Breuken leren door mathematiseren in de hoop dat hierdoor tevens een vorm van wiskundige geletterdheid ontstaat. **Ronald Keijzer** en **Jan Terwel** bespreken de conclusies van een onderzoek. Conclusies die ook voor het voortgezet onderwijs van belang kunnen zijn ...

Kansen voor formaliseren als wiskundige activiteit in het basisonderwijs

Inleiding

Onze huidige technologische maatschappij wordt nogal eens aangeduid als ‘grey-box world’; een maatschappij waarbij apparaten in toenemende mate een rol spelen, terwijl de gebruikers van de apparaten maar tot op zekere hoogte weten wat het apparaat doet, en dat ook niet hoeven te weten om het apparaat in kwestie adequaat te gebruiken (Kenelly, 2000). Maar om te participeren in deze technologische maatschappij zijn wel specifieke kennis en vaardigheden nodig, die voor een belangrijk deel zijn terug te voeren op wiskundige activiteiten als ordenen, symboliseren, formaliseren en schematiseren. Dat betekent dat het van belang is het wiskundeonderwijs en met name het reken-wiskundeonderwijs in de basisschool nadrukkelijker af te stemmen op het functioneren in de huidige samenleving (Gravemeijer, 2001). Dit houdt onder meer in dat leerlingen adequaat moeten leren omgaan met symbolisch weergegeven gegevens en snel de vertaalslag moeten kunnen maken tussen op verschillende manieren (al dan niet schematisch) gerepresenteerde informatie. Ze moeten op verschillende manieren betekenis kunnen geven aan getallen om vervolgens passend met deze getalsmatige informatie aan de slag te gaan. En verder moeten leerlingen grafisch weergegeven informatie op een passende wijze kunnen interpreteren. Dergelijke wiskundige kennis en vaardigheden worden steeds vaker aangeduid met de termen ‘mathematical literacy’ (wiskundige geletterdheid) (Schoenfeld, 1992; Romberg, 1994) of ‘number sense’ (gecijferdheid) (Greeno, 1991; Mcintosh, Reys & Reys, 1992).

Veel onderwijsvernieuwers en onderzoekers hebben nagedacht over de vraag: hoe kunnen we kinderen begeleiden bij het leren denken? (Terwel, 2002). Op het gebied van de wiskunde krijgt die vraag een meer specifieke betekenis: ‘Hoe kunnen we kinderen leren wiskundig te denken (mathematiseren)?’ En de centrale vraag voor het reken-wiskundeonderwijs zou daarmee tot op zekere hoogte gereduceerd kunnen worden tot: ‘Hoe kunnen we kinderen wiskundig geletterd of gecijferd maken?’

Freudenthals (1968) credo ‘wiskunde als menselijke activiteit’ en het beschouwen van het leren van wiskunde als mathematiseren – als proces van ‘verwiskundigen’ (Freudenthal, 1991) – biedt mogelijkheden invulling te geven aan het gecijferd maken van leerlingen. Mathematiseren is dan ook als centraal thema gekozen in een onlangs afgerond onderzoek naar het leren van breuken in groep 6 van de basisschool (Keijzer, 2003). In de leergang die in dit kader is ontworpen en onderzocht, is geprobeerd om het mathematiseren in te zetten voor het leren van breuken, waarbij we richtten op het verwerven van wiskundige geletterdheid door de leerlingen. We deden dit door expliciet te kiezen voor de getallenlijn om de breuken op te representeren, zodat leerlingen van meet af aan kansen kregen om rationale getallen te beschouwen tussen de gehele getallen. En verder gingen we nadrukkelijk met de leerlingen in discussie over gevonden wiskundige relaties.

We vergeleken de opbrengst van het onderwijs in de ontwikkelde leergang met de onderwijsopbrengst van een situatie waarin de leerlingen breuken leerden in een meer traditionele setting. In deze situatie leerden de leerlingen rekenen met breuken door vooral cirkelvormige objecten te verdelen. Verder was typerend voor de controlesetting dat de leerlingen vooral individueel aan de breuken werkten.

