Peter Fitting, docent wiskunde in Moers (D), heeft op het Nijmeegs Colloquium over de didactiek van de wiskunde een vurig pleidooi gehouden om de wiskunde op de middelbare school eerlijk te houden en gebaseerd op de intuïtie van leerlingen. Het wiskundige vuur kan bij komende generaties weer gaan branden als wij, leraren wiskunde, de vlammetjes weer aansteken. In dit eerste deel gaat hij in op definities.

De kunst van het draken doden

> There once lived a man
> who learned how to slay dragons
> and who gave all he possessed
> to mastering the art.
>
> After three years
> he was fully prepared but,
> alas, he found no opportunity
> to practise his skills.
> [*Dschuang Dsi*]
>
> As a result he began
> to teach how to slay dragons.
> [*René Thom*]

Toen ik in 1977 mijn afstudeerscriptie voor de lerarenopleiding schreef citeerde ik dit gedicht, inclusief René Thom's antwoord. Ik vond het in een boek van Bröcker en Jänich dat ik sindsdien kwijt ben.
Ik vond de ironie toen wel grappig: ik had topologie gestudeerd bij professor Hirzebruch aan de Universiteit van Bonn en, eerlijk gezegd, vond ik het leraarschap een stap terug op de academische ladder. Maar onvermijdelijk wegens gebrek aan banen op de universiteiten.
Een paar jaar later ging ik leraren opleiden en begon de schoolwiskunde me zelfs te fascineren op een nieuwe, onverwachte manier en ik had het gevoel dat ik door de Duitse universiteitsdocenten met een mix van meewarigheid en minachting bekeken werd, alsof leraren niets anders doen dan toekomstige studenten voorbereiden op hun studie door ze de elementaire vaardigheden bij te brengen.
Overigens denk ik dat de onverschillige manier waarop Duitse universiteiten omgaan met docenten zich inmiddels tegen hen gekeerd heeft: in plaats van drakendoders leveren ze preparateurs van opgezette dieren af. Experts in het omgaan met dode draken.
Maar ik genoot van het lesgeven. En vele jaren later vind ik het nog steeds leuk. Rainer Kaenders, lerarenopleider in Nijmegen, vroeg me of ik een voordracht wilde houden op het Nijmeegs symposium over de didactiek van de wiskunde met als titel 'Hoe ontvlammen wij het wiskundige vuur bij onze leerlingen?' Ik begreep dat hij bepaalde didactische ontwikkelingen, net als ikzelf, op z'n zachtst gezegd dubieus vond.

Ik zal een poging wagen om het verband te leggen tussen het leren van wiskunde en het leren van draken verslaan. Misschien gaat dat het eenvoudigst aan de hand van een woordenlijst:

Gedicht	Wiskunde
draken	verschillende soorten wiskundige problemen: het zoeken van karakteristieke eigenschappen van objecten en die vervolgens in definities vangen, het ontwikkelen van ideeën over die objecten en van daaruit komen tot het maken van veronderstellingen; het afstand kunnen nemen van ideeën en tegenslagen kunnen incasseren; het analyseren van de oorzaken van die tegenslagen en geduldig verder te zoeken naar de waarheid; het vinden van bewijzen voor veronderstellingen; het kunnen opstellen van stellingen en exacte bewijzen; het toepassen van wiskundige problemen buiten de wiskunde en het helpen zoeken naar oplossingen.
een draak doden	een wiskundig probleem oplossen.
geen gelegenheid hebben om de vaardigheden toe te passen	de uiterst idealistische bovenmenselijke geestestoestand om ieder wiskundig probleem te zien met de overtuiging dat het uiteindelijk wel op te lossen is.
drie jaar	in de Chinese getallenmystiek is dit hetzelfde als een lange tijd, maar moet vertaald worden als 'zeven jaar' in de westerse cultuur en mag zeker niet gezien worden als een oproep om de wiskundige scholing van docenten nog korter te maken.
leren een draak te verslaan	een maatschappelijk geaccepteerde activiteit (hoewel de uitvoerders de neiging hebben te lijden aan het beul-syndroom) die bemoeilijkt wordt door het feit dat de draken nog wel eens willen muteren tot onherkenbare didactische, of zelfs opgezette dieren, met docenten en leerplanontwikkelaars als preparateurs.

In Duitsland bestaat een gezegde dat als je twee leraren bij elkaar brengt ze onmiddellijk beginnen te klagen, lerarentrekjes zogezegd. Het curriculum zit boordevol verplichte nummers, klassen zijn overvol met leerlingen die de basisvaardigheden nauwelijks beheersen en ouders die wel met docenten willen meedenken zolang ze hun droom, een glansrijke academische carrière voor zoon- of dochterlief, maar realiseren.
En dan is er ook nog zoiets als PISA. Het internationale vergelijkend warenonderzoek naar het probleemoplossend vermogen van leerlingen heeft aangetoond dat Duitsland, ondanks haar trots op het schoolsysteem, door veel landen voorbij gestreefd is. Daardoor verschenen er kreten als 'externe evaluatie' en 'systeem ontwikkeling' en een sfeer op de scholen die ergens het midden houdt tussen verbittering en de neiging tot het nemen van ontslag.
Dachten wij niet dat ons werk vruchtbaar was, hebben we niet veel tijd, energie en fantasie geïnvesteerd om de leerstof aan te passen aan steeds meer ongeconcentreerde en onhandelbare jongeren? Was het niet allemaal de schuld van de maatschappij, het teloor gaan van het gezinsverband, een veel te veel aan niveau toegeeflijke basisschool of de enorme stijging van het aantal allochtone kinderen die niet eens fatsoenlijk Duits kunnen schrijven en lezen?
Maar, laat mij u niet vervelen met de klaagzangen die u als docent waarschijnlijk toch al dagelijks om u heen hoort.
Over één aspect, de inhoud, wil ik wat meer vertellen. Met name over de manier waarop wiskundige onderwerpen worden aangeleerd en de keuze van die onderwerpen. Dat betekent niet dat we alle andere aspecten buiten beschouwing kunnen laten, maar ik ben er echt bang voor dat als de tendens naar de zogenaamde praktisch toepasbare wiskunde doorgaat, we ofwel ons vak overbodig maken, ofwel dat we de status gaan krijgen van de docent Latijn, die er voortdurend tegen moet knokken dat de enige rechtvaardiging voor zijn vak zou zijn dat je anders het examen Latijn niet haalt.
Ik ga proberen om een paar van die gevaarlijke ontwikkelingen te schetsen. Laat me het bovenstaande illustreren met de manier waarop het concept 'monotonie van functies' en het concept 'lokale of globale extremen' op school worden ingeleid.

Monotonie van functies

Er is een voor de hand liggende formalisering van het idee dat 'een functiewaarde stijgt als de input waarde toeneemt'.
Definitie: Een functie f is monotoon stijgend op een deelverzameling M van zijn domein als, en alleen als, voor ieder tweetal verschillende elementen van M de bijbehorende functiewaarde van het grootste argument groter is dan de bijbehorende functiewaarde van het kleinste argument:

$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Deze definitie is een letterlijke vertaling van wat je ziet bij het concept 'stijgen'. Maar helaas is het een beetje vervelend om de monotonie van een functie met behulp van de definitie na te gaan: je moet dan toch een beetje met ongelijkheden om kunnen gaan. In een schoolboek uit de zeventiger jaren vond ik het volgende bewijs dat de functie $f(x) = x^3$ stijgt op $\mathbf{R}^+$.

$$\begin{array}{rl}
0<x_1<x_2 \Rightarrow 0<x_1^3<x_1^2x_2 & \text{vermenigvuldig met } x_1^2 \\
\wedge\ x_1^2x_2<x_1x_2^2 & \text{vermenigvuldig met } x_1\,x_2 \\
\wedge\ x_1x_2^2< x_2^3 & \text{vermenigvuldig met } x_2^2 \\
\Rightarrow x_1^3< x_1^2x_2 & \\
<x_1x_2^2<x_2^3 & \text{QED}
\end{array}$$

Men kan zich voorstellen dat een ongetrainde toeschouwer zich voelt als een muis die de zoete geur van bacon volgt en vervolgens in de val loopt: er is iets onverwachts gebeurd, iedere stap was vermakelijk, maar er is geen link naar het uiteindelijke resultaat dat wordt bereikt. Maar volgens mij is dat het lot van iedere wiskundige beginner. Iedere keer als wiskunde tot een formele afleiding verworden is, is het heel moeilijk om het oorspronkelijke idee te achterhalen dat tot deze afleiding leidde.
En ja, dan heeft het er ook nog alle schijn van dat de leerlingen hun algebraïsche vaardigheden aan het verliezen zijn. Ik kan me nog goed herinneren dat een probleem als opgelost beschouwd kon worden wanneer het vertaald was naar een niet al te ingewikkeld ogende vergelijking, terwijl ik mezelf nu zie worstelen met problemen als hoe je een kwadratische vergelijking moet oplossen en hoe je kunt voorkomen dat studenten zelfs determinanten gaan inzetten voor lineaire vergelijkingen.
Wiskundigen weten dat het in veel gevallen (die ik me uit de universiteitswiskunde herinner als 'minder belangrijk') helpt als je de 'globale monotonie stelling' kent: als je het teken van de afgeleide op een aaneengesloten deel van het domein kent, dan kun je de monotonie eenvoudig vaststellen.
Maar voor het bewijs van deze stelling heb je de middelwaardestelling nodig, die weer verlangt dat een differentieerbare functie continu is, dat een continue functie op een compacte deelverzameling van zijn domein begrensd is en zelfs zijn extreme waarden aanneemt, en dit feit ligt weer heel dicht bij de topologische volledigheid van de reële getallen. Maar ergens hebben we het gevoel dat dit voor onze leerlingen te ver gaat.

