Thijs Notenboom was bij de herdenkingsbijeenkomst van Herman Duparc. Hij hoorde aldaar een probleem van Duparc en ging ermee aan de slag: het probleem werd gegeneraliseerd. Houd pen, papier of Cabri bij de hand; u wordt uitgedaagd zelf aan de slag te gaan.

Een oud probleem gegeneraliseerd

Op 19 februari 2003 werd in de aula van de Technische Universiteit van Delft een bijeenkomst gehouden ter herdenking van Herman Duparc. Professor W.L. van de Poel noemde in zijn bijdrage een meetkundeprobleem dat Herman hem ooit had voorgelegd.
Het probleem was het volgende: met het hoekpunt *A* van een scherpe hoek als middelpunt wordt een cirkel getekend. De cirkel snijdt de benen in *B* en *C*. Met *B* als middelpunt wordt weer een cirkel met dezelfde straal getekend; die snijdt het verlengde van *AC* in *D*. Evenzo een cirkel met *C* als middelpunt die het verlengde van *AB* in *E* snijdt. Dan weer een cirkel met *D* als middelpunt die het verlengde van *AE* in *F* snijdt en ten slotte een cirkel met *E* als middelpunt die het verlengde van *AD* in *G* snijdt. Alle cirkels hebben dezelfde straal. Gegeven is nu dat *FG* even lang is als de straal van de cirkel. Bewijs dat de hoek bij *A* gelijk is aan π/7 (figuur 1).

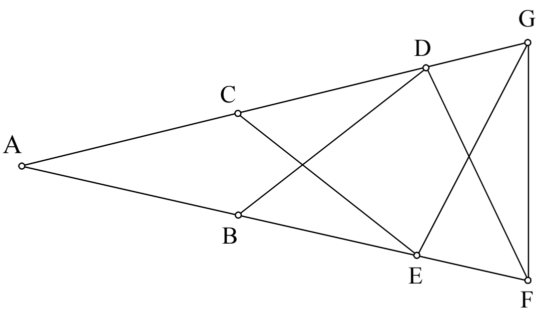


fig. 1

Als u het leuk vindt om er eerst zelf aan te rekenen, dan moet u het blad nu terzijde leggen.

In het onderstaande ‘stripverhaal’ wordt bewezen dat de hoek bij *A* gelijk is aan π/7 (figuur 2).
Terwille van de duidelijkheid is een aantal lijnen weggelaten. De driehoek is nu opgedeeld in drie gelijkbenige driehoeken. Uit de grootte van de hoeken van de bovenste is direct de grootte van de hoeken van de middelste driehoek af te leiden. Daaruit volgt direct de grootte van de hoeken van de onderste driehoek.
Omdat de hele driehoek ook gelijkbenig is moeten de ba-

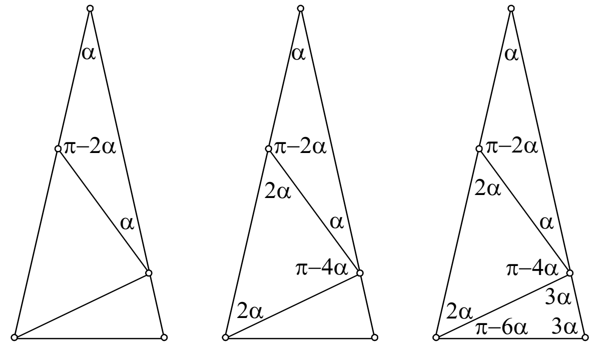


fig. 2

sishoeken gelijk zijn, dus:

$$2\alpha + \pi - 6\alpha = 3\alpha \text{ en dus } \alpha = \pi/7.$$

Het oplossen van een probleem en het bestuderen van een figuur roept vaak nieuwe problemen en vragen op. In de figuur die in het eerste deel van het artikel getekend is, waren zeven stukjes even lang en de hoek moest daarbij π/7 zijn. Is het toeval: beide 7?? Dat vraagt om verder onderzoek. Om te beginnen hebben we bij drie gelijke stukjes een gelijkzijdige driehoek en dan is de hoek π/3. Dat klopt dus. Dan het geval van vijf even lange stukjes. In dat geval hebben we de (bekende?) gelijkbenige driehoek met een tophoek van π/5 (met de gulden snede) ofwel een taartpunt uit een regelmatige tienhoek (figuur 3).

Als u het leuk vindt om het eerst zelf te onderzoeken dan kunt u het blad nu terzijde leggen. Een generalisatie naar (2n+1)-lijnstukjes die even lang zijn, ligt voor de hand. Die generalisatie blijkt correct te zijn. De tophoek moet in die gevallen gelijk zijn aan π/(2n+1). Dat is op eenzelfde manier te bewijzen met een algemener stripverhaal.
Toch blijft de vraag: zit er een meetkundige generalisatie achter? Bij drie hebben we een gelijkzijdige driehoek, bij vijf hebben we een driehoek die in de regelmatige vijfhoek past …
Weer een gelegenheid om het tijdschrift ter zijde te leggen en zelf aan de slag te gaan.

