Of het nu een eindexamen, een SO, een determinatietoets of een internationaal onderzoek als PISA betreft: het zijn allemaal toetsen met papier, pen en tijd. En de vraag is altijd: welke competenties wil en kun je op deze manier toetsen? **Truus Dekker** maakt een onderscheid in het niveau van vraagstellingen aan de hand van de piramide van Jan de Lange. Wordt vervolgd!

Toetsen op een hoger niveau?

Inleiding

Elke keer zagen mijn collega's en ik er tegenop: de toetsweek! In een korte tijd een serie nieuwe proefwerken maken voor alle klassen, inclusief een herkansingstoets van gelijk niveau. Natuurlijk verdeelden we het werk en gebruikten we – gedeeltelijk – materiaal van voorgaande jaren. En natuurlijk gebruikten we materiaal uit de toetsen die we van de uitgever bij de door ons gebruikte methode ontvingen. Maar het bleef elke keer een hele klus. Die proefwerken moesten goed zijn, zonder fouten in de opgave of de uitwerking en met een goede verdeling over de stof, want de ouders van onze leerlingen en de leerlingen zelf waren kritisch genoeg om er achteraf met de stofkam doorheen te gaan, en eventueel aanpassing van cijfers te eisen. Uiteindelijk waren er maar enkele toetsweken per jaar en hing van de cijfers dus veel af. Elke toets werd minimaal door één collega kritisch bekeken en er waren regelmatig heftige discussies in de lerarenkamer of een bepaalde opgave nu wel of niet in de toets hoorde.

Gaat het bij u op school ook ongeveer zo? Bespreekt u de toetsen die aan de leerlingen worden gegeven met de collega's? Vindt u het belangrijk dat er niet 'zomaar' een toets wordt gegeven zoals die door de uitgever beschikbaar wordt gesteld, maar past u die op z'n minst aan uw eigen onderwijs aan? Bespreekt u de inhoud van het proefwerk achteraf met de leerlingen? En vindt u het ook zo lastig om een evenwichtige toets te maken die recht doet aan wat de leerlingen kunnen en kennen? Een goede toetsenmaker word je niet zomaar, daar doen de meesten van ons minstens een paar jaar over.

Een evenwichtige toets

In een schriftelijke toets die binnen een bepaalde tijd moet worden gemaakt, kun je niet alle vragen opnemen die je zou willen stellen. Een eigen onderzoek doen is er niet bij. Er zijn vaak meerdere hoofdstukken waarover de basiskennis getoetst moet worden, maar je wilt ook ruimte hebben om vragen te stellen die laten zien of de leerling inzicht heeft in de stof. Dus kun je je niet beperken tot een hele serie korte 'kennisvragen' over verschillende onderdelen zoals je dat wellicht bij een schriftelijke toets zou doen. Sommige leerlingen zijn heel goed in staat een presentatie voor de klas te verzorgen, maar hebben veel moeite om zich op papier goed uit te drukken. Die zijn bij het maken van een schriftelijke toets in het nadeel. Gelukkig zijn er nu ook de praktische opdrachten waar allerlei andere vaardigheden aan bod kunnen komen die niet schriftelijk getoetst kunnen worden.
In dit artikel richt ik me uitsluitend op de schriftelijke toets die binnen een of twee lesuren gemaakt moet worden. Met een *evenwichtige* toets bedoel ik er eentje die niet alleen toetst of leerlingen allerlei begrippen en definities kennen en uit het hoofd geleerde oplossingsmethodes kunnen reproduceren, maar ook of ze hun kennis kunnen toepassen in een nieuwe situatie, zelf hun wiskundige gereedschap kunnen kiezen om een bepaald probleem op te lossen en kunnen generaliseren, redeneren en bewijzen.

Wiskundige competenties
Het woord *competentie* wordt in het onderwijs vaak op verschillende manieren geïnterpreteerd, denk maar aan *competentiegericht opleiden*, zoals de term in het MBO en HBO luidt. Ik houd me hier aan de indeling zoals de OECD die gebruikt voor het internationale onderzoek PISA. Zij onderscheiden een aantal wiskundige competenties die overigens op verschillend niveau beheerst kunnen worden. Een paar voorbeelden zijn:
- (wiskundig) denken en redeneren, argumenteren
- gebruiken van symbolische, formele en technische taal
- interpreteren van verschillende representatievormen zoals tabellen, grafieken enzovoort.
- gebruik van (wiskundige) modellen. Een realistisch probleem wordt 'vertaald' naar een wiskundig probleem door een, vaak vereenvoudigd, model te gebruiken.

