

De strijd tussen de factormethode en de binaire methode om de kortste optelketens te vinden. Dat hield de deelnemers van de wiskunde B-dag precies één dag bezig. **Aad Goddijn** hield het langer bezig, de werkstukken doorzoekend naar mooie wiskunde. Zó lang dat de puzzelrubriek weer in september verschijnt ...

1 + 1 = 2 en hoe nu verder?

Wat is de wiskunde B-dag?

Gepost op <http://forum.fok.nl>, door 'douchekop', 22 november 2002:

Alle vwo-ers met WiB12 kennen het wel, de wiskunde B-dag. Ook bij ons op school wordt dit evenement gehouden. Bij ons telt het verslag zelfs voor 20% mee op het examen! Verslag maken over een van tevoren niet bekende wiskundige opdracht.

Het verslag moet je in groepjes van drie of vier maken en wordt nationaal ingeleverd. De tien beste winnen een prijs. Scholen mogen zelf weten of ze meedoen en of ze er verder nog iets mee doen.

Klopt. Ter aanvulling: HAVO 5 mag ook mee doen.

Het ging om de vierde wiskunde B-dag, 29 november 2002, waarvan de prijsuitreiking plaatsvond op 17 maart 2003.

De opgaven voor de wiskunde B-dagen hebben een typisch wiskunde B-karakter, maar sluiten niet noodzakelijk dicht aan bij het bestaande leerplan. Zelf onderzoeken is bij de wiskunde B-dag belangrijker dan etaleren van kennis. Veel scholen gebruiken de wiskunde B-dag opgave als praktische opdracht, zoals douchekop meldt.

Deze keer deden 540 teams aan de wedstrijd mee; dat wil zeggen dat ze de opdracht op de vastgestelde dag binnen de vastgestelde tijd deden en resultaten instuurden. De beoordeling gaat in twee rondes. Docenten van de deelnemende scholen maken onderling in pools een selectie. Een centrale jury bepaalt de eindvolgorde van de tien beste teams.

Nu eerst hulde voor het winnende team: Michiel van Dam, Michael Furtado, Bram Gorissen en Martijn van der Klis van het Groene Hart Lyceum, Alphen aan de Rijn.

Het juryrapport stelt:

Het werkstuk van dit team onderscheidt zich door de volwassen wiskundige stijl waarin het wordt gepresenteerd. Eigen veronderstellingen bij met name de factormethode worden helder geformuleerd en het onderzoek naar de juistheid van deze veronderstellingen wordt onderbouwd



Het winnende team

met inzichtelijke en correcte bewijzen. Daarnaast wordt een verstandige uitleg gegeven over de maakbaarheid van elk natuurlijk getal met behulp van de verdubbelingsmethode. Hoewel een nadere afbakening van onder- en bovengrens niet aan bod komt, acht de jury bovenstaande argumenten sterk genoeg om dit werkstuk de eerste plaats bij de Wiskunde B-dag 2002 toe te kennen.

Het beste team, dat is betrekkelijk relatief. De werkstukken verschillen behoorlijk, ook wat betreft gekozen inhoud en accenten. Absolute normen bestaan hier niet en het poolindelingssysteem maakt het mogelijk dat een middenklasser van pool A beter is dan een winnaar uit pool B. Tja, niets aan te doen. Ik heb steekproefsgewijs in de grote doos niet-finalisten gekeken en ook daar trof ik een hoop gouden ideeën aan. En een hoop missers, net als bij de 'toppers'. Het enthousiasme van de inzendende onderzoekers was in ieder geval wel vergelijkbaar: hoog. In dit artikel staat (wiskundige) achtergrondinformatie bij de opgave, aan de hand van inbreng van de leerlingen; op die manier is ook bij de prijsuitreiking een en ander gepresenteerd voor de (extreem aandachtige) winnaars. Aan het eind komen docenten en leerlingen aan het woord over aard van de opgave en werkwijze van de leerlingen.

De opgave van 2002

Het probleem van de wiskunde B-dag 2002 lijkt bedrieglijk simpel.

