

In het tweede artikel uit de serie over het *Second International Handbook of Mathematics Education* bespreekt **Paul Drijvers** het deel over technologie in wiskundeonderwijs. Hij gaat in op de bijdrage van Celia Hoyles en Richard Noss, die een lans breken voor een grotere samenhang tussen onderzoek naar het gebruik van ICT in de wiskundeles en wiskundig-didactisch onderzoek in het algemeen.

Technologie in het wiskundeonderwijs: vormend voor en gevormd door wiskundig denken

Inleiding

Onlangs verscheen het *Second International Handbook of Mathematics Education*, de opvolger van de eerste editie die in 1996 werd gepubliceerd. Het boek, bestaande uit twee forse delen, beoogt een overzicht te geven van de huidige stand van zaken in het onderzoek van wiskundeonderwijs.

In het vorige nummer van de *Nieuwe Wiskrant* besprak Kees Hoogland Jablonka's bijdrage aan het Handbook over gecijferdheid. Het tweede artikel in deze serie betreft het deel dat de rol van technologie in het wiskundeonderwijs betreft.

Hieronder beschrijf ik eerst globaal de opzet van de technologiesectie in het Handbook. Dan ga ik nader in op het hoofdstuk van Hoyles en Noss, dat ik het meest interessante vond. Vervolgens geef ik commentaar op dat hoofdstuk, en ga ik na welke lessen een docent eruit zou kunnen trekken. Een voorbeeld voor gebruik in de klas is apart toegevoegd.

Technologie in het Handbook

In vergelijking met de eerste editie van het Handbook uit 1996 is de ruimte voor technologie aanzienlijk toegenomen. Maar liefst vijf hoofdstukken zijn eraan gewijd, tegen twee in de vorige editie. Kennelijk zien de redacteurs meer dan in 1996 het belang van technologie voor het huidige wiskundeonderwijs.

Weten we nu zoveel meer over de inzet van technologie in de wiskundeles? In de inleiding op deze vijf hoofdstukken stelt Leung dat er veel onderzoek gedaan is naar de impact van technologie voor wiskundeonderwijs, maar dat de literatuur op dit terrein slechts een korte levensduur heeft vanwege de snelle ontwikkelingen. Vandaar dat een overzicht zeer gewenst is.

Het hoofdstuk van Lagrange en collega's biedt inderdaad een overzicht. De auteurs bestudeerden niet minder dan 662 (!) publicaties over technologie in het wiskundeonderwijs en proberen daarin lijn te brengen. Het volgende

hoofdstuk behandelt de invloed van het gebruik van technologie op het wiskundecurriculum. Na het hoofdstuk van Hoyles en Noss, waarop ik hieronder uitgebreider inga, besluit de technologiesectie met hoofdstukken over technologie in het universitaire wiskundeonderwijs en in de lerarenopleiding.

De bijdrage van Hoyles en Noss

De titel van het hoofdstuk, dat ik nu meer in detail bespreek, luidt 'What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education?' De auteurs, Celia Hoyles en Richard Noss van het London Institute of Education, stellen zich op het standpunt dat onderzoek naar het gebruik van ICT in de wiskundeles geen geïsoleerd 'eilandje' moet zijn, maar in verband moet staan met onderzoek naar en ontwikkeling van wiskundeonderwijs in het algemeen. Het is van belang dat onderzoek naar het gebruik van ICT in de wiskundeles en vakdidactisch onderzoek in het algemeen van elkaar leren en elkaar bevruchten.

Het hoofdstuk begint met de constatering dat het niet meer doenlijk is om de stand van zaken rond technologie in het wiskundeonderwijs als geheel te schetsen. De auteurs beperken zich dan ook tot software die kan bijdragen aan het ontwikkelen van wiskundig inzicht, en die leerlingen kunnen gebruiken om modellen te bouwen en te exploreren voor het oplossen van problemen. Het gaat hen om digitale omgevingen waarin leerlingen op een dynamische, interactieve manier hun wiskundig denken kunnen uitdrukken en ontwikkelen.

Twee categorieën software worden onderscheiden: programmeerbare 'microwerelden' waarin de leerling zelf nieuwe modellen en representaties creëert, en expressieve tools die al bestaande oplosmethoden en resultaten bieden, zonder dat de leerling de achterliggende methode hoeft te doorgronden. Deze tweedeling, die twee verschillende manieren karakteriseert waarop ICT in het wiskundeonderwijs een rol speelt, bepaalt in sterke mate de rest van het hoofdstuk.