Deze competenties kunnen worden samengevoegd in een aantal niveaus. Het hieronder getekende model geeft dat weer. Dit model werd ontwikkeld door het Freudenthal Instituut voor het ontwerpen van de Nederlandse Nationale Optie bij het internationale onderzoek TIMSS.

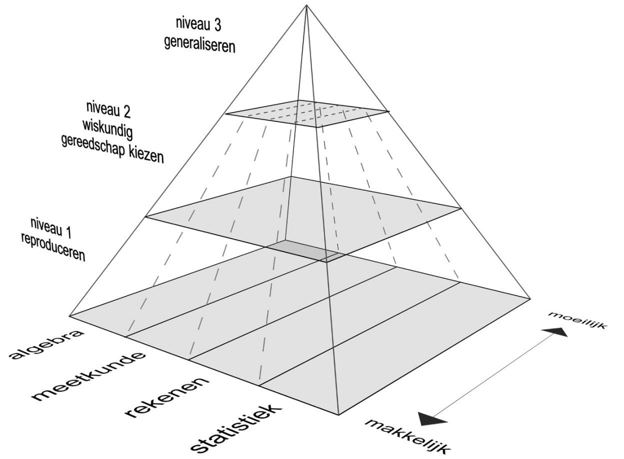


fig. 1 Piramide

De piramide dient twee doelen. In de eerste plaats is het een model voor het classificeren van toetsopgaven van verschillend niveau. Maar het model geeft ook een – globale – verdeling aan van het aantal vragen van elk niveau dat in een evenwichtige schriftelijke toets zou moeten voorkomen. Omdat opgaven op niveau I meestal één-antwoord-vragen zijn die minder tijd vragen dan de open vragen op niveau II en III, gebruiken we vaak de volgende verhouding:

Niveau I : Niveau II : Niveau III = 3 : 2 : 1

De piramide laat zien dat een moeilijke vraag niet beslist een hoog niveau hoeft te hebben. Een moeilijke vraag vereist vaak wel meer stappen om een oplossing te vinden, waardoor er meer fouten gemaakt kunnen worden. En het niveau van een vraag zegt ook niets over de leerling; wat voor de ene leerling een vraag op niveau II is, is voor de andere leerling die met dit type vraag veel geoefend heeft, misschien niveau I.

Door sommige docenten wordt overigens in plaats van de verdeling *gemakkelijk ⟵⟶ complex (moeilijk)* ook de verdeling *informeel ⟵⟶ formeel* gebruikt. Zij vinden het belangrijk om na te gaan of een leerling formele oplossingsmethoden gebruikt of (nog) een informele methode die vaak meer tijd vraagt.

Vragen op verschillende niveaus uit de piramide

Hieronder wordt een korte beschrijving gegeven van de verschillende niveaus. De niveaus zijn niet duidelijk van elkaar gescheiden, maar lopen in elkaar over. De gekozen voorbeelden komen vaak uit de basisvorming of uit VMBO-examens. Met die doelgroepen heb ik me in de afgelopen jaren veelal beziggehouden. Maar voor andere groepen zijn er uiteraard ook voorbeelden beschikbaar.

niveau I: reproductie, gebruik van standaard procedures, kennis van feiten en definities

Hierbij horen vragen als:

- Hoeveel zijvlakken heeft een kubus?
- Bereken de BTW (19%) bij een bedrag van € 250,-.
- Wat is de naam van de grafiek van een tweedegraads functie?
- In de wereld wordt gemiddeld iedere seconde een kind geboren. Hoeveel kinderen worden gemiddeld per dag op de wereld geboren?