Breuken leren op de basisschool

De keuze voor het onderwerp breuken in het bovengenoemde onderzoek is niet toevallig. ‘Breuken’ worden in het algemeen gezien als een van de moeilijkste leerstofonderdelen in de basisschool en dat heeft alles te maken met het formele karakter van breuken. Bij het leren van breuken komen de leerlingen voor het eerst in aanraking met formeel rekenen dat niet op eenvoudige manier is verankerd in herkenbare situaties. Ga maar na. Het verdelen van objecten in het dagelijkse leven leidt in het algemeen slechts tot breuken als $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{4}$. En hoewel we dit met een beetje moeite wat zouden kunnen uitbreiden, leidt het opdelen in herkenbare situaties niet eenvoudig tot het opereren met breuken, zoals bijvoorbeeld het bepalen van de uitkomst van de som $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$. Toch is er alle reden dergelijke zaken bij de leerlingen aan de orde te stellen, om zo gezamenlijk door te dringen tot bijvoorbeeld gelijkwaardigheid van rationale getallen en tot de implicaties die dit heeft voor het opereren met breuken.

Om het gesprek met de leerlingen aan te gaan over dit stukje formele wiskunde, kozen we in de ontwikkelde leergang aanvankelijk voor meetcontexten. We lieten de leerlingen hun tafel meten met meetstrookjes, die we benoemden als Amsterdamse Voet. Daarbij bleek dat het meten met ongevouwen strookjes niet precies genoeg kon gebeuren en daarom lieten we de leerlingen de strookjes vouwen, bijvoorbeeld in vier stukken (fig. 1).

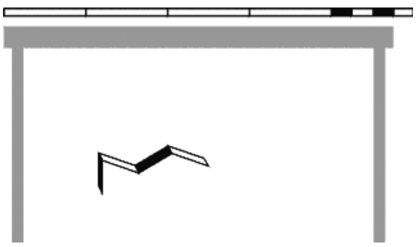

fig. 1 Een tafel opmeten met een in vieren gedeelde strook

Omdat niet alle leerlingen kozen voor het indelen van hun strook in vier stukken, ontstond op een natuurlijke manier een discussie; hoe kan het antwoord 'vier hele stroken en drie stukjes' nu een goed antwoord zijn, maar 'vier hele stroken en zes stukjes' ook. De gesprekken over het vouwen leidde aldus tot het verkennen van de eerste relaties tussen breuken en ook tot de noodzaak van het nauwkeurig benoemen wat het meetresultaat is. Je moet daarbij iets zeggen over het aantal getelde stukjes (de teller) en hoe de gevouwen strook is ingedeeld (de noemer).
De verkregen meetresultaten worden in de daaropvolgende lessen stukje bij beetje geabstraheerd tot breuken op de getallenlijn, door de meetresultaten langs een lijn te noteren. En vervolgens wordt het plaatsen van breuken op de getallenlijn zelf onderwerp van discussie. Waar kun je de breuken plaatsen? Welke breuken horen op dezelfde plaats op de getallenlijn?

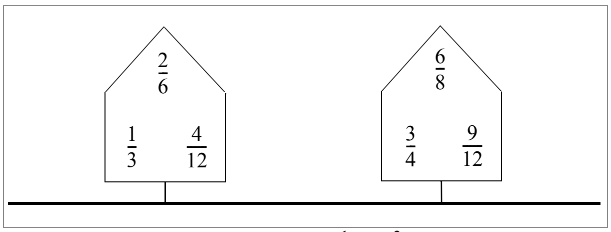

fig. 2 Gelijkwaardige breuken bij $\frac{1}{3}$ en $\frac{3}{4}$ op een getallenlijn

En, welke afstand zit er bijvoorbeeld tussen de breuken $\frac{1}{3}$ en $\frac{3}{4}$ (figuur 2)? In een proces van onderhandelen over de betekenis van de getallen op de getallenlijn – denkend aan vouwhandelingen met strookjes – ontdekken de leerlingen dat de keuze voor de gelijkwaardige breuken $\frac{4}{12}$ en $\frac{9}{12}$ het mogelijk maakt de afstand tussen $\frac{1}{3}$ en $\frac{3}{4}$ snel te bepalen (vgl. Lakatos,1976; Bruner, 1996; Sierpinska & Lerman, 1996).

Resultaten

Zoals boven aangegeven, werd de onderwijsopbrengst in de groep waar dit experimentele programma werd uitgeprobeerd, vergeleken met de opbrengst van een wat traditioneler programma in de controlegroep. Daartoe werd alles wat de leerlingen in de twee groepen deden en leerden tijdens de lessen rond breuken vastgelegd. Gekeken werd hoe de leerlingen scoorden op algemene reken-wiskundetoetsen en in enkele interviews werd de groei in de kennis en vaardigheden bij het onderwerp 'breuken' bepaald. En vervolgens probeerden we door middel van analyses van het verzamelde materiaal na te gaan of leerlingen in de experimentele groep, de groep waarin nadrukkelijk met de leerlingen van gedachten werd gewisseld over hun bevindingen, het beter deden dan hun lotgenoten in de controlegroep, waarin vooral zelfstandig werd gewerkt.