Het is een rekenspelletje. U krijgt een getal, bijvoorbeeld 23. U moet dat getal maken door te beginnen bij 1 en verder optellingen maken met dat begingetal 1 en getallen die al gemaakt zijn. $1 + 1$ is de enig mogelijke eerste zet. Dat levert 2. Nu kan 4 (als $2 + 2$) of 3 (als $1 + 2$) gemaakt worden en daarna 5, 6 of 8, dat hangt af van de eerdere keuze voor 3 of 4. Zo ontstaat bijvoorbeeld het rijtje

$$\begin{aligned}1 + 1 &= 2 \\2 + 2 &= 4 \\4 + 4 &= 8 \\8 + 8 &= 16 \\16 + 4 &= 20 \\20 + 2 &= 22 \\22 + 1 &= 23\end{aligned}$$

Er is een *optelketen* voor 23 gemaakt. Het aantal benodigde optellingen (waar de verdubbelingen ook onder vallen) is bij deze keten 7. We noteren optelketens voortaan kort als de eerste 1, gevolgd door de serie tussenuitkomsten, besloten met het doelgetal:

$$1, 2, 4, 8, 16, 20, 22, 23.$$

De bedoeling is natuurlijk het aantal optelstappen zo klein mogelijk te houden. Dit is dus niet zo handig:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 21, 22, 23$$

maar dit is subtiel gevonden en beter:

$$1, 2, 4, 5, 9, 18, 23$$

Want nu blijkt het ook met zes optelstappen te kunnen! Voor het getal 23 is hier zelfs *een kortst mogelijke* optelketen gegeven. Niet 'de kortste', want er zijn er nog drie met dezelfde lengte; in het voorgaande is ook bepaald nog niet bewezen dat het een kortst mogelijke is.

Wie na deze twee ketens naar 23 nog niet overtuigd is dat het moeilijk kan zijn, moet een optelketen met 9, of beter nog met 8, optellingen naar 77 proberen te maken. Na zelf worstelen met dit voorbeeld krijgt u de sfeer wel te pakken. (Ergens in dit artikel staan oplossingen.)

De opgave van de wiskunde B-dag had als titel

$$1 + 1 = 2 \text{ en hoe nu verder?}$$

en de bedoeling van de opgave is na deze inleiding wel duidelijk:

In deze Wiskunde B-dag opdracht ga je op zoek naar zo kort mogelijke optelketens voor natuurlijke getallen.

De volledige opgave is te vinden op de website van de Wiskunde B-dag: <http://www.fi.uu.nl/wisbdag/>.

Na een serie inleidende opgaven die enkele basistechnieken op het gebied van de optelketens introduceren, wordt eigen initiatief gevraagd.

Geschiedenis

De oorsprong van het probleem heeft meer met snel berekenen van hoge machten van een getal te maken dan met optellen. Even terug in de tijd dus.

Van de filosofie van de Jaina, een religieuze beweging uit het Indië van 600 voor Christus, wordt verteld, dat ze grote belangstelling had voor het oneindige, vaak uitgedrukt in visies op de wereld waarin hoge machten van getallen voorkomen. Zoals dat er 2^{96} mensen zullen zijn. De Jaina kosmologie kent een periode van 2^{588} jaar.

Zouden we het getal 2^{588} expliciet willen berekenen, dan zijn geen 587 vermenigvuldigingen met het getal 2 nodig; het zogenaamde 'Indisch' machtsverheffen berekent slechts de volgende 12 machten om bij 2^{588} te komen: $2^1, 2^2, 2^4, 2^8, 2^9, 2^{18}, 2^{36}, 2^{72}, 2^{73}, 2^{146}, 2^{147}, 2^{294}, 2^{588}$

De exponenten vormen een optelketen naar 588!

12 in plaats van 587 vermenigvuldigingen, een behoorlijke verbetering. Er mag aan getwijfeld worden of een berekening via de korte optelketen bij de praktische uitwerking niet tóch arbeidsintensiever uitvalt, de forse kwadrateringen aan het eind vragen immers veel meer inspanning dan de vermenigvuldigingen met 2. Maar in de moderne toepassingen van optelketens gaat het vaak om vermenigvuldigingen en kwadrateringen die wel 'globaal' even ingewikkeld zijn. Bijvoorbeeld het berekenen van hoge machten *modulo een vast getal*. In de cryptografie en bij het comprimeren van beeldbestanden komt dat veel voor. Daarmee zijn meteen enkele van de moderne toepassingsgebieden van het maken van optelketens genoemd.

Verslaat Wis-B de oude Indiërs?

Maar wat is nu het probleem als dat Indische algoritme er al is? Dat geeft toch zonneklaar het minimum aantal stappen om een hoge macht uit te rekenen? Zoveel mogelijk verdubbelingsstappen nemen en dus winnen. Veel deelnemers aan de wiskunde B-dag weten wel beter!

We analyseren de Indische methode wat nader. Hoe wordt die optelketen van exponenten eigenlijk gevonden?

Het makkelijkst gaat dat door werken van achteren af.

Je bereikt 588 vanaf de helft, vanaf 294. 294 bereik je net zo door verdubbelen van 187. Maar 187 wordt bereikt met een optelstapje: $187 = 186 + 1$. 186 weer vanaf 93, de helft van 186, enzovoort, tot $2 = 1 + 1$.

Het van achteren af werken is niet in de wiskunde B-opgave aangegeven. Toch komen groepjes leerlingen met het volgende algoritme om (goede) optelketens te vinden: *Het getal dat je wilt gebruiken noem je n. Dat getal doe je keer 1/2, als dat niet kan keer 2/3, als dat niet kan keer 4/5, als dat niet kan moet je 1 aftrekken, het getal dat je dan krijgt moet je dezelfde berekeningen laten ondergaan, totdat je bij 1 uitkomt.*

Toegepast op 588, levert dat de achterwaarts opgeschreven keten:

$$588, 294, 147, 98, 49, 48, 24, 12, 6, 3, 2, 1.$$

Mooi één stap minder dan de oude Indiërs presteerden. Bij de prijsuitreikingpresentatie werd dit vermeld en betreffende leerlingen glommen van trots.

En wie zou ook niet geloven dat het algoritme van de leerlingen met de extra frase *als dat niet kan keer 2/3, als dat niet kan keer 4/5*, nooit slechter zal uitpakken dan de Indische methode? Ik denk dat de jury dat ook vond, want er was hier geen commentaar, slechts lof.

Alweer mis! Tijdens het uitschrijven van dit artikel probeer ik een en ander nog eens uit. Bij $n = 31$ wint het Indisch algoritme, bij $n = 33$ winnen de wiskunde B-ers. Maar de stand is niet gelijk; als we de computer voor de range $1 - 100000$ de wedstrijd laten doorspelen, vinden we dat de Indische methode bij 15148 getallen minder stappen nodig heeft dan de wiskunde B-ers, in totaal 21457 stappen, terwijl andersom die aantallen 66117 en 146289 zijn. Lof dus voor de toevoeging van het team van het Greijdanus College in Zwolle. Terecht? Vermoedelijk wel, maar nog onbewezen.

Dit voorbeeld geeft ook weer aan hoe ingewikkeld het probleem in feite is en laat ik de lezer dan ook maar definitief uit de droom helpen. In 1981 is bewezen dat een algoritme voor het bepalen van een kortste optelketen voor een natuurlijk getal een NP-volledig probleem is; dat betekent dat een goed algoritme voor dit probleem ‘omgebouwd’ kan worden naar een goed algoritme voor bijvoorbeeld het beruchte handelsreizigersprobleem. Anders gezegd: de lastigheid van het probleem staat ‘bewezen’ buiten kijf. Zie Downey e.a. (1981).

Definities

Hier zijn twee nauwkeurige definities, die omschrijven waar we het eigenlijk over hebben.

Een *optelketen* voor een natuurlijk getal n is een eindig, stijgend rijtje natuurlijke getallen a_0, a_1, \dots, a_r met de volgende eigenschappen:

$$a_0 = 1,$$

$$a_r = n,$$

Voor alle $k, 1 < k \leq r$ bestaan i en $j, 1 \leq i, j < k$,

$$\text{met } a_k = a_i + a_j.$$

De (additieve) *complexiteit* $c(n)$ van een natuurlijk getal n is de lengte minus 1 van een kortst mogelijke optelketen voor n . ($c(n)$ is dus de minimaal mogelijk waarde van r uit de definitie.)

De complexiteit van n gaven we in de WisB-dag opgave aan met $c(n)$. (In de literatuur is $l(n)$ gebruikelijker.)