De vorm van de vraag is meestal een één-antwoord-vraag; er is ook maar één goed antwoord mogelijk. Voor dit type vragen kan *soms* de meerkeuzevorm gebruikt worden. Die laatste vorm heeft als nadeel dat je niet weet waarom een antwoord goed of fout is. Wat denkt u bijvoorbeeld van Benno's uitleg bij zijn keuze voor alternatief A in de volgende opgave:

> De tangens van de hoek tussen de rechte lijn die hoort bij de functie 5x – 8y – 3 = 0 en de positieve x-as is:
> a. 5/8
> b. – 5/8
> c. 8/5
> d. – 8/5

'Ik heb 5/8 gekozen, want de hoogte is altijd kleiner dan de afstand en het antwoord moet positief zijn omdat er staat: positieve *x*-as.'

Vragen op dit niveau kunnen we allemaal zonder moeite maken voor een toets. Vaak is het een kwestie van een paar getallen van opgaven uit het boek veranderen. Bedenk overigens dat dit best moeilijke vragen kunnen zijn. Het feit dat de te volgen procedure ingewikkeld is maakt de vraag niet van een hoger niveau. En natuurlijk maakt het veel uit of je als leerling veel geoefend hebt op dit type vragen. Soms kunnen leerlingen de vraag beantwoorden ondanks het feit dat ze de standaardmethode niet (meer) weten. In dat geval kost beantwoorden van de vraag vaak wel meer tijd en kan zo'n leerling in tijdnood komen.

niveau II: verbindingen leggen, integratie

Kenmerkend voor dit niveau is dat leerlingen informatie uit verschillende bronnen, zoals tekst, tabel of grafiek, kunnen integreren en in het algemeen hun eigen wiskundige 'gereedschap' moeten kiezen om een probleem op te lossen. Vragen op dit niveau worden vaak gesteld binnen een context en het zijn vrijwel altijd open vragen. Overigens kan die context ook uit de wiskunde zelf komen. De wiskundige inhoud is de leerling eerder tegengekomen, de manier waarop hij die hier moet gebruiken waarschijnlijk niet. Een voorbeeld:

> Je kunt een kopieermachine gebruiken om een tekening te vergroten of te verkleinen. Ben heeft de machine ingesteld op verkleinen tot 60%. Hij is niet tevreden met het resultaat en maakt een nieuwe kopie op 140%. Heeft hij nu weer het oorspronkelijke formaat terug? Leg je antwoord uit.

De opgave kan op verschillende manieren worden gemaakt en zowel op een formeel als op een informeel ni-

veau. Ik heb bijvoorbeeld dit gezien bij een van mijn leerlingen: ‘140% van 60% is 1,4 × 60 = 84. Nee, hij krijgt niet hetzelfde formaat terug.’
Maar er was ook een leerling die schreef: ‘Ik neem aan dat het formaat van de tekening 20 × 30 cm is. Dan is de verkleining 12 × 18 cm. Als je dat weer gaat vergroten op 140% krijg je 1,4 × 12 = 16,8 en 1,4 × 18 = 25,2. Dat is niet hetzelfde.’

Wat ik niet gezien heb, maar wat ook mogelijk was geweest, is een redenering in woorden: de 40% eraf en de 40% erbij worden berekend over verschillende getallen, en het resultaat kan dus nooit hetzelfde zijn. De uitwerking van de leerling levert de docent veel informatie op. Die informatie wordt niet alleen gebruikt om de leerlingen feedback te geven maar ook, zoals in mijn geval, als feedback voor de docent. Ik nam me naar aanleiding van de resultaten van deze opgave voor om in mijn VWO-klas wat meer aandacht aan algemene redeneringen en generalisaties te besteden.
Een niveau II-vraag maakt vaak deel uit van een serie vragen over een al dan niet wiskundige context. Eerst worden een of meer niveau I-vragen gesteld om inzicht te krijgen in het probleem. Pas daarna volgt een niveau II-vraag en eventueel een niveau III-vraag.