Die vraag bleek niet eenvoudig te beantwoorden. In het werk van de leerlingen in de experimentele groep vonden we veel van de verwachte signalen van gecijferdheid, terwijl we dit soort signalen niet zozeer zagen bij leerlingen in de controlegroep. Dit zien we bijvoorbeeld in het werk van twee vrijwel even sterke rekenaars in de twee groepen. De twee leerlingen werken tegen het eind van het experimentele jaar aan de volgende opgave:

Janita heeft aan het begin van haar vakantie *ƒ* 48,-. $\frac{1}{6}$ deel daarvan geeft ze uit aan ijsjes en limonade. $\frac{1}{4}$ deel geeft ze uit aan ansichtkaarten. De rest geeft ze uit aan cadeautjes.

Welk deel van het geld geeft ze uit aan cadeautjes?
Aanvankelijk weten beide leerlingen geen correct antwoord te formuleren. Wanneer de interviewer/onderzoeker tijdens een interview vraagt de situatie nog eens goed te bekijken, meldt de leerling uit de controlegroep dat ze bij dit soort problemen echt niet weet hoe ze die zou moeten aanpakken. Voor de leerling in de experimentele groep is dezelfde vraag een reden om de situatie in beeld te brengen. Deze leerling tekent $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{6}$ in een soort strook. In de tekening is goed zichtbaar dat $\frac{1}{6}$ deel net iets kleiner is dan $\frac{1}{4}$ deel. Ze past vervolgens $\frac{1}{6}$ af na $\frac{1}{4}$ en komt zo dicht in de buurt van $\frac{1}{2}$: het streepje in het midden. Dit tekenwerk leidt vervolgens tot een heel redelijke conclusie: Janita geeft ruim de helft van haar geld uit aan cadeautjes; een conclusie die getuigt van een groeiende 'wiskundige geletterdheid', omdat kennis, die weliswaar erg beperkt is, toch effectief wordt ingezet om betekenis te geven aan de situatie en bovendien ook nog leidt tot een zinvolle oplossing. Een oplossing waarin we verder

het lineaire karakter van de strook of de getallenlijn zien doorklinken.

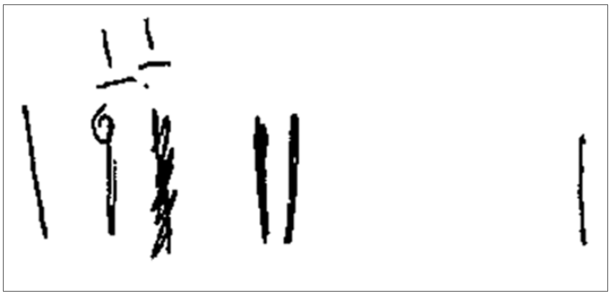

fig. 3 Oplossing bij Janita-probleem door leerling in experimentele groep

In de oplossing van Janita zien we enerzijds dat zij dicht blijft bij haar eigen ervaring, zonder gebruik te maken van voorbarige 'kunstjes' die haar het inzicht ontnemen omtrent datgene wat zij aan het doen is. Anderzijds maakt zij gebruik van een zelfontworpen model dat past in een formele wiskundige categorie van modellen, namelijk de lege getallenlijn. Janita's model is haar eigen 'tool', het gereedschap waarmee zij werkt. Toch komt haar model niet uit de lucht vallen. Haar model is mede de opbrengst van het experimentele programma en de begeleiding door de leraar. Dit model is haar niet aangeboden als een voorschrift dat blindelings moet worden opgevolgd. De eigen kennis en ervaring van kinderen is geen 'handicap', maar een 'scaffold' naar de meer formele wiskundige kennis. We zien hier, als het ware onder een vergrootglas, wat de kernvraag is van goed wiskundeonderwijs: hoe kunnen we kinderen begeleiden bij de overgang van de eigen informele kennis en ervaring naar de meer formele wiskundige kennis die deel uitmaakt van onze cultuur? Philip Kohnstamm (1948) zag als hoofdopgave van het onderwijs: het leren denken onder eigen verantwoordelijkheid. In de voetsporen van Freudenthal en Kohnstamm is het essentieel dat het leren verloopt met inzicht. Als kinderen begrijpen wat zij aan het doen zijn kunnen ze ook verantwoordelijk zijn. Zo blijven zij 'meester' over het eigen denken en handelen. Dat is dan ook in het kort de essentie van 'wiskunde als een menselijke activiteit': dat kinderen zich met inzicht de 'tools' van onze cultuur eigen maken en daar op creatieve wijze gebruik van kunnen maken. Misschien is de vraag 'Hoe kunnen we kinderen wiskundig geletterd of gecijferd maken?' nog teveel vanuit een maakbaarheidsgedachte gesteld. Want uiteindelijk is leren wiskundig te denken een werk en opgave van ieder mens persoonlijk en wel op zijn of haar niveau. Want dit onderzoek maakt ook duidelijk dat er grenzen zijn. Misschien zijn die grenzen met oefenen, trainen en 'drill' nog enigszins te verleggen, maar dat is dan ook het einde van 'wiskunde als menselijke activiteit'.

Naast de genoemde kwalitatieve opbrengst van het onderzoek keken we ook naar de kwantitatieve opbrengst en kozen daarbij voor twee verschillende invalshoeken, namelijk het leren van breuken en de groei in algemene reken-wiskundige vaardigheden. We beginnen bij het leren van breuken. De volgende grafiek is kenmerkend voor de verschillen tussen experimentele groep en controlegroep daar waar het gaat om het leren van breuken. In de grafiek zien we dat bij gelijke scores op een voortoets (de getallen op de horizontale as) de leerlingen in de experimentele groep (de ononderbroken lijn) gemiddeld één vraag over breuken meer weten te beantwoorden dan leerlingen in de controlegroep (de gestreepte lijn).
Ook andere analyses laten zien dat in vrijwel alle gevallen, voor wat betreft het leren van breuken, een duidelijke trend zichtbaar wordt die suggereert dat de leerlingen in de experimentele groep het beter doen dan de leerlingen in de controlegroep.

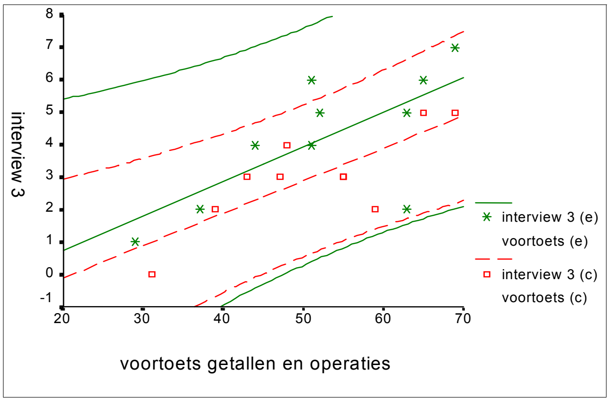

fig. 4 Scores in derde breukeninterview van leerlingen in experimentele en controle groep (met intervallen waarbinnen 95% van de waarnemingen te verwachten zijn)

Naast de prestaties op het onderdeel breuken, bekeken we de resultaten van de leerlingen op algemene rekenvaardigheidstoetsen. We deden dit om na te gaan of de leerlingen die breuken leerden door met elkaar en met de leerkracht van gedachten te wisselen, dit ook bij andere onderdelen van het reken-wiskundeonderwijs konden toepassen. We werden verrast door de uitkomst van het onderzoek op dit punt. We vonden dat alleen sterke rekenaars op de genoemde manier profiteren van het experimentele onderwijs in breuken. Zwakke rekenaars blijken in dit geval meer baat te hebben bij een meer traditionele onderwijsaanpak.

Natuurlijk zochten we een verklaring voor deze bevindingen en vonden die onder meer in het vermogen om de eigen reken-wiskundige constructies onder woorden te brengen. Sterke rekenaars, zo stelden we vast, zijn onder andere sterk in rekenen door hun krachtige en effectieve reken-wiskundetaal. Aandacht voor deze taalontwikkeling in het experimentele breukenprogramma, door met de leerlingen in discussie te gaan, helpt alle leerlingen deze taal – voor wat betreft breuken – te ontwikkelen. Evenwel, sterke rekenaars doen dat beter en kunnen deze vaardigheid daarom ook buiten de breuken toepassen.