Programmeerbare microwerelden

Onder een microwereld wordt een omgeving verstaan die gebaseerd is op een (visuele) programmeertaal, waarbinnen leerlingen kunnen (re-)construeren. Wellicht het bekendste voorbeeld is de 'schildpadmeetkunde', al dan niet met de programmeertaal Logo, waar de auteurs zich in het verleden intensief mee bezig hebben gehouden. Het idee van de schildpadmeetkunde is dat je een beestje kunt besturen, dat een spoor achterlaat. Door de goede instructies te geven ontstaat een gewenste vorm. Figuur 1 laat zien dat die instructies wel nauw komen: de opdracht 'herhaal 30 vooruit 1 rechts 120' leidt tot de bovenste figuur, terwijl 'herhaal 30 vooruit 1 rechts 118' een heel ander plaatje geeft.

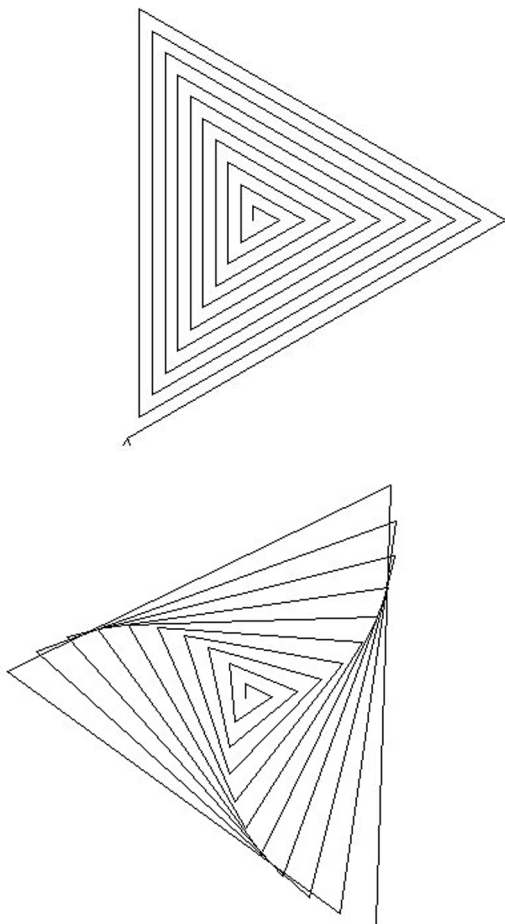


fig. 1 Schildpadmeetkunde met ALCOR: een kleine verandering kan grote gevolgen hebben

Tijdens het werken in een microwereld vindt het leren parallel aan het vormgeven van de omgeving plaats. De constructie van het model en de evaluatie ervan wisselen elkaar af: je verandert iets in je programma en je kunt meteen het effect ervan ervaren. Het schrijven van instructies is een manier om procedures te construeren en te expliciteren. Daardoor zijn microwerelden vaak middelen om beter te begrijpen wat de leerling doet en denkt en

geven ze inzicht in het constructieproces van de leerling. Het is overigens niet vanzelfsprekend dat de symbolen die de leerling in een programmeertaal van de microwereld gebruikt en vergelijkbare symbolen in de wiskunde altijd hetzelfde betekenen. Zo bleek bijvoorbeeld dat het variabelebegrip in de algebra andere kenmerken heeft dan in Logo. Symbolen en notaties in de microwereld kunnen dus niet zonder meer over de bestaande wiskundige betekenissen heen worden gelegd. Het ontwerp van de software en de interface zijn cruciaal voor het samenvallen van ICT-wereld en 'traditionele' wiskunde, dus voor de congruentie van beide werelden.