Leerlingen hadden vaak moeite met het juist hanteren van de definitie van $c(n)$: het aantal bewerkingen van *een kortst mogelijke* optelketen voor n . Ze spreken regelmatig over ‘de $c(n)$ ’ van een niet per se kortste optelketen die n bereikt. Fraai is dat niet, maar de feitelijke wiskundige acties leken er niet direct door in het geding te komen. Er wordt namelijk steeds wel gezocht naar zo kort mogelijke ketens. Blijkbaar is het voor deze leerlingen niet zo, dat een definitie zomaar overgenomen wordt en een gereedschap voor bereiken van helderheid wordt. Het is didactisch beter een definitie zelf (of samen) op te stellen, maar

binnen de situatie van de WisB-dag gaat dat niet zomaar, helaas.

Een voorbeeld van het misbruik is dat veel leerlingen met groot gemak bewezen dat voor alle natuurlijk getallen n geldt dat:

$$c(2n) = c(n) + 1.$$

Zo’n bewijs loopt dan zo: Als je een optelketen hebt voor een getal n , heb je er ook een voor $2n$, die een stap langer is, namelijk de laatste verdubbelstap.

Dat dit slechts bewijst dat $c(2n) \leq c(n) + 1$, omdat er mogelijk andere optelketens naar $2n$ leiden, die niet via n lopen, is subtiel. En het resultaat van de redenering ligt zo voor de hand. De bewering is dan ook al eerder, in 1894, in een gezaghebbend tijdschrift ‘bewezen’, door E. de Jonquières. Het blijft fout, want ... $c(382) = c(191) = 11$, al valt het niet mee dat uitputtend aan te tonen!

De binaire methode

In de opdracht worden twee technieken voor het maken van optelketens specifiek genoemd en onderzocht.

De eerste is de meest voor de hand liggende methode, die we in het begin al bij $n = 23$ hebben laten zien:

$$1, 2, 4, 8, 16, 20, 22, 23.$$

Verdubbelen tot het geen zin meer heeft en daarna een geschikt stel eerdergemaakte 2-machten optellen om bij het doel te komen. 23 ontstaat dan als som van 2-machten: $16 + 4 + 2 + 1 = 23$. De methode heet de *binaire* methode, vanwege het verband met de binaire schrijfwijze: $23 = (1\ 0\ 1\ 1\ 1)_2$.

In de opdracht werd de vraag gesteld of met de binaire methode voor elk getal een optelketen kon worden gevonden.

Ja natuurlijk, noteerden diverse teams. Verdubbel maar tot het niet meer kan en dan kun je altijd met tweemachten aanvullen tot het doelgetal, *want het getal 1 is er al en dat is óók een tweemacht*.

Verwacht werd natuurlijk dat uitgelegd zou worden waarom het altijd lukt met optellen van *verschillende* tweemachten zoals bij het tweetallig stelsel; dat was niet gezegd, en het ‘bewijs’ wees de opgavenmaker op die omissie. Aardig is dat in de toelichtende voorbeelden de leerlingen weer wél het optimale gebruik van de eerdere machten laten zien, uiteraard omdat het bij expliciet maken van ketens om zoeken naar korte ketens gaat. Bijvoorbeeld voor 1308, inclusief kleine toelichting:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, \\ 1024, 1280 (= 1024+256), 1296, 1304, 1308.$$

Een interessant bewijs dat elk natuurlijk getal som is van verschillende twee machten, komt uit een van de werkstukken (weer het Greijdanus College):

We gaan nu onderzoeken of je met deze methode alle getallen kan bepalen.

Omdat 1, 2 en zo 3, 4 en zo 5, 6 en 7 mogelijk zijn en 8

ook, is $8 + (1 \text{ t/m } 7)$ ook mogelijk en omdat 16 mogelijk is, is $16 + (1 \text{ t/m } 15)$ ook mogelijk. Zo kunnen alle getallen beredeneerd worden als optellingen van machten.

Het bewijs is een mooi voorbeeld van volledige inductie; spontaan in de wedstrijd tot stand gekomen, niet volgens de standaardformulering van het principe, maar bijzonder helder. Het is nog maar de vraag of zoiets bedacht kon worden als deze leerlingen een wat strengere behandeling van het Principe van Volledige Inductie in hun schoolloopbaan hadden ondergaan,

Getallen van de vorm $2^n - 1$ doen het slecht met deze methode, alle getallen $1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}$ zijn in het opteldeel van de methode nodig. Veel leerlingen vinden dat de optelketen voor zulke getallen $2n - 2$ stappen heeft. Notaties als $c(2^n - 1) = 2n - 2$ nemen we maar even voor wat ze zijn: fout, maar wat bedoeling betreft heel duidelijk.

De factormethode

Een tweede methode werd aangeboden via het voorbeeld voor het getal 15, binair zo bereikt: 1, 2, 4, 8, 12, 14, 15. Het kan korter:

1, 2, 3, 6, 12, 15.

In de eerste keten wordt vanaf '3' verder gewerkt met veelvoud van 3. Eigenlijk wordt de structuur van een optelketen voor het getal 5 gebruikt als model om van 3 naar 15 te komen.

Door de teams worden veel voorbeelden gegeven om te laten zien dat de factormethode kortere ketens kan leveren dan de binaire methode. Als voorbeelden werden 63 en 1023 aangereikt, en op grond daarvan werden ook grotere getallen van de vorm $2^n - 1$ onderzocht om getallen te vinden waarbij de factormethode een winst van 8 stappen levert op de binaire methode.

Hier is een fors fragment uit het werkstuk van het team van het Ichtus-College in Veenendaal:

We hebben geprobeerd:

63: $2^6 - 1$ verschil 2 (tussen factoren en verdubbelen)

1023: $2^{10} - 1$ verschil 4 (tussen factoren en verdubbelen)

We moeten een verschil van 8 bereiken tussen de factormethode en de verdubbelingsmethode. Eerst tot de macht 6, en dan tot de macht 10. Het verschil in de machten is 4. Dus bij verdubbeling van het verschil, dan is 2^6 naar 2^{10} gegaan, verschil in de macht is 4.

De conclusie is dat $16383 = 2^{14} - 1$ een goede kandidaat is om verschil 8 te bereiken.

De verdubbelingsmethode voor $2^{14} - 1$ levert een keten met lengte 26. De factormethode verschijnt hier als:

1, 2, 3, 5, 10, 15, 30, 60, 120, 240, 480, 960, 1290, 3840, 7680, 15360, 16380, 16383.

Deze variant levert slechts 18 stappen op.

Het vereiste resultaat is inderdaad behaald, een felicitatie waard. Er is vanuit factor 5 (van 16380!) gewerkt naar 16380 en dan is er nog eens 3 bij opgeteld. Dit is niet de zuivere factormethode! Een ander team (Trevianum Scholengroep, Sittard) merkt overigens expliciet op dat het soms beter is niet alleen naar $n = a \times b$, maar ook naar splitsingen als $n = a \times b + c$ te kijken. Slim. En tijdvreterend! Het Jac. P. Thijsse College (zesde plaats) werkt met de ontbinding 127×129 :

1, 2, 4, 7, 8, 15, 30, 60, 120, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064, 8128, 16256, 16383.

Dat is 18 stappen, de winst is hier vooral behaald door de slimmer-dan-binaire keten naar 127 te vinden. Bedenk dat 127 priem is!

De factor 127 is waarschijnlijk niet door systematisch proberen delen gevonden, want dit werkstuk meldt dat er gezocht moet worden naar 'factoren die dichtbij elkaar liggen' en geeft een lijstje, voorzien van enig commentaar:

$$2^{10} - 1 = 1023 = 31 \times 33$$

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89 \quad (\text{niet dicht genoeg bij elkaar})$$

$$2^{12} - 1 = 4095 = 63 \times 65 \quad (\text{verschil is maar 7 stappen})$$

$$2^{13} - 1 = 8191 \quad (\text{priem})$$

$$2^{14} - 1 = 16383 = 127 \times 129.$$

Bij de voorbereiding van de opgave was wel bedacht dat met getallen van de vorm $2^{2n} - 1$ eer te behalen was.

Zuiver binair zijn $4n - 2$ stappen vereist.

Na factoriseren, $2^{2n} - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$, vinden we zeker (binaire methode) een keten met $2n - 2$ stappen bij de eerste factor en $n + 1$ stappen voor de tweede. Samen is dat $3n - 1$ stappen en daaruit volgt dat de winst $n - 1$ stappen is. Zo zou pas bij $2^{18} - 1$ een verschil tussen factormethode en binaire methode optreden, maar de methode garandeert ook dat het verschil onbegrensd groot kan worden gemaakt.

De factormethode is geschikt om een bijzondere eigenschap van de functie $c(n)$ te laten zien. Diverse teams hebben dat gedaan. Aan de hand van een voorbeeld licht ik het idee toe: het getal 77.

Snel naar 11: 1, 2, 4, 8, 10, 11

Snel naar 7: 1, 2, 4, 6, 7

Dus zo naar 77: 1, 2, 4, 8, 10, 11, 22, 44, 66, 77.

11 wordt in 5 stappen bereikt, 7 in 4. 77 wordt in $5 + 4$ stappen bereikt.

Leerlingen 'bewijzen' hiermee $c(a \times b) = c(a) + c(b)$. De fout in de redenering is al gemeld. Wat wel geldt is slechts:

$$c(a \times b) \leq c(a) + c(b)$$

En \leq zal nooit = worden, want 1, 2, 4, 8, 9, 17, 34, 43, 77.

Eén stap minder dan de factormethode, tevens het antwoord op de uitdaging in het begin van dit artikel!

Toppers kiezen hun factoren voor 8127

Belangrijk punt bij de factormethode is het kiezen van een geschikte splitsing in twee factoren, want er zijn er vaak meer. Veel teams waren tevreden met een keus die tot beter resultaat dan de binaire methode leidde, sommige teams hadden ook theorieën over de juiste keuze.

Een team (Dr. Aletta Jacobs College, Hoogezand) leverde een computerprogramma om de beste factorisatie op te zoeken.

Zoals in het juryrapport is te lezen, kwamen de prijswinnaars hier met originele ideeën.

Vastgesteld werd dat er drie priemfactoren in 8127 zijn: 3, 7 en 43; en dat de kortste optelketen langs 7 gaat. Na dat (experimenteel gevonden) resultaat werd toch nog de waarom-vraag gesteld. Klasse!

1, 2, 3, 6, 7, 14, 28, 56, 112, 224, 448, 896, 1792, 3584, 7168, 8064, 8120, 8127 [17 stappen]

Waarom is de snelste oplossing via 7 en niet via 43?

Je moet zoeken naar het getal dat n door verdubbelen het beste benadert zonder dat de verdubbeling over n heen gaat. Bij 8127:

Bij 43 stopt de verdubbeling bij 5504 en bij 3 bij 6144. Bij 7 echter pas bij 7168. Dit is het dichtste bij het gezochte getal n dus hoef je nog maar zo weinig mogelijk bewerkingen uit te voeren na het verdubbelen, waardoor deze methode dus het snelste is. [...]

Uit de vorige beredenering blijkt:

Voor de snelste methode om bij een getal n te komen moet er niet gekeken worden naar de grootste priemfactor, maar naar de priemfactor die je door verdubbelen het dichtste tot n kunt laten naderen.

Wat betreft explicitering van vermoedens op grond van experimenten was deze groep duidelijk top, al is de beperking tot priemfactoren niet zo verstandig. Let op het Jac. P. Thijsse team, dat voor factor 63 koos:

1, 2, 4, 8, 9, 18, 36, 54, 63, 126, 252, 504, 1008, 2016, 4032, 8064 8127

We hebben de factor uit de factor genomen. De ketting wordt dan heel erg kort, waardoor de complexiteit ook heel klein wordt. De optelreeks bevat zo min mogelijk verschillende getallen. De kleinste complexiteit is dus 16.

De factor uit de factor: 9 gebruiken als tussenstation voor 63. Perfect, twee stappen beter dan de prijswinnaars.

Maar of echt geldt $c(8127) = 16$?

Schattingen met $2^{\log n}$

Het grootste getal dat met een optelketen van k stappen te bereiken is, is 2^k . Uit $c(2^k) = k$ kan worden afgeleid dat voor alle natuurlijke getallen geldt:

$$2^{\log n} \leq c(n).$$

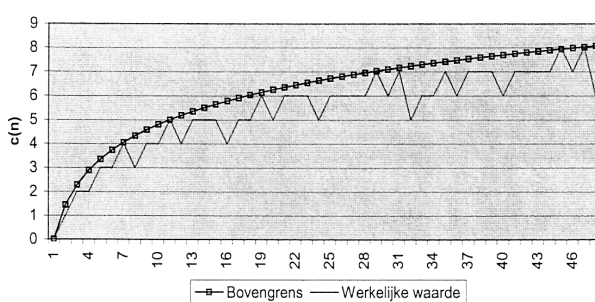
We hebben al eerder gezien dat $c(2^k - 1) \leq 2k - 2$.

Diverse teams vonden uiteindelijk de volgende onder- en bovenschatting, die voor alle natuurlijke n geldt:

$$2^{\log n} \leq c(n) \leq 2 \cdot 2^{\log n}.$$

Dat mag bijzonder genoemd worden, want dergelijke afschattingen bij grillige functies, essentieel onderdeel van de getaltheorie, zullen voor de meeste leerlingen volkomen nieuw zijn geweest.

Bij het begin van de opdracht werd gevraagd $c(n)$ te bepalen voor $n = 1, \dots, 30$. Daaruit bleek duidelijk dat de bovengrens $2 \cdot 2^{\log n}$ aan de hoge kant is. Diverse groepen hebben dan ook met een kleinere constante dan 2 geëxperimenteerd, bijvoorbeeld met 1.5. Vaak werden de keuzes toegelicht met een grafiek. Een fraai exemplaar (Ichtus-College, Veenendaal):



Dit team koos voor $1.45 \cdot 2^{\log n}$. Er is blijkbaar de sterke 'wiskundige behoefte' gevoeld om met een scherpe constante te komen. Verbeteringen van stellingen in de getaltheorie bestaan vaak uit scherpere (bewezen) keuzes van zulke constantes.

Het onderhavige probleem is in dit opzicht echt lastig, en bewijzen zijn hier voor VWO-leerlingen dan ook wel haast onbereikbaar. Neemt niet weg dat het goed is dat leerlingen in deze sfeer experimenteren en ook vermelden dat ze iets vermoeden op grond van experimenten waarvoor ze geen bewijs hebben. De confrontatie van de diverse resultaten bij de prijsuitreiking was hier ook spannend. Helaas moest daar meegedeeld worden dat ondanks de goede bedoelingen de constante 1.45 niet voldeed. Een gevorderde computer had ons er namelijk op gewezen dat $c(71) = 9 \geq 1.45 \cdot 2^{\log 71} = 8.9171333$.

Later meldde Evert Wattel van de vakgroep wiskunde van de Vrije Universiteit dat hij in 1968 had bewezen dat de functie $c(n)/2^{\log n}$ voor $n = 71$ zijn maximum bereikt en dat de scherpste constante dus 1.4634748 is.

Het gedrag van $c(n)$ is grillig, en daarom is het niet uitgesloten dat storende waarden als 71 en misschien nog meer getallen te veel schijn-roet in het eten gooien.

Dat blijkt inderdaad zo te zijn. In 1939 bewees A. Brauer het opmerkelijke feit dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(n)}{2^{\log n}} = 1,$$

Ofwel: als je afziet van een eindig aantal beginwaarden voor n , is elke constante groter dan 1 goed. Je moet natuurlijk naarmate je constante dichter bij 1 ligt, dat 'eindig aantal' ruimer nemen, zeker.

Het bewijs hiervan, toegankelijk genoteerd in het boek van Knuth (1969), maakt gebruik van een representatie van n in het 2^k -tallig stelsel, waarbij k op een handige manier afhankelijk van n wordt gekozen. Zo wordt voor iedere n een optelketen geconstrueerd, waarvan de lengte goed af te schatten is. De restterm in de schatting is verbeterd door Evert Wattel en G. A. Jensen, zie de publicatie waarin ook het getal 71 wordt genoemd.

Evaluatie naar letter en geest

Wat opvalt in de meeste evaluaties die de docenten instuurden was vooral dat de inzet van de leerlingen, hun uitgedaagd zijn door het probleem, hun fanatisme bijna, vaak zo groot was. Kijken we terug naar de werkstukken en eigen observaties van de leerlingen over hun gedrag, voorzover gemeld in afsluitende opmerkingen, dan vallen nog een paar positieve wiskundige attitudes op:

- goed onderscheid vermoeden/bewezen bewering
- veel zoeken en verfijnen
- vindingrijkheid
- oog voor subtiliteit van het probleem.

Je zou kunnen zeggen: de *geest* van de wiskunde is krachtig aanwezig. Van de andere kant moet toch worden gezegd dat er weinig *letter* is:

- bewijzen zijn meestal in getalvoorbeeldvorm gesteld
- expliciete definities worden genegeerd
- er wordt nauwelijks algebra ingezet om beweringen een algemene vorm te geven.