Inderdaad is het probleem naar regelmatige (2n+1)-hoeken te vertalen.
Neem in zo'n regelmatige (2n+1)-hoek één vast hoekpunt en trek alle koorden vanuit dat hoekpunt naar de andere hoekpunten. In dat vaste hoekpunt heb je dan (2n-1)-hoeken die elk gelijk zijn aan $\pi/(2n+1)$. Dat is eenvoudig in te zien met behulp van de omgeschreven cirkel en de stelling over omtrekshoeken op koorden.
Dan is het verder een kwestie van vouwen. Je kunt het in gedachten doen, maar het is veel aardiger om met behulp van bijvoorbeeld Cabri een regelmatige zevenhoek te tekenen en die te vouwen volgens de volgende procedure: noem de hoekpunten van de negenhoek *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*,

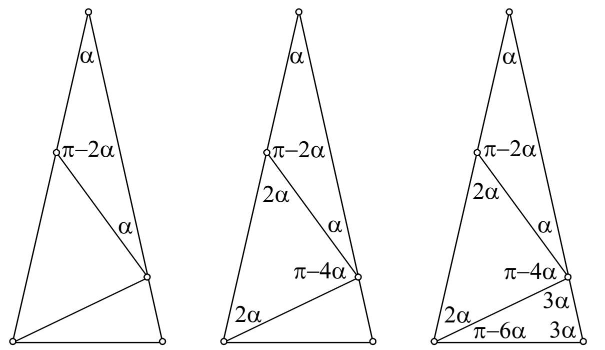


fig. 3

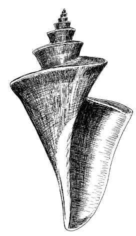
G, *H* en *I*. Neem *A* als vast hoekpunt en trek *AC*, *AD*, *AE*, *AF*, *AG* en *AH*. Vouw het rechterdeel van de negenhoek (*ABCDEA*) om diagonaal *AE*. Daarbij komt *AD* op *AF* te liggen. Vouw vervolgens vierhoek *ABCD* weer terug om *AD*, enzovoort. Als je de negenhoek hebt getekend op een stuk papier dat aan de achterzijde een andere kleur heeft dan aan de voorzijde, dan krijg je een verrassend resultaat.
De vraag blijft natuurlijk wel: als je uitgaat van de figuur van het probleem zoals Herman Duparc het stelde en je vouwt die uit op eenzelfde manier zoals hierboven de negenhoek naar binnen gevouwen wordt, krijg je dan automatisch een regelmatige negenhoek? Dat de zijden van de veelhoek allemaal even lang zijn, dat is vanzelfsprekend, maar hoe zit het met de hoeken? Dat bewijs laat ik over aan de lezer.

Tot slot: generaliseren is iets waar wiskundigen altijd voor in zijn. Vaak wordt het dan ingewikkeld. Niet-wiskundigen en ook collega-wiskundigen vragen zich dan af of dat genereliseren nu zo nodig is.
Dat het resultaat van generaliseren verrassend kan zijn en ook een mooi inzicht kan geven in het originele probleem is hopelijk duidelijk geworden in dit artikel.

Thijs Notenboom, Archimedes Lerarenopleiding, Utrecht

De tiende Nationale Wiskunde Dagen

Op 6 en 7 februari 2004 worden de Nationale Wiskunde Dagen gehouden in Congrescentrum De leeuwenhorst te Noordwijkerhout. Omdat het de tiende keer is zullen de dagen een extra feestelijk tintje krijgen.



Kosten per persoon: e 310,- bij overnachting op een tweepersoonskamer, e 340,- bij overnachting op een eenpersoonskamer. Deelname aan de NWD kan door de school betaald worden uit nascholings- en professionaliseringsgelden.

De thema's die op deze NWD aan bod komen zijn:
– wiskunde om de wiskunde: getaltheorie
– optimale wiskunde
– wiskunde: denken door doen
– wiskunde en rekenwerk: het jaarthema van Pythagoras
– wiskunde, kunst en cultuur
– wiskunde en risico's
– wiskunde en didactiek
– wiskunde voor BAVO en VMBO

Begin september wordt de programmafolder met aanmeldingsformulier naar de scholen gestuurd. Bovendien ontvangen de deelnemers van de afgelopen NWD een folder op naam op hun huisadres.
U kunt ook zélf een workshop verzorgen op de NWD. Een deskundige jury maakt een keuze uit de ingediende voorstellen. De beloning is gratis deelname aan de NWD. Meer informatie vindt u in de programmafolder.

Nam u vorig jaar niet deel aan de NWD, maar wilt u wel graag een folder op naam ontvangen, stuur dan uw adresgegevens naar NWD, t.a.v. Ank van der Heiden, Freudenthal Instituut, Postbus 9432, 3506 GK Utrecht.
Per e-mail (nwd@fi.uu.nl) of fax (030-2660430) kan ook. Het webadres van de NWD is www.fi.uu.nl/nwd.