Jaren geleden was het normaal dat in Duitse wiskundelessen de irrationale getallen behandeld werden, nu zijn er docenten die geloven (of tenminste pretenderen te geloven) dat dit concept veel te oubollig is, omdat iedere student een rekenmachine heeft. Veel van mijn studenten denken bijvoorbeeld dat π alleen maar bij benadering goed gedefiniëerd is omdat het rekentuig niet alle decimalen kan laten zien.
Enige notie van het begrip limiet wordt niet meer gegeven; in plaats daarvan wordt er een setje regels afgeleid uit

wat triviale waarnemingen en toegepast op de relevante voorbeelden. En als er een voorbeeld opduikt waar de regels ‘het niet doen’ dan wordt er door de docent een nieuw regeltje aan het setje toegevoegd. Over ‘continuïteit’ wordt niet gesproken: het gaat alleen over differentiëerbare functies (ingegeven door toepassingen als momentane snelheid of toename) en zelfs het concept differentiëerbaarheid wordt niet verduidelijkt: de rekentechniek werkt toch wel in ieder voorbeeld. ‘*Natura non facit saltus’*, de natuur springt niet, tenslotte. Maar op deze manier is de geschetste benadering onmogelijk, als je die manier tenminste accepteert als onvermijdelijk in schoolwiskunde. Conclusie: de definitie moet worden veranderd:
Herdefinitie: Een functie is stijgend op het interval $[a,b]$ van zijn domein wanneer de afgeleide alleen maar positieve waarden aanneemt op dit interval.
Maar hoe komen de leerlingen erachter dat die afgeleide overal positief is? Per slot van rekening hebben we al gezien dat het omgaan met ongelijkheden helaas niet meer beheerst wordt. De volgende techniek komt vaak voor: los de vergelijking $f'(x) = 0$ op en bepaal de nulpunten van de afgeleide. Omdat het ‘duidelijk’ is dat de grafiek van de afgeleide niet zomaar van boven de x-as naar onder de x-as valt (of andersom) zonder die as te snijden, lijkt men te kunnen volstaan met het teken te bepalen van de afgeleide tussen twee nulpunten in. Is dat teken positief, dan is die afgeleide overal positief en dus stijgt de functie. Waarmee de leerlingen eigenlijk gebruikmaken van de tussenwaardestelling, die eigenlijk ook gebaseerd is op de topologische volledigheid. Deze techniek vermijdt het gebruik van ongelijkheden en als je leerlingen *geschikt gekozen problemen* ziet oplossen, dan lijkt het net alsof ze hetzelfde doen als degenen die wél weten waar ze mee bezig zijn.
Deze *intellectuele oneerlijkheid* wordt deels gecamoufleerd door de term *geschikt gekozen problemen*: de leerling kan niet beoordelen of een probleem geschikt is, en het zoeken van motiverende voorbeelden is de verantwoordelijkheid van de docent. En dan daarbij is het concept nog verkeerd ook. De natuur springt wel degelijk in eenvoudige voorbeelden: de verzendkosten van een pakje hangen behoorlijk discontinu af van het gewicht. Als er een gaatje zit in het domein van een functie, dan kan een functie best over de as springen alsof hij zijn niet gedefiniëerd zijn slinks gebruikt om van plus oneindig naar min oneindig te geraken. Eerdere ervaringen van leerlingen – ze hebben allemaal wel eens de grafiek van een hyperbool gezien – spreken de gepresenteerde technieken dan ook tegen.
Hoe kunnen we ooit veronderstellen dat leerlingen iets als begrip kunnen verwerven onder deze omstandigheden? Lijkt wiskunde niet op de kunst om situaties zodanig complex te beschrijven dat deze berekenbaar worden? De aandacht verschuift van de formele beschrijving van eigenschappen en hun relaties naar algoritmische berekenbaarheid. Hoe kan een leerling vertrouwen krijgen in zijn eigen intuïtie, een opbouwende afstand nemen van zijn voorafgaande ideeën, als de werkelijkheid niet gemodelleerd kan worden en het kunstmatige de enige redding is?
De tweede intellectuele oneerlijkheid zit in het feit dat we termen gebruiken die gebaseerd zijn op een zeker intuïtief besef, zoals *stijgend* (iedere leerling weet of zijn zakgeld voldoende gestegen is de laatste jaren), maar formeel is dit inzicht alleen maar verworven door iets dat vaag gerelateerd is aan de intuïtieve inhoud. Het is dat de docent belooft dat de definitie precies is ‘wat je ziet’, zodat de resultaten van het gebruik van de formele definitie bijdragen aan een intuïtief concept. Neem bijvoorbeeld de functie $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.
Het is duidelijk dat de afgeleide nulpunten heeft in 0 en in 1, en met bovenstaande techniek vind je dat de afgeleide negatief is op $<\leftarrow, 0>$ en op $<0,1>$ en positief op $<1, \rightarrow>$. Dus, concluderen de leerlingen, het minimum van de grafiek is $P(1, f(1))$. Maar hoe kunnen ze dat zeker weten? Waar hebben ze laten zien dat overal, behalve in $x = 1$, geldt: $3x^4 - 4x^3 > -1$? De conclusie is alleen gebaseerd op de intuïtieve aanname dat als iets eerst daalt en daarna stijgt er ergens een minimum moet zijn. Of ze ook iets weten over het toename gedrag van de functie is niet duidelijk: het wordt alleen door de woordkeuze gesuggereerd.

Extremen

Als je het over *extremen* hebt dan zie je een ander voorbeeld van het herdefiniëren van draken: volgens de geschetste procedure is een lokaal maximum gedefinieerd als het punt waar stijgen overgaat in dalen. Maar is dat niet totaal verschillend van het voor de hand liggende concept? Een lokaal maximum zou lokaal gezien gewoon het hoogste punt van de grafiek moeten zijn. Er zijn oneindig vaak differentieerbare functies waarvoor geldt dat er in x_0 een globaal en lokaal maximum is, terwijl er geen interval $< x_0\text{-}h, x_0>$ te vinden is waarop de functie stijgt en geen interval $<x_0, x_0+h>$ te vinden is waarop hij daalt. Een voorbeeld is:

$$\text{squeeze}(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{100} \cdot x^2$$

Het bewijs van deze eigenschap vindt u op de site van de *Nieuwe Wiskrant*.
De twee geschetste concepten verschillen dus van elkaar. Maar dat zullen de leerlingen niet te weten komen: zij denken dat ze identiek zijn.

Ze zijn overgehaald om te geloven dat alle gevolgtrekkingen van deze mix van intuïtieve concepten en onvolledige, gelimiteerde ‘beschrijvingen’ daarvan met kunstmatige notaties, maar wetenschappelijk genoeg ogend om tegenstrijdigheden te voorkomen en blijkbaar krachtig genoeg om de afmetingen van een bierblikje te kunnen berekenen met gegeven inhoud en minimaal gebruik van blik. Overigens, vreemd genoeg, lijken die bierblikjes in de verste verte niet op het berekende resultaat. Daar zal vast een reden voor zijn, leerlingen zijn allang blij dat ze daar niet over na te hoeven denken.