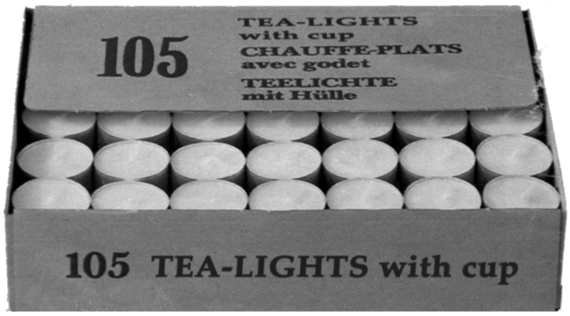
niveau III: mathematiseren, wiskundig redeneren, generaliseren, inzicht
Leerlingen moeten op dit niveau bijvoorbeeld inzien dat een hele serie (context)opgaven betrekking heeft op eenzelfde wiskundige inhoud. Voor veel VMBO-leerlingen is elke opgave weer compleet nieuw, ze hebben er veel moeite mee zo’n probleem te herkennen als: ‘O ja, dat is weer zo’n opgave met een vast bedrag dat niet verandert en een bedrag per uur.’ Leerlingen moeten (wiskundige) modellen maken, gebruiken en bekritiseren en kunnen een passende redenering opschrijven om hun beweringen te ondersteunen. Opnieuw een voorbeeld:

Stel je voor dat je buurman een muurtje heeft gemetseld tussen jullie voortuinen. Dan wil je wel graag zeker weten dat het muurtje recht staat en de verdeling van de voortuinen eerlijk is. Hoe zou je dat kunnen aantonen? Geef een duidelijke toelichting.

Van leerlingen wordt verwacht dat ze voor het beantwoorden van zo’n vraag hun eigen wiskundige gereedschappen kunnen kiezen. Maar ook dat ze eerst een (wiskundig) model maken van de situatie en het probleem binnen dat model oplossen. Veronderstellingen die gemaakt worden omdat niet alles uit de foto zichtbaar is, moeten worden vermeld.
Of het muurtje scheef staat kun je bepalen met de stelling van Pythagoras, maar als je veronderstelt dat de voortuinen rechthoekig zijn kun je ook kijken of alle diagonalen even lang zijn. Een leerling die nog op een informeel niveau werkt zou kunnen schrijven: ‘Ik zou kranten naast elkaar neerleggen op het hele erf. En dan bij de buurman hetzelfde doen. Zie je zo of hij scheef heeft gemetseld!’

Nog een voorbeeld, met dank aan Nanda Querelle:

Hoeveel lagen met theelichten zitten er in die doos?



Leerlingen redeneerden op verschillende manieren:
– Onder die klep passen nog twee rijen. (Veronderstelling: die klep bedekt de helft van de bovenkant van de doos). 7 × 5 = 35 en 105 : 35 = 3. Dus drie lagen.
– Op een rij zie je zeven theelichten, 105 : 7 = 15. In een kolom aan de bovenkant zijn minstens drie theelichten. Vier kan niet want 15 is niet deelbaar door vier. Dus 3 of 5. Meer dan vijf past niet en bovendien kun je 15 niet delen door 6 of 7 of 8 enzovoort. Dan zijn er dus vijf of drie lagen. Vijf zou kunnen als het hele dunne theelichten zijn. Maar drie is waarschijnlijker.
– Ik weet niet hoe dik theelichten zijn. Ik neem aan dat ze net zo hoog zijn als de doos. Aan de bovenkant zie je 7 × … theelichten. Dat getal op de puntjes moet 3 of 5 zijn want 105 : 7 = 15. Als je aanneemt dat onder die klep ook nog theelichten zitten moet het 5 zijn, want 4 kan niet. Alleen kom je nu maar op 35 in totaal.