Software voor dynamische meetkunde

De tweede categorie software die Hoyles en Noss onderscheiden is die van de expressieve tools. Daaronder verstaan ze software waarmee leerlingen wiskundige ideeën kunnen uitdrukken met behulp van procedures die al kant-en-klaar beschikbaar zijn, dus zonder dat de gebruiker die zelf hoeft te construeren. Daardoor heeft hij geen inzicht in de onderliggende procedures, maar kan hij deze wel gebruiken om nieuwe situaties te onderzoeken. Als voorbeeld van expressieve software worden programma's voor dynamische meetkunde besproken. In ons land is Cabri daarvan het meest gebruikte voorbeeld. In Cabri worden meetkundige tekeningen gemaakt. Op het eerste gezicht is een constructie in Cabri vergelijkbaar met een tekening met pen-en-papier, en lijkt Cabri dus doorzichtig, transparant te zijn. Figuur 2 (linkerscherm) laat bijvoorbeeld een driehoek zien met drie hoogtelijnen. Op het moment dat we een van de hoekpunten over een cirkel gaan verslepen (figuur 2, rechterscherf), blijkt echter dat de oorspronkelijke driehoek niet één driehoek voorstelt, maar in feite de klasse van alle driehoeken representeert. Het slepen van het hoekpunt maakt het onderscheid tussen onafhankelijke objecten (hoekpunten) en afhankelijke (hoogtelijnen en hun snijpunt), tussen variatie (het 'spoor' van de positie van het hoogtepunt) en invariantie (het feit dat de hoogtelijnen door één punt gaan) duidelijk. Het onderscheid tussen een concrete tekening en een meetkundige figuur met onderliggende meetkundige relaties wordt dus door het slepen duidelijk. Met andere woorden: het slepen bemiddelt, medieert, vormt de brug tussen tekening en figuur.

Overigens zal het onderscheid tussen tekening en meetkundige figuur in veel gevallen door de docent moeten worden benadrukt. Behalve de rol van de docent is ook de opgave van groot belang. Verder wijzen Hoyles en Noss nog op het verschijnsel dat ik 'digitale transpositie' zou willen noemen. Daarmee wordt bedoeld dat een representatie in de digitale omgeving wel veel lijkt op de traditionele pen-en-papier representatie, maar toch essentieel andere kenmerken heeft, waarvan de leerling zich bewust moet zijn.

Al met al is de conclusie dat het slepen in Cabri dynamiek toevoegt aan het leren, zoals in het algemeen variatie in

de ICT-omgeving het onderscheid tussen specifiek en algemeen kan verhelderen. Verder blijkt het werken met Cabri tot een ander soort meetkundige redeneringen en tot andere oplossingsheuristieken te leiden. Net als bij de microwerelden, blijkt dat ‘Cabri-meetkunde’ niet zonder meer hetzelfde is als ‘pen-en-papier meetkunde’. Aan de docent de taak om de balans tussen het construeren en het reflecteren op de gemaakte constructies in de gaten te houden. Met goede taken en adequate begeleiding kan software voor dynamische meetkunde de opbouw van wiskundige begrippen bij de leerling stimuleren.

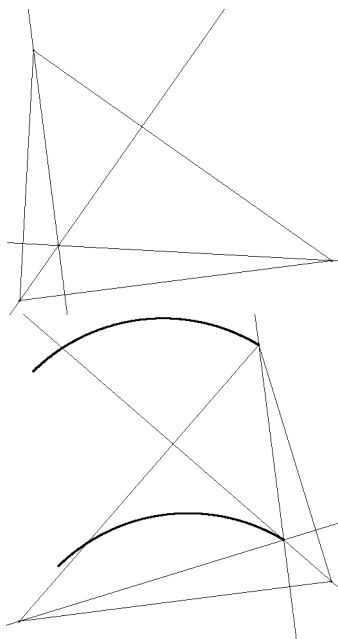


fig. 2 Het verslepen van een hoekpunt met Cabri

Computeralgebra

Als tweede voorbeeld van expressieve software gaan Hoyles en Noss in op rekeninstrumenten, en dan met name op computeralgebrasystemen. Met rekeninstrumenten worden tools bedoeld die wel in het onderwijs worden gebruikt, maar niet daarvoor zijn ontworpen. Computeralgebra is in de ogen van de auteurs onder meer interessant omdat er veel onderzoek naar gedaan is, dat in relatie staat tot didactisch onderzoek in een breder kader. De resultaten van de eerste onderzoeken naar de integratie van computeralgebra op universitair niveau wezen op een verbeterd wiskundig inzicht van de studenten. In tweede instantie is veel aandacht uitgegaan naar de obstakels en misconcepties die bij het gebruik van computeralgebra opdoemen. Daarbij is de vraag of het slechts gaat om een manifestatie van al aanwezige misconcepties, of dat deze juist door het gebruik van computeralgebra worden verergerd.