Wiskunde en intuïtie

Op een wat abstracter niveau wil ik even ingaan op de relatie tussen de wiskundige definities en de waarneming van de fenomenen die inspireren tot het opstellen van die definities. In de 'zuivere wiskunde' is de waar te nemen 'realiteit' slechts een metafoor van abstracte, goed gedefinieerde termen. Omdat de axiomatische methode het geldende paradigma van de wiskunde is, pretenderen wiskundigen allang niet meer dat ze de fysische werkelijkheid beschrijven. Maar in de gedachte van een wiskundige die het heeft over een transversale doorsnijding van twee multidimensionale hypervlakken in een ruimte met een nog hogere dimensie bestaat er vast wel een 'plaatje' van twee oppervlakken in een driedimensionale ruimte die elkaar snijden zonder gemeenschappelijk raakvlak in de snijpunten. En bij dit beeld past het gevoel dat niet-transversale doorsnijding zo iets 'singuliers' is dat dat altijd wel te repareren valt door een van de oppervlakken een beetje in te deuken. En dit idee werkt: een nadere blik op *hoe* zo'n oppervlak moet worden ingedeukt geeft al een idee over het abstracte bewijs. Dus de metafoor zelf inspireert wiskundigen al tot het vinden, en zelfs bewijzen, van bepaalde stellingen. Maar dit kan alleen maar als de formele definities (hier: hypervlakken, raakvlakken, transversaliteit) heel precies en exact overeen komen met het onderliggende intuïtieve concept. Ieder gebrek aan nauwkeurigheid van de formele definitie werkt even contraproductief als iedere kunstmatigheid in de formele definitie. (Ik kom in een volgende *Nieuwe Wiskrant* nog terug op dit begrip 'nauwkeurigheid')
Het idee dat je wiskundige resultaten kunt verkrijgen door het permuteren en combineren van formele eigenschappen volgens formele logische wetten klopt, volgens mij, alleen maar in bepaalde gevallen. In de meeste gevallen heb ik een gevoel nodig bij wat er formeel gebeurt, en de richting waarin ik oplossingen zoek wordt beïnvloed door de beelden die ik er bij heb. Als ik alleen moet werken met formele definities die ergens ver weg mijn intuïtie weerspiegelen dan raakt mijn vermogen om tot nieuwe inzichten te komen volledig verlamd. Die hele speciale euforie om in staat te zijn iets te bewijzen en te ondervinden dat mijn intuïtie inderdaad een betrouwbare gids was blijft dan uit, en dus ook iedere motivatie om door te gaan.

Er blijkt nog een aspect van belang te zijn. De ontwikkelingen die ik schetste komen voort uit het nobele streven om dingen makkelijker te maken voor leerlingen. Ik heb geprobeerd duidelijk te maken dat deze vereenvoudigingen ver genoeg gegaan zijn om de enige echte waarde van de wiskunde, de intellectuele eerlijkheid, in gevaar te brengen. Om daardoor de leerlingen te beroven van de ervaringen van die specifieke wiskundige euforie van het bewaarheid zien van de intuïtie en het tot een twijfelloze waarheid komen door opeenvolgend allerlei beelden te verfijnen.

De school en de universiteit

Het gevolg is dat onze leerlingen geen plezier in wiskunde hebben op school en ook niet uit pure liefde voor het vak verder studeren op de universiteit. Een reden zou kunnen zijn dat ze slim genoeg zijn om te zien dat de steigers die ze hebben leren beklimmen behoorlijk wankel zijn. Ze zijn bezig gehouden met techniekjes en het verwerven van tweederangs inzichten. Ze voelen perfect aan dat iedere confrontatie met onverwachte problemen gedoemd is te mislukken; ze durven niet te lopen zonder het beschermende handje van de docent die de weg vereffend heeft. Een klein bezoekje aan een collegezaal leert ze dat wat daar gebeurt niets te maken heeft met wat ze geleerd hebben.
Maar aan de andere kant is het natuurlijk ook niet zo dat het enige doel van een school zou moeten zijn om toekomstige wiskundestudenten te leveren. En op school is het niet mogelijk om de axiomatische benadering die essentieel is voor de academische wiskunde in te voeren.
Op school kunnen we niet volledig zijn, we moeten leven met voorlopige inzichten die later nog wel eens waterdicht geformaliseerd kunnen worden. Maar: we kunnen de nieuwsgierigheid van onze leerlingen alleen maar prikkelen als we laten zien wat we voorlopig weglaten, dat toont de noodzaak aan om verder te leren. We moeten ze de gelegenheid bieden om bezig te zijn met de band tussen persoonlijke intuïtie en interactieve communicatie, om het genoegen te ervaren zelfstandig het juiste gereedschap te kiezen waarmee een probleem kan worden opgelost. Dat zou echt iets bijdragen aan hun zelfvertrouwen.
Laat me samenvattend proberen een eerste grondslag voor het doceren van wiskunde te formuleren.
Definities zijn noodzakelijk om een betrouwbare basis te creëren voor communicatie over een bepaald onderwerp. Deze definities moeten overeenkomen met waarnemingen van leerlingen. Het nagaan in hoeverre die overeenkomst klopt en waar verfijningen nodig zijn is een essentieel onderdeel van de wiskunde en een inspiratiebron voor het ontwikkelen van wiskundige vaardigheden. De introductie van kunstmatige concepten om moeilijkheden te voorkomen is intellectueel oneerlijk, leidt de leerling af van zijn intuïtie en ontneemt hem de mogelijkheid zelfstandig te leren.

Carl Peter Fitting, Geschwister Scholl Gesamtschule Moers, Duitsland. e-mail: cpfitting@aol.com

Vertaling: Tom Goris.
De originele tekst kunt u downloaden van de Nieuwe Wiskrant site.