En dat is jammer. Want er zijn talloze plekken in de werkstukken aan te wijzen, waar een vleugje algebra of een strakke formulering met behulp van een helder omschreven begrip een forse duw aan het zoek- en vindproces had kunnen geven. Dat het streng wiskundig formalisme zijn eigen stimulerende kracht heeft, dat is nog niet ervaren.

Maar er is ook een andere kant. De leerlingen gebruiken zelfgekozen middelen die beslist formeel wiskundige vaardigheid vereisen, al is die vaardigheid niet van de vorm ‘haakjes verdrijven’. Bijvoorbeeld:

- het gebruik van spreadsheets met zijn eigen zeer specifieke vorm van variabelen gebruiken
- het maken van een computerprogramma in de scripttaal *php* waar de haakjes je om de oren dazen
- het vaardig gebruik van *ftp* en internet
- het vinden van benadering door middel van experimenteel werken met grafiekenprogramma's
- enzovoort.

Twee reacties hier van leerlingen, die te denken geven. De eerste is uit een werkstuk:

Het is best leerzaam om een keer een hele dag aan wiskunde te zitten. Het totaalbeeld wordt in één keer veel reeler. Het wordt ook duidelijker waar wiskunde nu voor staat en we denken ook dat je door dit soort opdrachten meer handigheid in het toepassen van wiskunde krijgt.

Die positieve waardering voor ‘een hele dag’. Precies dat

is het sterke van de Wiskunde B-dag: hij duurt en is beperkt tot één dag. Georganiseerde tijd om de diepte in te gaan. Na minstens een uur inleidend en voorbereidend gedoe. Maar dan komt het er ook echt uit.

Een andere reactie, van een leerling na de prijsuitreiking: *‘Ik snap niet dat ik hier zit. Op school sta ik een 4 gemiddeld en hij ook.’*

Ja, dat kan blijkbaar. In het daaropvolgende gesprekje bleek dat hij (en hij ook) natuurlijk niet zoveel deed aan wiskunde. Maar het was met al die sommen op school ook zo ongelooflijk saai.

Een minderheid van de docenten (en van het wiskunde B-dag team ook) heeft kritiek op de opgave: te zuiver, te theoretisch, te weinig stimulerende toepassingen of context. Er is ook kritiek op de gestuurdheid van het geheel: toch weer heel wat vragen die je langs moet, en dan pas eigen onderzoek.

Als ik de opgave achteraf doorlees, zeg ik: mee eens. Maar als ik de werkstukken, nu anderhalve maand na de prijsuitreiking nog eens inkijk, twijfel ik. Het is waar dat de feitelijke toepassingen van het vinden van optelketens geen wezenlijke rol spelen, maar leerlingen vallen daar in het algemeen niet over omdat ze het probleem uitdagend vinden. En tussen die gestuurde opgaven door kiezen leerlingen voor veel eigen initiatief.

Van de andere kant geldt ook nog: bij wiskundig onderzoek hoort zeker het je op de hoogte stellen van wat anderen al deden; daarom konden we niet om het aanbieden van de binaire methode en de factormethode heen. De mooiste prestaties van de leerlingen liggen op gebieden waar die methoden op onbekend terrein zijn gebruikt.

Niettemin: de volgende keer wordt het vast weer anders, maar hopelijk niet minder uitdagend!

Aad Goddijn, Freudenthal Instituut, Utrecht

Literatuur

- Brauer, A. (1939). On Addition Chains. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 45, 736-739.
- O'Connor, J.J. & E.F. Robertson. *Jaina Mathematic*; http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Jaina_mathematics.html
- Downey, L. & R. Seth (1981). Computing Sequences with Addition Chains. *SIAM Journal of Computing*, 3, 103-121.
- Flammenkamp, A. *Shortest addition chains*. http://www.homes.uni-bielefeld.de/achim/addition_chain.html
- Knuth, D.E. (1969). *The Art of Computer Programming, Vol. 2: Seminumerical Algorithms*. Reading Mass.: Addison-Wesley, pp. 398-422.
- Team wiskunde B-dag: *1 + 1 = 2 en hoe nu verder, opgave wiskunde B-dag 2002*; <http://www.fi.uu.nl/wisbdag/>
- Wattel, E. & G.A. Jensen (1969). *Efficient calculation of powers in a semigroup. Rapport ZW 1968-001 van de Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam*.