kunst. De module *Lineaire Programmering* heb ik wel even uitgeprobeerd met een paar simpele ongelijkheden, maar ik ben er gauw mee gestopt. Deze module van het oude ORSTAT (op diskette) van VU was wat gebruiksvriendelijker en werd beter begrepen door de leerlingen, die overigens nog niet Basisgevormd en Verzelfstandigd waren.

Het pakket ORSTAT2000-VWO bevat dus talloze aanknopingspunten voor verdieping en verbreding van de schoolwiskunde. Nuttig voor werkstukken en praktische opdrachten, maar ook (en dat is veel belangrijker) stimulerend voor en belangstelling wekkend bij de aarzelende leerling. Ik geloof dat het Henk Tijms c.s. zal lukken bij scholieren iets wakker te maken, iets van de nieuwsgierigheid op te roepen die mij trof tijdens die laatste les voor de kerstvakantie, bijna vijftig jaar geleden. Maar dan moet hun leraar wel op de hoogte zijn van het bestaan van het voortreffelijke ORSTAT2000-VWO.

Rest mij te wijzen op de extra dimensie die aan de schoolwiskunde wordt geboden door de programmeerbare grafische rekenmachine, met name de TI-83(plus,SE). Texas Instruments is er in geslaagd een programmeertaal te ontwerpen die sterk op BASIC lijkt. Als we de leerlingen zover kunnen krijgen dat ze die taal een beetje doorkrijgen (en dat is helemaal niet zo moeilijk), dan is er werkelijk een interactieve dimensie aan de didactiek van de ICT en de wiskunde toegevoegd. De softwarepakketten die momenteel aangeboden worden hebben – onvermijdelijk – een hoog automatengehalte. Je klikt op de knop en het programma begint te rekenen of te simuleren. Daarna leun je achterover en wacht op de uitkomsten. Inhoudelijke kennis is niet nodig. Dat is confectiewerk (met een klein beetje interactie daar waar je zelf de variabelen mag instellen).

Het echte maatwerk krijg je pas als de leerling zelf een programma ontwerpt om een specifiek wiskundig probleem op te lossen. Daarvoor is kennis van de erachter schuilende wiskunde onontbeerlijk. Wie de vergelijking van de raaklijn in een punt van een grafiek wil geven, zal de formule ervoor moeten opzoeken; wie de vergelijking van een raaklijn vanuit een punt *buiten* de grafiek wil bepalen, zal flink wat denkwerk moeten verrichten (optimaliseren van de helling bijvoorbeeld). Minstens een denkniveau hoger, lijkt me. Daar ligt een terrein braak dat ik voorzichtig probeer te ontginnen in een boek waarvan het concept nu halverwege is. Een idee daarvan krijgt de lezer op mijn huispagina www.henkshoekje.com. Mijn ideaal is een boek dat de leerlingen doorlezen met een TI-83 in de hand in plaats van een kladblok. Niet omdat het van hun leraar moest, maar 'gewoon, zeg maar' omdat wiskunde ook spannend kan zijn.

Henk Pfaltzgraff, Purmerend

Lucien Klaassen, Erwin Kalvelagen, Peter Schram, Henk Tijms:
ORSTAT2000-VWO voor Windows, Vrije Universiteit, Amsterdam.
Bestellen via www.econ.vu.nl/ectrie
of telefonisch bij: 020-444 60 10