Het gebruik van computeralgebra lijkt een behoorlijke overhead met zich mee te brengen: het leren van de syn-

tax vraagt tijd en energie. Daarbij bestaat er een nauwe relatie tussen de syntax van algebraïsche bewerkingen en hun betekenis. Deze verwevenheid tussen conceptueel inzicht en machinetechniek staat centraal in de zogenaamde instrumentele benadering van computeralgebra, die in mijn eigen onderzoek een belangrijke rol speelt. Bij het ontwikkelen van machinetechnieken in samenhang met het onderliggende inzicht speelt de docent weer een grote rol, omdat hij de ontwikkeling van bepaalde productieve technieken kan bevorderen. Deze instrumentele benadering wordt overigens in een van de andere hoofdstukken van het technologiedeel van het Handbook verder uitgewerkt.

Ook wordt in een van de eerdere hoofdstukken van het Handbook kort ingegaan op de invloed die de beschikbaarheid van computeralgebra kan hebben op toetsing. In figuur 3 staat een examenopgave uit Denemarken voor scholen waar de leerlingen computeralgebra bij het eindexamen gebruiken, samen met een mogelijke uitwerking in het computeralgebraprogramma TI-Interactive. Leerlingen van scholen die geen computeralgebra bij het examen gebruiken, moeten de vergelijkbare vraag oplossen voor de eenvoudigere functie $f(x) = x - 2 \cdot \sqrt{x}$. Dit maakt duidelijk dat de verleiding bestaat om de opgaven moeilijker te maken wanneer de leerlingen toegang hebben tot computeralgebra.

$f_a(x) = x - a \cdot \sqrt{x}, x \geq 0$, met a een reële parameter waarvoor geldt $a > 0$.

Het gebied M_a in het vierde kwadrant wordt begrensd door de grafiek van f_a en de x -as.

Bereken de oppervlakte van M_a .

```
define f(x) = x - a*sqrt(x)
"Done"
```

```
solve(f(x) = 0, x)
x = a^2 and a >= 0 or x = 0
```

$$\int_0^{a^2} (f(x)) dx \mid a > 0$$

$$\frac{-(a^4)}{6}$$

fig. 3 Onderdeel van Deens eindexamen 2000 waarbij computeralgebra wordt gebruikt, met een oplossing in TI-Interactive

Een agenda voor vervolgonderzoek

Aan het einde van het hoofdstuk benadrukken Hoyles en Noss dat ICT-tools wel het leren vormen, maar vaak op een andere manier dan was voorspeld. Bovendien blijkt dat leren zeer gevoelig te zijn voor kleine veranderingen

in de interface van de ICT-omgeving. Verder merken ze op dat in het onderzoek naar de inzet van ICT een patroon lijkt te zitten: eerst richt het zich op de mogelijkheden van de technologie, vervolgens zijn de keerzijden en obstakels onderwerp van onderzoek, en ten slotte is de vraag op welke manier de tool het leren medieert en welke rol de docent daarin speelt.

De auteurs pleiten voor open software, die leerlingen naar hun hand moeten kunnen zetten, kunnen vormen, kneden, modelleren om nieuwe representaties te ontwikkelen. Daarbij is transparantie een belangrijk kenmerk van geschikte software.

Verder stellen de auteurs dat de complexiteit van het inpassen van ICT in het leren van wiskunde, en dan met name van de wisselwerking tussen het gebruik van ICT en de wiskundige beelden die de leerling daarbij heeft ontwikkelt, niet moet worden gebagatelliseerd, maar onderwerp van nader onderzoek moet zijn:

The review indicates that the complexities revealed at this point are not a matter of 'overhead' to be bypassed or ignored, but a matter for study. The question remains to what extent, therefore, the notion of instrumentation should be expanded to take account of this reflexive aspect of tool use? How might the activity of construction mediate the ways in which learners come to develop techniques and how might this constructive dimension influence the relationship between technical and conceptual fluency?
(Hoyles & Noss, 2003, p. 340)

Vervolgonderzoek zou zich dan ook vooral moeten richten op de zogenaamde instrumentele genese (het ontwikkelen van machinetechnieken en schema's in samenhang met wiskundige betekenis), op de verhouding tussen het gebruik van het ICT-gereedschap en traditionele 'pen-en-papier' technieken, en op de rol van de docent bij dit alles.

Discussie

Tot zover de bespreking van het hoofdstuk. Als ik erop terugkijk, zie ik enkele pluspunten en een minder geslaagd aspect.