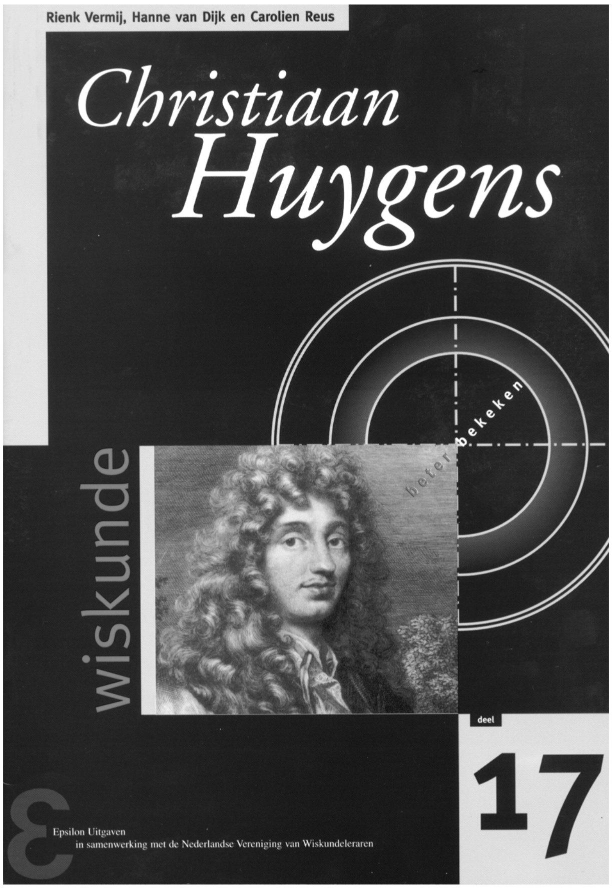
De leerlingen gebruiken de informatie die er is. Ze doen veronderstellingen en verwerpen die weer op wiskundige gronden. Ze gebruiken hun eigen wiskundige kennis om het probleem op te lossen. Daarvoor hoef je niet te weten wat een theelicht precies is en hoe dik het is.

Dat kunnen die van mij niet!

In de loop van de jaren heb ik vaak nascholing gegeven over het maken van toetsen en heel vaak – in Nederland, maar ook in het buitenland – was de reactie van de docenten: ‘Heel leuk hoor, die opgaven waarbij de leerlingen moeten laten zien dat ze wiskundig kunnen redeneren, iets formeel bewijzen of een algemene regel opstellen. Maar voor mijn leerlingen geldt dat niet. Ik moet echt veel herhalen, eindeloos oefenen en dan op precies dezelfde manier terugvragen, anders redden ze het niet.’ Welke leerlingen denkt u nu dat er bij ‘mijn’ bedoeld werden? Tien tegen één dat u het fout hebt. Dat werd gezegd over basisschoolleerlingen, over leerlingen uit de beroepsgerichte leerweg, over MAVO-, HAVO- en VWO-leerlingen. Alleen over hoogbegaafde leerlingen heb ik het geen enkele docent horen zeggen. Maar iets beredeneren, jezelf vragen stellen en beantwoorden, een wiskundig model becommentariëren en generaliseren gaat niet vanzelf. En als je nooit eerder dergelijke vragen hebt gesteld aan je leerlingen, in de les of tijdens een toets, kun je ook niet verwachten dat vragen op niveau II of III ‘vanzelf’ goed beantwoord worden. Daar gaat een heel leerproces aan vooraf van leren om zelf na te denken en je redenering goed te verwoorden. En dat is ook eerlijk, want een toets moet passen bij het onderwijs dat daaraan voorafgaand gegeven werd.

Veel leerkrachten klagen erover dat het moeilijk is om goede vragen te vinden en zelf maken kost veel tijd. Dat laatste is waar, en het is ook niet zo eenvoudig om ‘zomaar’ goede toetsvragen te maken. Mijn collega’s en ik begonnen daarom met het aanpassen van bestaande vragen. Daarover meer in een volgend artikel.

Truus Dekker, Freudenthal Instituut, Utrecht



Verschenen

Titel: *Christiaan Huygens*
(Deel 17 van de Zebra-reeks)
Auteurs: Rienk Vermij, Hanne van Dijk & Carolien Reus
Uitgever: Epsilon Uitgaven
ISBN 90-5041-082-0
Prijs: € 8,00

Christiaan Huygens (1629 - 1695), zoon van de bekende dichter en staatsman Constantijn Huygens, werd in het midden van de zeventiende eeuw beschouwd als Europa’s grootste wiskundige en natuurwetenschapper. Hij was een geniale onderzoeker die zich zowel met de theorie als de praktijk bezighield. Zo bedacht hij de verklaring voor de ringen van Saturnus en formuleerde het golfkarakter van het licht; ook was hij lenzenslijper en vond hij de slingerklok uit. Doordat hij wiskundig redeneren en natuurkundig inzicht combineerde was hij een van de eerste moderne geleerden.
Dit boek geeft inzicht in zijn leven en werk, de opdrachten zijn door zijn werk geïnspireerd.