Zwakke rekenaars kunnen dat niet en raken bij andere delen in het reken-wiskundeonderwijs in verwarring, wat verklaart dat juist zij het verliezen van de zwakke rekenaars in de meer traditionele setting.

Een mogelijke verklaring zou ook in de sociaal-emotionele sfeer kunnen liggen. Het zou kunnen zijn dat een deel van deze zwakke leerlingen op zekerheid en structuur is ingesteld (certainty oriented). Zij worden onzeker als er in de discussie verschillende perspectieven en oplossingen naar voren komen. Maar dat is geen argument om deze kinderen kant en klare modellen en strategieën aan te bieden waarvan zij de betekenis niet doorzien. Ook zwakke rekenaars hebben recht op inzichtelijk leren en een aangepaste didactiek.

Tot slot

De afgelopen maanden laaide de discussie weer op over de gevolgen van de omslag naar het realistisch reken-wiskundeonderwijs voor het leren van de wiskunde als discipline. De tegenstanders van realistisch reken-wiskundeonderwijs doen dit af met onechte wiskunde, omdat wiskunde als discipline de wetenschap van bedachte structuren en relaties is, die als zodanig niet met de ervaring en empirie te maken zou hebben (vgl. Keune, 1998). De resultaten van het beschreven onderzoek laten zien dat realistisch reken-wiskundeonderwijs, onderwijs dat aangrijpt in betekenisvolle situaties, wel degelijk tot het construeren van wiskundige relaties kan leiden, juist omdat het inzet op mathematiseren als activiteit (Treffers, 1987; Freudenthal, 1991; Nelissen, 1998; Gravemeijer & Terwel, 2000; Terwel, 2002). Daar profiteren sterke rekenaars van. En daar profiteren ook de zwakke rekenaars van, wanneer we ze niet in verwarring brengen door andere reken-wiskundeonderwerpen als kant-en-klare producten te presenteren.

Ronald Keijzer is Pabo-docent en medewerker van het Freudenthal Instituut als coördinator van het Panamaproject, een netwerkproject voor de basisschool.
Jan Terwel is hoogleraar Onderwijspedagogiek aan de Faculteit der Psychologie en Pedagogiek van de Vrije Universiteit Amsterdam.

Literatuur

Bokhove, J., K. Buys (ed.), R. Keijzer, A. Lek, A. Noteboom & A. Treffers (1996). *De Breukenbode. Een leergang voor de basisschool* (werkbladen en handleiding). Enschede/Utrecht: SLO/FI/Cito.

Bruner, J. (1996). *The Culture of Education.* Cambridge, MA/London, UK: Harvard University Press.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics as to be useful? *Educational Studies in Mathematics, 1*(1), 3-8.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education, China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K.P.E. & J. Terwel (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies, 32*(6), 777-796.

Gravemeijer, K.P.E. (2001). Reken-wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw. Utrecht: Universiteit Utrecht (oratie).

Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 170-218.

Kenelly, J. (2000). *When machines do mathematics, what do mathematics teachers do?* Paper gepresenteerd op de ICME-9 te Tokyo.

Keijzer, R. (2003). *Teaching formal mathematics in primary education* (dissertatie). Utrecht: CD-β-press.

Keune, F.J. (1998). *Naar de knoppen* (oratie). Nijmegen: KUN.

Kohnstamm, P.H. (1948). *Keur uit het didactisch werk.* Groningen: J.B. Wolters' Uitgeversmaatschappij.

Lakatos I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

McIntosh, A., B.J. Reys & R.E. Reys (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8.

Nelissen, J.M.C. (1998). Representaties in het reken-wiskundeonderwijs. *Pedagogische Studiën*, 75, 169-183.

Romberg, Th.A. (1994). Classroom Instruction That Fosters Mathematical Thinking and Problem Solving: Connections Between Theory and Practice. In: Alan H. Schoenfeld (Ed.). *Mathematical thinking and problem solving*. Hilldale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 287-304.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: Douglas A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmilian Publishing Company, 334-370.

Sierpinska, A. & S. Lerman (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. In: Alan J. Bishop, Ken Clements, Christine Keitel, Jeremy Kilpatrick & Colette Laborde (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education (part 2).* Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 826-876.

Terwel, J. (2002). Curriculumdifferentiatie en leren denken: een onderwijspedagogisch perspectief. *Pedagogische Studiën, 79* (3), 192-211.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – the Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.