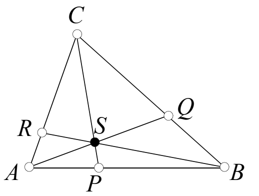
Wat te bewijzen is (23)

Rubriek

Naar de Italiaanse waterbouwkundige Giovanni Ceva (1648-1734) is een meetkundig theorema vernoemd. Deze elementaire stelling die vreemd genoeg aan de aandacht van Euclides c.s. is ontsnapt, geeft een nodige en voldoende voorwaarde voor het door één punt gaan van de drie lijnstukken in een driehoek die een hoekpunt verbinden met een punt van zijn overstaande zijde.



CP, AQ, BR concurrent

$$\Updownarrow$$

$$\frac{|AP|}{|BP|}\cdot\frac{|BQ|}{|CQ|}\cdot\frac{|CR|}{|AR|} = 1$$

Het schijnt dat Ceva zijn stelling baseerde op ‘zwaartekrachtige’ argumenten. Zijn redenering kan ongeveer aldus zijn geweest. Beschouw drie massa’s m_A, m_B en m_C in de hoekpunten van driehoek ABC. De vraag is nu hoe het zwaartepunt van dit drie-massasysteem te bepalen.
Een oplossing: bepaal eerst het zwaartepunt P van de massa’s m_A en m_B. P ligt tussen A en B en op grond van een fysische wet zodanig dat:

$$|AP| : |BP| = m_B : m_A$$

Het zwaartepunt S van de drie massa’s ligt nu op het lijnstuk CP (en verdeelt dit lijnstuk in delen die zich verhouden als $m_A + m_B$ en m_C).
Er zijn uiteraard nog twee andere mogelijkheden om de positie van S te bepalen; via het zwaartepunt Q van m_B en m_C en via het zwaartepunt R van m_C en m_A.
Omdat er slechts één zwaartepunt S is, moeten de lijnen CP, AQ en BR wel concurrent zijn. Tegelijkertijd weten we dat het (cyclische) product van de verhoudingen waarin de lijnstukken AB, BC en CA door respectievelijk P, Q en R worden verdeeld, gelijk is aan:

$$\frac{m_B}{m_A}\cdot\frac{m_C}{m_B}\cdot\frac{m_A}{m_C} \quad \text{ofwel } 1$$

Is dit nu een bewijs? Wie de momentenstelling uit de mechanica gelooft, is natuurlijk overtuigd dat de stelling van Ceva klopt. De wiskundige is echter niet gauw tevreden. In een veel verder verleden gebruikte Archimedes ook de momentenstelling (en op waarlijk vernuftige wijze) om meetkundige waarheden op te sporen, maar hij liet het daar dan niet bij zitten en zocht naar een sluitende wiskundige redenering. Ik weet niet of Ceva dit ook gedaan heeft. Wel weet ik dat er verschillende eenvoudige meetkundige bewijzen van zijn stelling te bedenken zijn.
Een mooi inzichtelijk bewijs is gebaseerd op de verhouding van de oppervlakten van de driehoeken BSC, CSA en ASB, waarbij S een willekeurig punt binnen driehoek ABC is. Dit bewijs (zie bijvoorbeeld Coxeter & Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA 1967) is heel goed te behandelen met leerlingen van bijvoorbeeld 3 VWO.
In verband met het vervolg van dit stukje geef ik hier de voorkeur aan een wat meer algebraïsch ogende variant.

Stel: $\frac{|AP|}{|BP|} = p$, $\frac{|BQ|}{|CQ|} = q$ en $\frac{|CR|}{|AR|} = r$

Ter verkorting van de tekst noteer ik de oppervlakte van een driehoek met behulp van ‘absoluutstrepen’.
Bijvoorbeeld: $|ABC|$ = oppervlakte driehoek ABC.

Als S over de lijn CP beweegt, dan is gemakkelijk na te gaan dat $|CSA|$ en $|BSC|$ zich onveranderlijk verhouden als $p : 1$. Omgekeerd, als die oppervlakten de verhouding $p : 1$ bezitten, dan moet S op de lijn CP liggen.
Evenzo geldt:

$$S \text{ op } AQ \Leftrightarrow |ASB| : |CSA| = q : 1$$

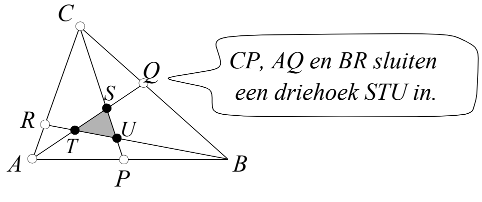
$$S \text{ op } BR \Leftrightarrow |CSB| : |ASB| = r : 1$$

Laat S nu het snijpunt van CP en AQ zijn.
Uit:

$$\frac{|CSA|}{|BSC|} = p \text{ én } \frac{|ASB|}{|CSA|} = q \quad \text{volgt: } \frac{|ASB|}{|BSC|} = pq$$

S ligt op BR dan en slechts dan als die laatste verhouding ook gelijk is aan $\frac{1}{r}$, en dus als $pqr = 1$. Einde bewijs.

Een oppervlakteformule
Aanleiding voor dit stukje was niet zozeer Ceva’s theorema als wel een stelling die ik vond in het boekje met de (Portugese) titel *Teoremas Famosos da Geometria* en geschreven door Paulus Gerdes & Marcos Cherinda.
Ik had dit meegenomen op vakantie en ontdekte tot mijn schrik dat deze mooie collectie stellingen geen bewijzen bevatte. De auteurs wilden blijkbaar de lezer uitdagen en dat is ze, wat mij betreft, gelukt. Zo botste ik op de stelling van Routh (1896):



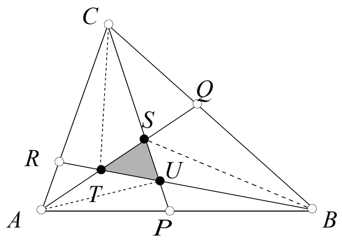
ALS $\frac{|AP|}{|BP|} = p$, $\frac{|BQ|}{|CQ|} = q$, $\frac{|CR|}{|AR|} = r$

DAN $\frac{|STU|}{|ABC|} = \frac{(pqr-1)^2}{(pq+p+1)(qr+q+1)(rp+r+1)}$

De formule intrigeerde me. Als de driehoek ontaardt in een punt, wordt de oppervlakte 0, ofwel $pqr = 1$, geheel in overeenstemming met Ceva's stelling. De ontaarding van de driehoek is ultiem (niet de ontaarding tot een lijnstuk, maar tot een punt!); verklaart dat het feit dat $pqr = 1$ een soort dubbeltellende 'vernuller' is? En hoe zit het met de noemer in de formule? Die is keurig symmetrisch in p, q en r, allicht. En de graad (= 6) is gelijk aan de graad van de teller, ook dat kan ik inzien. Maar voor een bewijs van de formule is natuurlijk meer nodig. Dat begint zó:

$$|STU| = |ABC| - |CSA| - |ATB| - |BUC|$$

Ik wil nu de verhoudingen van de oppervlakten van CSA, ATB en BUC tot die van ABC uit te drukken in p, q en r.



Bij het bewijs van Ceva's theorema is aangetoond dat, onafhankelijk van het feit of S (= snijpunt AQ en CP) op BR ligt, de oppervlakten van BSC, CSA en ASB zich verhouden als $1 : p : pq$.
En dus:

$$|CSA| = \frac{p}{pq+p+1} \cdot |ABC|$$

Analoog hiermee weet ik nu:

$$\frac{|ATB|}{|ABC|} = \frac{q}{qr+q+1} \text{ en } \frac{|BUC|}{|ABC|} = \frac{r}{pr+r+1}$$

Met als gevolg:

$$\frac{|STU|}{|ABC|} = 1 - \frac{p}{pq+p+1} - \frac{q}{qr+q+1} - \frac{r}{pr+r+1}$$