Als eerste pluspunt waardeer ik het dat de auteurs oog hebben voor de moeilijkheden van de integratie van ICT, en ICT niet als een wondermiddel beschouwen. Ze wijzen bijvoorbeeld op de spanning die ICT-gebruik kan oproepen door de overhead die het met zich meebrengt: de syntax en semantiek van de software moeten geleerd worden, terwijl veel software is ontworpen vanuit gebruikersperspectief in plaats van leerperspectief.

Het tweede pluspunt is de aandacht voor de verwevenheid van de opgave, het werk in de ICT-omgeving en het wiskundige inzicht dat daarbij komt kijken. Deze verwevenheid heeft een complex en subtiel karakter, en werkt in twee richtingen: de mogelijkheden van de software sturen het wiskundige denken, en anderzijds bepaalt het

denken van de leerling de manier waarop hij de software gebruikt. Kortom, de ICT-omgeving vormt het denken en wordt erdoor gevormd, zoals Hoyles en Noss stellen.

Dit brengt me op het derde pluspunt. Uit het hoofdstuk komt overtuigend naar voren dat het uitmaakt welk ICT-gereedschap voor welk doel wordt gebruikt. De tool doet ertoe, omdat die bepaalde activiteiten oproept en andere juist minder goed mogelijk maakt.

Tools matter: they stand between the user and the phenomenon to be modelled, and shape activity structures.
(Hoyles & Noss, 2003, p. 341)

De notaties en representaties van de ICT-omgeving sturen dus de wiskundige ontwikkeling van de leerling. Zoals het schrijven van dit artikel met pen en papier een andere manier van werken is dan met een tekstverwerker, en vermoedelijk ook tot een ander artikel zou leiden, zo is het uitdrukken van wiskundige kennis – en in het bijzonder van wiskundige kennis in wording – afhankelijk van de technologische omgeving die daarbij wordt gebruikt. De tools vormen, scheppen de conceptie van de leerling, met het gevaar dat er in feite een aparte tool-gerelateerd beeld van wiskunde ontstaat.

Ten slotte een minpunt. De tweedeling tussen programmeerbare microwerelden en expressief ICT-gereedschap komt mij wat geforceerd over. De auteurs geven zelf ook al aan dat dit onderscheid niet zo helder is. Programmeren is natuurlijk wel een krachtig middel om leerlingen aan te zetten tot het expliciteren van procedures, maar of microwerelden daartoe het geëigende middel zijn vraag ik me af. Bovendien: als een leerling in Cabri een macro ontwerpt, is dat dan niet verwant aan programmeren? Hetzelfde geldt voor de volgende procedure voor het bepalen van de vergelijking van de lijn door twee gegeven punten (a, b) en (c, d) in een computeralgebraomgeving:

$$\text{lijn } (a, b, c, d) \equiv \frac{d-b}{c-a} \cdot (x-a) + b$$

Wel is het natuurlijk van belang dat de leerling in de ICT-omgeving wat kan construeren, iets kan maken, en het gevoel heeft daarover controle te hebben en er de eigenaar van te zijn. Openheid en transparantie zijn daarvoor voorwaarden.

Wat is het belang voor de docent?

Tot slot is de vraag wat een docent kan leren uit de technologie sectie van het Handbook, en dan met name uit het hoofdstuk van Hoyles en Noss. Naar mijn idee is dat vooral het bewustzijn van wat hierboven als tweede en derde pluspunt is aangemerkt: de verwevenheid van machinetechniek en wiskundig inzicht, en de specifieke kenmerken van elk ICT-gereedschap die bepaalde inzichten bevorderen en andere juist belemmeren.

Een productieve inzet van ICT in de wiskundeles vraagt naar mijn idee een grote gevoeligheid van de docent op deze twee punten.

Maar hoe deze gevoeligheid te ontwikkelen? Ik vrees dat het antwoord daarop kort maar bewerkelijk is: door zelf veel uit te proberen in de klas, en op een of andere manier ervoor te zorgen dat u op deze ervaringen kunt reflecteren. Dat kan bijvoorbeeld door leerlingenwerk te verzamelen en achteraf nog eens door te kijken, door samen met een collega in een parallelklas eenzelfde ICT-les voor te bereiden, of door bij collega's lessen bij te wonen waarin uw rol slechts bestaat uit het observeren van de gang van zaken. Dit soort activiteiten kan worden ondersteund door bronnen zoals artikelen in tijdschriften en lesmateriaal op websites, en door cursussen en bijeenkomsten voor wiskundecollega's die ICT in hun lessen (gaan) gebruiken. Om een kleine aanzet voor zulke activiteiten te geven, staat in figuur 4 een opgave. Wat u zou kunnen doen, is uw leerlingen – en dan denk ik aan VWO 5 wiskunde B – aan deze opgave te laten werken met ICT-gereedschap bij de hand. Dat kan de grafische rekenmachine zijn, of VU-Grafiek, maar mooier nog is het als dat gereedschap ook algebraïsche mogelijkheden biedt. Denk aan Derive, Scientific Notebook, TI-Interactive, Studyworks of een symbolische rekenmachine. Voorwaarde is wel dat de leerlingen al redelijk met de ICT uit de voeten kunnen. Als u de opgave duidelijk inleidt bij de leerlingen, kunt u er wellicht voor zorgen dat u, wanneer ze zelf aan de slag gaan, de handen zoveel mogelijk vrij heeft om te observeren wat de leerlingen doen. De centrale vraag daarbij zou kunnen zijn: welke relatie is er zichtbaar tussen de mogelijkheden van het ICT-gereedschap en het denken van de leerlingen? Hoe beïnvloeden de mogelijkheden van de ICT-omgeving het denken en hoe leidt het denken van de leerlingen tot een bepaald type ICT-gebruik? Dit is bepaald niet gemakkelijk, maar kan aanleiding zijn tot interessante waarnemingen en gesprekken, zeker als u

het niet alleen hoeft te doen. Voor ervaringen houd ik me van harte aanbevolen!

Hieronder zie je de grafiek van de functie f met $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

Midden tussen de twee nulpunten $x = 1$ en $x = 3$, dus bij $x = 2$, is de raaklijn aan de grafiek van f getekend. Zo op het oog lijkt die door het derde nulpunt te gaan.

Gaat die raaklijn inderdaad door het derde nulpunt? Als je twee andere nulpunten neemt, gaat de raaklijn 'in het gemiddelde' ook door het derde nulpunt? Is dat ook zo als je een andere derdegraadsfunctie neemt?

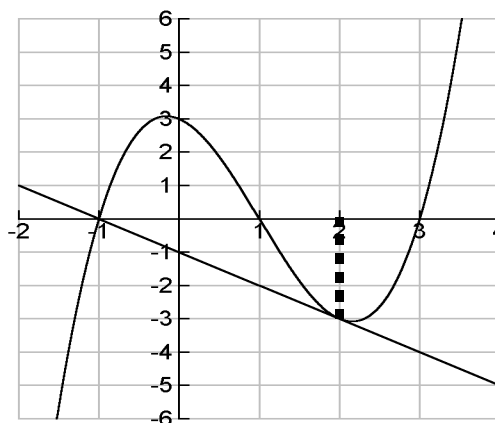
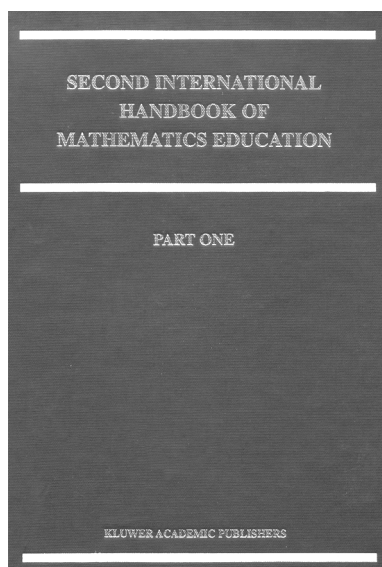


fig. 4 Derdegraadsfunctie met bijzondere (?) eigenschap

Paul Drijvers, Freudenthal Instituut, Utrecht

Second International Handbook of Mathematics Education



Editors: Alan Bishop, Ken Clements, Christine Keitel, Jeremy Kilpatrick, Frederick Leung.
 ISBN: 1-4020-1008-7
 Uitgever: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

 **kluwer**
 the language of science

Prijs: € 400,- (voor Wiskrantlezers: € 300,- zie advertentie achterflap *Nieuwe Wiskrant*, september 2003).

De redactie van de *Nieuwe Wiskrant* wil graag Irene van der Reydt, Reneé de Boo en Marie Sheldon (Kluwer), Alan Bishop en Christine Keitel (Handbook redactieteam) bedanken voor hun inspanningen bij het tot stand brengen van deze serie.