

Stuur lichtstralen door stukjes glas met verschillende doorzichtigheid, en analyseer vervolgens de resultaten met lineaire algebra. Zo krijg je een glashelder model over de wiskunde achter de tomografie. **Jan Brandts** vertelde erover op de manifestatie 'Leve de wiskunde!' Het artikel wordt afgesloten met een impressie van deze bijeenkomst.

Tomografie: kijken zonder snijden

Inleiding

Stuur straling door een patiënt, een koffer, een mummie en meet hoeveel er doorheen gaat. Door slim terugrekenen, en door genoeg stralen in allerlei richtingen te gebruiken, kun je zonder beschadiging van het object proberen te reconstrueren wat er zich in het inwendige afspeelt. De kans op een foutieve interpretatie neemt daarbij af met het aantal metingen.



fig. 1 Tomografische beelden van het inwendige van een patiënt

In figuur 1 zijn drie illustraties te zien van dit principe in de medische wetenschap. In plaats van een patiënt daadwerkelijk open te snijden, heeft men door een bepaalde bestraling en een enorme rekenpartij kunnen reconstrueren hoe het inwendige van de patiënt eruitziet. In de praktijk spelen twee aspecten een rol:

- hoe stel je de stralingsapparatuur op zodat er een minimum aan metingen nodig is met een optimaal resultaat?
- hoe bereken je dit resultaat vervolgens zo snel mogelijk?

Vooraf dit laatste aspect staat sterk in de belangstelling. Vaak wil men immers niet alleen een plaatje van het inwendige, maar een filmpje. Dit betekent al gauw dat je zo'n vijftig keer per seconde een plaatje zult moeten kunnen berekenen, en dit is een enorme uitdaging, zelfs met de huidige stand van zaken binnen de wiskunde en de beschikbare snelle computers.

Deze uitdaging zal voorlopig ook wel blijven bestaan; in feite wil men altijd net even meer dan dat er op dat moment mogelijk is, en zo jagen theorie en praktijk elkaar voortdurend op.

Van tomografie naar lineaire algebra

Lineaire algebra houdt zich (onder andere) bezig met het oplossen van stelsels van lineaire vergelijkingen. Het oplossen van lineaire vergelijkingen dateert al van eeuwen terug, toen er nog geen computers waren. Zo ontwikkelde Gauss (1777-1855) een methode om stelsels lineaire vergelijkingen op te lossen, en kon met zijn methode redelijk eenvoudig de oplossing worden bepaald van tien vergelijkingen met tien onbekenden. Met de komst van de computer kwam er ook standaard programmatuur op de markt. Het bekendste pakket dat lineaire algebra problemen oplost (niet alleen lineaire stelsels) is *MatLab* (Matrix Laboratory). Matlab is in staat om op een doorsnee PC een stelsel van tienduizend vergelijkingen met evenzoveel onbekenden binnen een minuut op te lossen.

Gebruikmakend van snelle computers en slimme methoden is het anno 2003 mogelijk om heel grote stelsels door te rekenen. Hierbij ligt 'heel groot' in de orde van tien tot honderd miljoen. Gebieden waar zulke grote stelsels voorkomen zijn bijvoorbeeld:

- medische tomografie
- voorspellen van het weer
- ontwerpen van vliegtuigen (luchtstromingen)
- chemische simulaties met grote hoeveelheden moleculen
- diverse toepassingen in biologie en natuurkunde
- audio-visuele apparatuur (inclusief mobiele telefoons).

Het zal duidelijk zijn dat er in dit rijtje toepassingen zitten waarbij het nodig is de oplossing binnen een bepaalde tijd te vinden. Doorgaans echter wordt de tijd die maximaal beschikbaar is, als gegeven beschouwd, en is het zaak om binnen dat tijdsbestek een zo nauwkeurig mogelijke oplossing te vinden indien het probleem te groot is om *precies* te worden opgelost. Dit *benaderend oplossen* van stelsels lineaire vergelijkingen maakte de afgelopen jaren binnen de internationale research een stormachtige ontwikkeling door.

Aan de hand van een vereenvoudigd voorbeeld gaat u nu zien hoe een tomografisch probleem vertaald wordt naar

een stelsel vergelijkingen. Verschillende materialen laten in verschillende mate licht of andere soorten straling door. Beschouw bijvoorbeeld stukken glas die verschillende concentraties roetdeeltjes bevatten. Iedere concentratie wordt aangegeven met een getal tussen nul en een; nul betekent dat het glas egaal zwart is en geen licht doorlaat, één betekent dat het glas volkomen helder is en dus alle licht doorlaat.

Model-aanname

Als licht met aanvangssterkte A door l cm glas met concentratie C aan roetdeeltjes gaat, dan blijft er na passeren van dit glas nog $C^l A$ aan lichtsterkte over.

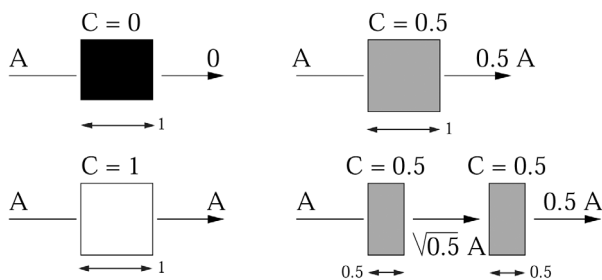


fig. 2 Lichtdoorlating afhankelijk van concentratie C en lengte l

Een paar opmerkingen die de modelaanname ondersteunen:

- Als $C = 0$ dan is $C^l = 0$ voor alle positieve diktes l . Vertaald zegt dit dat de dikte van echt zwart glas niet uitmaakt: zwart is zwart.
- Als $C = 1$ dan is $C^l = 1$ voor alle l . Ofwel: alles doorlaten is onafhankelijk van de dikte.
- Voor $0 < C < 1$ geldt dat $C^l C^k = C^{l+k}$. Dit weerspiegelt het feit dat als je twee stukken glas met dezelfde roetconcentratie C met diktes l en k op elkaar plakt, dit hetzelfde effect heeft als wanneer je een stuk met concentratie C en dikte $l+k$ zou hebben (zie figuur 2).

Gewapend met het bovenstaande model en de lineaire algebra kunnen de basisprincipes van de tomografie en de praktische problemen worden beschouwd. Hiertoe bekijken we het volgende voorbeeld: we hebben een gelijkzijdige driehoek waarvan we weten dat hij uit drie identieke kleinere driehoeken is opgebouwd. Zie figuur 3.

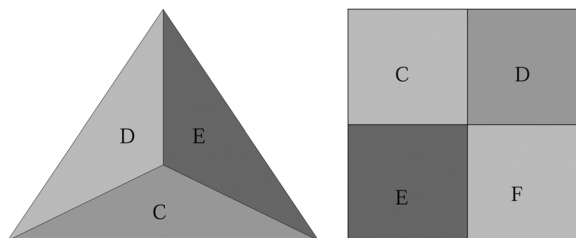


fig. 3 Bepaling van onbekende concentraties voor gegeven configuraties

Ieder van de kleinere driehoeken bestaat uit glas met een onbekende concentratie C , D en E aan roetdeeltjes. We beschouwen een tweedimensionaal model, er kunnen dus alleen lichtstralen in het vlak van het papier lopen. We gaan ervanuit dat we weten welke vorm de driehoeken hebben, maar dat de concentraties onbekend zijn. Het probleem is dat we alleen lichtstralen kunnen sturen door twee of drie verschillende driehoeken tegelijk. Dit lijkt een probleem, maar door slim combineren kunnen we toch de drie onbekende concentraties uitrekenen. We kunnen namelijk op zo'n manier drie lichtstralen door de hoekpunten van de driehoek sturen, dat ieder van de stralen een afstand k door twee van de concentraties reist.

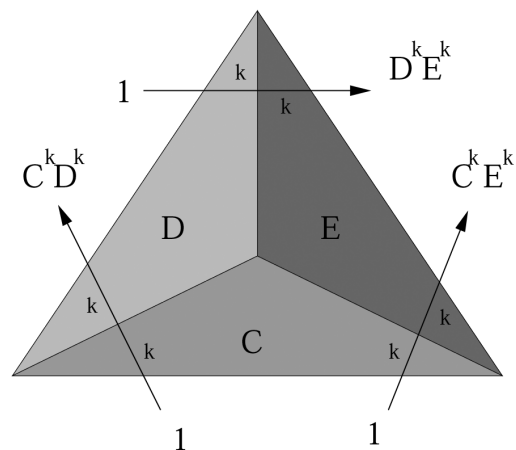


fig. 4 Drie stralen die door twee van de onbekende concentraties gaan

Als we de gemeten outputwaarden M_1 , M_2 en M_3 noemen, krijgen we de volgende vergelijkingen waaraan C , D en E voldoen:

$$C^k D^k = M_1, D^k E^k = M_2, \text{ en } C^k E^k = M_3$$

Dit is in feite een stelsel van drie vergelijkingen en drie onbekenden C , D en E , want k kunnen we zelf bepalen door de lichtbron op de juiste plaats te zetten. Door links en rechts de logaritmen te nemen ontstaat er een stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} k \log(C) + k \log(D) & = \log(M_1) \\ k \log(D) + k \log(E) & = \log(M_2) \\ k \log(C) + k \log(E) & = \log(M_3) \end{cases}$$

Substitueer $x_1 = \log(C)$, $x_2 = \log(D)$ en $x_3 = \log(E)$ en we krijgen:

$$\begin{cases} kx_1 + kx_2 & = \log(M_1) \\ kx_2 + kx_3 & = \log(M_2) \\ kx_1 & + kx_3 = \log(M_3) \end{cases}$$

Dit is een stelsel van drie lineaire vergelijkingen met drie onbekenden x_1, x_2 en x_3 . Dit stelsel kan opgelost worden en vervolgens kunnen C, D en E eenvoudig bepaald worden.

We zouden hetzelfde idee kunnen toepassen op een vierkant dat onderverdeeld is in vier kleinere glazen vierkanten met onbekende concentraties C, D, E en F (zie figuur 3). Het is verleidelijk om horizontale en verticale lichtstralen te gebruiken zoals aangegeven in figuur 5:

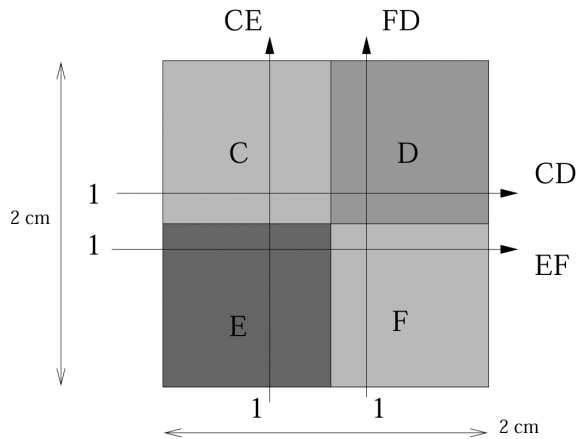


fig. 5 Onoplosbaar stelsel door slecht gekozen stralen

Uitgaande van een aanvangssterkte 1 van het licht en aannemende dat ieder klein vierkant één bij één centimeter is, zouden de gemeten outputs van M_1, M_2, M_3 en M_4 respectievelijk CE, DF, CD en EF moeten zijn. Wanneer we hiervan weer logaritmes nemen en $x_1 = \log(C)$ et cetera substitueren, dan leidt dit tot vier vergelijkingen met vier onbekenden:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = \log(M_1) \\ x_2 + x_4 & = \log(M_2) \\ x_2 + x_3 & = \log(M_3) \\ x_1 + x_4 & = \log(M_4) \end{cases}$$

Het is misschien verbazingwekkend dat dit eenvoudig uitziende stelsel doorgaans geen oplossing heeft. Toch is er een eenvoudig argument voor de onoplosbaarheid. Als we de eerste twee vergelijkingen bij elkaar optellen, en ook de derde en de vierde, dan geeft dat:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \log(M_1) + \log(M_2) \text{ en}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \log(M_3) + \log(M_4)$$

Aangezien we de getallen M_1, \dots, M_4 niet kunnen beïnvloeden (we meten ze alleen) zou het wel heel toevallig zijn als $\log(M_1) + \log(M_2)$ gelijk is aan $\log(M_3) + \log(M_4)$. Dus het stelsel is ofwel strijdig, of het kent oneindig veel oplossingen.

Het mislukken van deze poging wil nog niet zeggen dat het onmogelijk is om de concentraties te berekenen. Door de lichtstralen op een andere manier door het vierkant te sturen, kan er een stelsel ontstaan dat wél oplosbaar is. In figuur 6 zien we een kleine driehoek die geheel in het inwendige ligt. Dat begint op echte tomografie te lijken. We laten het aan de lezer over om een geschikte strategie te bedenken om alle concentraties C, D, E en F te kunnen bepalen.

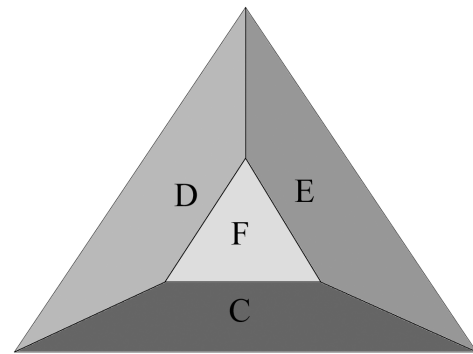


fig. 6 Een concreet tweedimensionaal voorbeeld van tomografie

Tot slot: de praktijk in medische tomografie

In de praktijk weet men niet van tevoren in welke 'gebieden' een patiënt is onderverdeeld. Dat is dus in tegenstelling tot de voorbeelden in het voorafgaande, waarbij we de vorm van ieder gebied vooraf kennen. Om dit probleem te omzeilen, wordt het object in denkbeeldige kleine kubusjes verdeeld, en nemen we aan dat binnen ieder van die kubusjes het materiaal homogeen is. Dit is in de realiteit natuurlijk niet waar, dus we introduceren hier een modelleerfout. Door de kubusjes maar klein genoeg te kiezen, zal deze fout kleiner en kleiner worden. Het gevolg is echter wel dat er meer en meer kubusjes ontstaan met onbekende consistentie. Als je een menselijk hoofd van $30 \times 30 \times 30$ cm in kubusjes van $1 \times 1 \times 1$ mm verdeelt, heb je te maken met $9 \cdot 10^6$ onbekende concentraties of dichtheden, of wat je ook wilt gaan meten. Om deze te kunnen uitrekenen heb je dus ook negen miljoen vergelijkingen nodig! Deze vergelijkingen zijn echter in de praktijk vaak bijna lineair afhankelijk. Dit heeft als gevolg dat de kleinste afrond- en meetfouten al heel snel buitenproportioneel kunnen worden opgeblazen. Het is de kunst om een goede afweging te maken tussen de theoretische nauwkeurigheid die je zou kunnen behalen door de kubusjes steeds kleiner te kiezen, en de praktische beperkingen van dergelijke opgeblazen afrond- en meetfouten. Dit verklaart waarom er wereldwijd nog steeds onderzoek naar het snel oplossen van grote stelsels vergelijkingen plaatsvindt.

Jan Brandts, Korteweg-de Vries Instituut, Amsterdam