Deze uitkomst heeft nog niet de vorm van de formule van Routh. Er moet toegewerkt worden naar één breuk. Dat het met de noemer goed komt is duidelijk, maar het is nog een saaie rekenpartij om de gewenste teller, dat wil zeggen $(pqr-1)^2$ te krijgen. Hoe steekhoudend is mijn gedachte bovenaan deze kolom?
Ik probeer nog even een bijzonder geval: $p = q = r$, dat lukt bijna uit het hoofd:

$$|STU| = 1 - \frac{3p}{p^2+p+1} = \frac{(p-1)^2}{p^2+p+1} = \frac{(p^3-1)^2}{(p^2+p+1)^3}$$

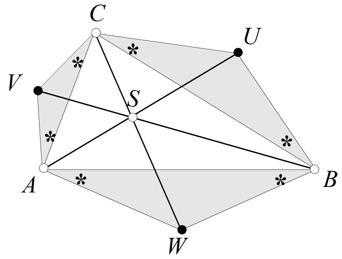
Tja, wie er nu nog twijfelt ... ?
Voor alle zekerheid laat ik de teller van de p,q,r-breuk toch maar uitrekenen door de TI-89 – het intoetsen vraagt wel wat concentratie – maar na de bevrijdende klap op de Enter-toets komt er netjes:

$$p^2q^2r^2 - 2pqr + 1$$

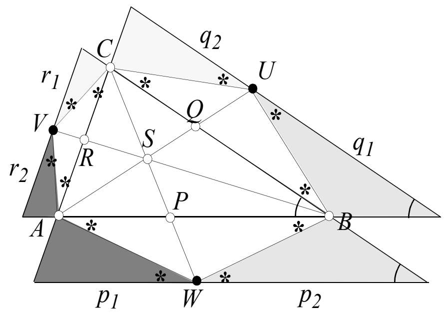
Wie zo'n elektronische interventie als illegaal bewijsmiddel ervaart, moet het zelf maar weten.

Een toepassing van Ceva's stelling

Terug naar de stelling van Ceva. Die kan natuurlijk worden toegepast bij bewijzen van de concurrentie van bijzondere lijnen in een driehoek, zoals bissectrices of hoogtelijnen. Een bekend en mooi voorbeeld is het door één punt gaan van de lijnen die de hoekpunten verbinden met de raakpunten van de ingeschreven cirkel.
Een wat minder bekend voorbeeld, ook afkomstig uit het eerdergenoemde Portugese boekje, is het volgende:
Plaats gelijkvormige, gelijkbenige driehoeken buitenwaarts op de zijden van driehoek ABC, dan gaan de lijnen die A, B en C met de toppen van die driehoeken verbinden door één punt.



De hulp bestaat hier uit de drie lijnen evenwijdig aan de zijden van de driehoek en gaande door U, V en W.
Kijk maar:



De verhoudingen van de stukken waarin AB, BC en CA door CW, AU en BV worden verdeeld, zijn nu ook te vinden op de drie hulplijnen als $p_1 : p_2$, $q_1 : q_2$ en $r_1 : r_2$
Verder zijn de grijze driehoekjes in de figuur twee aan twee gelijkvormig (let op de hoeken!) , zodat geldt:

$$\frac{p_2}{q_1} = \frac{|WB|}{|UB|} = \frac{|AB|}{|BC|} \text{. Evenzo } \frac{q_2}{r_1} = \frac{|BC|}{|CA|} \text{ en } \frac{r_2}{p_1} = \frac{|CA|}{|AB|}$$

Nu volgt eenvoudig:

$$\frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|BQ|}{|CQ|} \cdot \frac{|CR|}{|AR|} = \frac{p_1q_1r_1}{p_2q_2r_2} = 1$$

en daarmee de concurrentie van AU, BV en CW.

Een bijzondere situatie ontstaat als de driehoeken ABW, BCU en CAV gelijkzijdig zijn. Het punt S waarin AU, BV en CW elkaar snijden is dan het punt dat zowel naar Fermat als Torricelli vernoemd is.
De lezer kan nagaan dat er ook twee limietgevallen zijn, namelijk die waarin S het zwaartepunt en het hoogtepunt van driehoek ABC wordt.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl