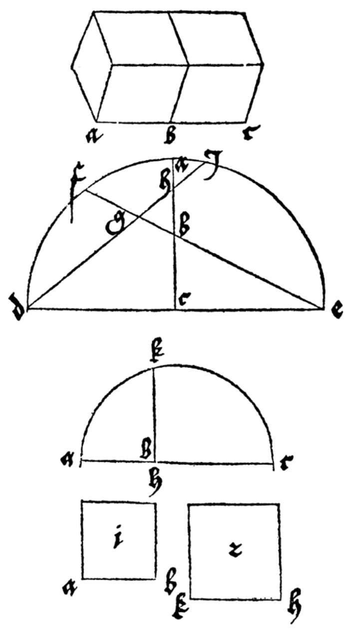
Wat te bewijzen is

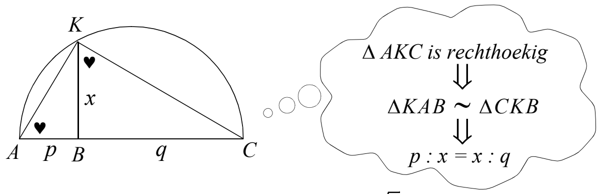
Rubriek

Evenals in de vorige aflevering van deze rubriek is het uitgangspunt een tekening van Albrecht Dürer. Het betreft een klassiek probleem en deze aanwijzing is misschien al voldoende om te zien waarover het gaat.

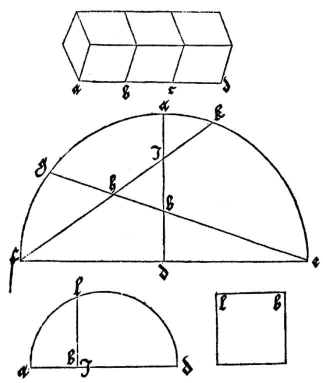


Inderdaad: het Delische probleem ofwel de *verdubbeling van de kubus,* waar zoveel grote Griekse wiskundigen, van Archimedes tot Pappos, zich mee hebben bemoeid.
Volgens de overlevering zou Apollo aan de Deliërs via een orakel verkondigd hebben dat zij, om van de pest bevrijd te worden, een altaar moesten maken dubbel zo groot als, en gelijkvormig met, het bestaande. Dit bleek al gauw een zeer moeilijke opgave. Wij weten nu dankzij de algebra, dat het onmogelijk is om binnen de constructiespelregels van Euclides een lijnstuk te maken dat $\sqrt[3]{2}$ maal zo lang is als een gegeven lijnstuk. Zo'n acht eeuwen na de oorsprong van het probleem heeft Eutokius een aantal, laat ik maar zeggen 'klassieke pseudo-constructies' gecompileerd en Dürer heeft enkele daarvan in zijn Underweysung der Messung beschreven.

Bovenstaande constructie wordt toegedicht aan Sporos (ca. 300 na Chr.), maar is ook sterk verwant aan sommige andere oplossingen. Dürer vertolkt Sporos' methode glashelder. Hij tekent een halve cirkel (middelpunt C) waarvan de straat dubbel zo lang is als de ribbe van de oorspronkelijke kubus (kijk naar de verticale straal CA). Het eindpunt E van de middellijn is verbonden met het midden B van CA; de lijn EB snijdt de cirkel nog in F.
Vervolgens wordt door het andere eindpunt van de middellijn de lijn DJ getekend (J op de cirkel) die EF in G en CA in H snijdt, en wel zodanig dat H precies in het midden ligt tussen G en J. Dat laatste is hier bewerkstelligd door een liniaaltje om D te draaien en zo goed en zo kwaad als het kan af te lezen waar het punt H moet liggen.
Cabri-gebruikers kunnen als volgt te werk gaan. Neem een willekeurig punt J op de cirkel, verbind dat met D en bepaal het snijpunt G van DJ met EF. Bepaal dan het midden H van GJ en laat J over de cirkel bewegen tot H precies op AC lijkt te liggen.
De ribbe van de gezochte kubus zal nu de *middelevenredige* zijn van AB (= ribbe oorspronkelijke kubus) en het zojuist gevonden lijnstuk HC. Dat vertelt de tweede halve cirkel in Dürers tekening. Even ophalen: de middelevenredige tussen twee lijnstukken p en q is het lijnstuk x met de eigenschap $p : x = x : p$. De constructie van de middelevenredige via een halve cirkel is een standaardconstructie in de klassieke meetkunde.

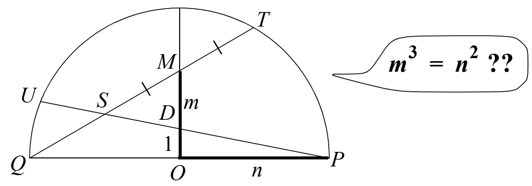


Stel nu $p = 1$. Wil x gelijk zijn aan $\sqrt[3]{2}$, dan moet q (of het lijnstuk HC in Dürers tekening) gelijk zijn aan $\sqrt[3]{4}$.
Dit laatste is allesbehalve evident en vraagt om een bewijs. Dürer zegt hier niets over. Wél zegt hij dat de methode ook werkt voor de verdrievoudiging van de kubus.



Hier is de straal van de eerste halve cirkel *drie* keer de ribbe van de kubus en dat leidt dan tot $|DJ| = \sqrt[3]{9}$ met als gevolg dat $|JL| = \sqrt[3]{3}$. Vervolgens maakte Dürer ook zo'n tekening voor de verviervoudiging van de kubus en daaruit blijkt weer eens dat Dürer geen echte wiskundige was, want $\sqrt[3]{4}$ was hij immers al tegengekomen bij de verdubbelingsconstructie.

Maar goed, de impliciete bewering van Dürer is dat in de hieronder getekende situatie met M is het midden van ST, $|OD| = 1$, $|OP| = n$, en $|OM| = m$ geldt: $m^3 = n^2$
Eerlijk gezegd zag ik niet meteen hoe je dit op klassieke wijze, dat wil hier zeggen via evenredigheden van lijnstukken, kan bewijzen. Wat doe je in zo'n geval? Je grijpt naar het wondermiddel dat analytische meetkunde heet.



lijn PS: $y = -\frac{1}{n}(x-n)$

lijn QT: $y = \frac{m}{n}(x+n)$

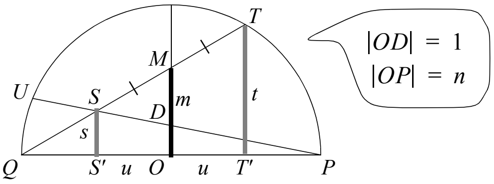
boog QTP: $x^2 + y^2 = n^2$

snijden $\longrightarrow$ $x_S = -\frac{n(m-1)}{m+1}$

snijden $\longrightarrow$ $x_T = \frac{n(n^2-m^2)}{n^2+m^2}$

$$x_T = -x_S \longrightarrow \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2} = \frac{m-1}{m+1} \longrightarrow m^3 = n^2$$

Als er al twijfel bestond aan de juistheid van Dürers bewering (tenslotte staan er ook veel benaderingsconstructies in zijn boek), dan is die nu weggenomen. Toch bleef ik benieuwd naar een 'klassiek bewijs'. Na wat puzzelwerk kwam ik tot het volgende:



Q, S, M, T op één lijn $\longrightarrow$ $\frac{s}{n-u} = \frac{m}{n} = \frac{t}{n+u}$ ...(i)

$$\frac{st}{n^2-u^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

T op halve cirkel $\longrightarrow$ $n^2 - u^2 = t^2$

$$\frac{s}{t} = \frac{m^2}{n^2} \text{ ... (ii)}$$

P, D, S op één lijn $\longrightarrow$ $\frac{1}{s} = \frac{n}{n+u}$

(i) $\longrightarrow$ $\frac{m}{t} = \frac{n}{n+u}$

$$\frac{s}{t} = \frac{1}{m} \text{ ... (iii)}$$

(ii) & (iii) $\longrightarrow$ $m^3 = n^2$

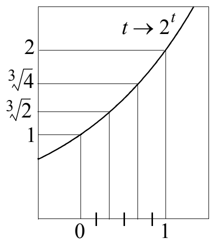
Iedere stap van dit bewijs kan worden vertolkt in de taal der evenredigheden en hoewel het niet klassiek oogt, zou het toch 'Grieks' kunnen worden genoemd. Later vond ik Thomas Heath's 'A History of Greek Mathematics' het bewijs dat Pappos gaf en dat is van vergelijkbaar kaliber.

Evenredige interpolatie

De constructie van Dürer, of eigenlijk van Sporos, is duidelijk een tweetrapsraket. Eerst wordt $\sqrt[3]{4}$ geconstrueerd en pas daarna $\sqrt[3]{2}$. Hoe kwam Sporos op dat idee?
Een belangrijke stap in de geschiedenis van het verdubbelingsprobleem, gezet door Hippokrates, is het inzicht dat de oplossing ervan neerkomt op het vinden van twee middelevenredigen tussen 1 en 2.
Dat wil zeggen op het vinden van x en y zó dat:

$$1 : x = x : y = y : 2 \text{ .... (*)}$$

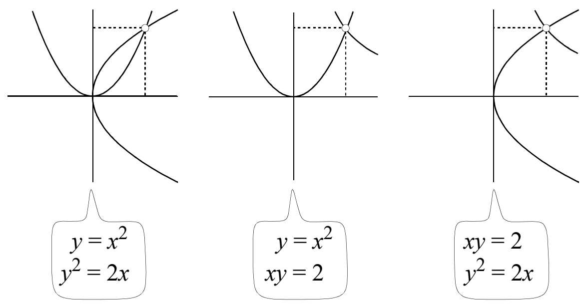
Nog anders gezegd:
het gaat om het vinden van de tweede en derde term van een *meetkundige rij* die begint met 1 en waarvan 2 de vierde term is.
In dit licht bezien is het niet zo verwonderlijk om eerst maar eens naar $\sqrt[3]{4}$ te zoeken.



Het idee van de evenredige interpolatie leidt ertoe om $\sqrt[3]{2}$ te construeren via de snijpunten van twee krommen van de tweede graad. .
Uit (*) volgt immers door kruislings vermenigvuldigen:

$$x^2 = y \text{ , } y^2 = 2x \text{ en } xy = 2,$$

zodat we door twee van deze drie krommen met elkaar te snijden het punt $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ vinden.



Kortom, als het constructie-instrumentarium wordt uitgebreid met de kegelsneden (zoals in het programma Cabri, waarin door vijf punten een kegelsnede kan worden getrokken), dan is $\sqrt[3]{2}$ keurig construeerbaar.
De eerste twee oplossingen in de figuur zijn in de Oudheid door Menaichmos, tijdgenoot van Plato, ontdekt. Een fenomenale prestatie omdat de theorie van de kegelsneden nog in de kinderschoenen stond en omdat de Griekse wiskundigen ernstig gehandicapt waren door het gemis van algebra.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl