Dirk De Bock, **Wim Van Dooren**, **Dirk Janssens** en **Lieven Verschaffel** hebben hier al eerder over bericht in *Nieuwe Wiskrant 21.3*. Inmiddels hebben zij een dieptestudie verricht naar de illusie van lineariteit in de meetkunde. Mede naar aanleiding van een optreden op NWD 9 volgt hier een verslag.

Waarom lineariteit de leerlingen soms parten speelt

Een dieptestudie in het voortgezet onderwijs

Inleiding

Volgens Freudenthal (1983) is lineariteit (of recht evenredigheid) een zo voor de hand liggende eigenschap van relaties, dat iemand makkelijk in de verleiding komt om gelijk welke numerieke relatie tussen grootheden te gaan behandelen alsof het om een lineaire relatie ging. Vaak zijn leerlingen – maar ook volwassenen – dus geneigd om ‘overal’ lineaire relaties te zien en toe te passen, ook in situaties waarin dat niet geoorloofd is. In dat verband spreekt men soms van de *illusie van lineariteit*. De geschiedenis van de wiskunde telt talloze voorbeelden van dit fenomeen.

Een eenvoudig voorbeeld uit de geschiedenis van de kansrekening is de fout die de Italiaanse wiskundige Cardano (1501-1576) maakte. Cardano, die correct beredeneerde dat de kans op een dubbele zes in een worp met twee dobbelstenen gelijk is aan 1/36, redeneerde verder dat men de twee dobbelstenen achttien keer moet werpen om minstens vijftig procent kans te hebben op een dubbele zes. Cardano ging dus uit van een recht evenredig verband tussen het aantal worpen en de kans op een dubbele zes (zie ook Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2002).

De focus van deze bijdrage is de illusie van lineariteit binnen het vakgebied meetkunde. In dit domein is het bekendste voorbeeld wellicht dat van de verdubbeling van het vierkant in de dialoog Meno van Plato. Een slaaf, die als opdracht krijgt een vierkant te tekenen met de dubbele oppervlakte van een gegeven vierkant, stelt spontaan voor om de zijde van het gegeven vierkant te verdubbelen. De slaaf gaat dus impliciet uit van een recht evenredig verband tussen de zijde en de oppervlakte van een vierkant.

Ook vandaag nog zijn studenten zich vaak niet bewust van de verschillende groeifactoren voor lengtes, oppervlaktes en volumes bij het gelijkvormig vergroten en verkleinen van figuren, zelfs niet na uitgebreide ervaringen met vergroten en verkleinen in praktische situaties. Zo beschrijft Feys (1995, p. 123) de volgende ervaring met toekomstige onderwijzers:

> We vragen normaalschoolstudenten wat er zal gebeuren als ze twee A4 bladen naast elkaar leggen en met een fotokopie-machine verkleinen om ze samen op één A4 blad te krijgen. Steevast krijgen we als antwoord dat de tekst niet langer leesbaar zal zijn, de hoogte en breedte van de letters en van de tekeningen zouden worden gehalveerd.

En wanneer iemand begrepen heeft dat de oppervlaktes en volumes niet lineair gerelateerd zijn aan de lengtes, is die vaak nog steeds verbaasd dat een oppervlakte of volume *zoveel* toeneemt in geval van een vergroting en *zoveel* afneemt bij een verkleining. Dat laatste wordt geïllustreerd in het boek *Leven en Werken van de Kabouter* van Rien Poortvliet en Wil Huygen (1976) (zie ook Eggermont, 1994). In dit boek wordt op een zeer gedetailleerde, realistisch aandoende wijze een analyse gemaakt van alle aspecten van het leven van de kabouter. Een van de stellingen is dat een kabouter een zeer gelijkaardige lichaamsbouw heeft als de mens, en dat een mannelijke kabouter (zonder puntmuts) ongeveer 15 centimeter groot is en ongeveer 300 gram weegt (zie figuur 1). Hoewel dit op het eerste zicht aanvaardbaar kan lijken, is dit een zeer onrealistische schatting: wanneer we ervan uitgaan dat een kabouter van 300 gram gemiddeld 15 centimeter groot is, en een gemiddelde volwassen mens 180 centimeter, dan zou een mens (die 180/15 = 12 keer groter is) dus 12^3 of 1 728 keer zo veel moeten wegen, hetgeen zo’n 518 400 gram of 518 kilogram zou betekenen!
Het ongeoorloofd toepassen van een lineair model op lengtes, oppervlaktes en volumes is genoegzaam bekend in kringen van wiskundeleraren en -didactici. In de Amerikaanse *Standards* lezen we in dat verband (National Council of Teachers in Mathematics, 1989, p. 114-115):

> Most students in grades 5-8 incorrectly believe that if the sides of a figure are doubled to produce a similar figure, the area and volume will be doubled too.

Sinds enkele jaren wordt aan het Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie van de Katholieke Universiteit Leuven systematisch empirisch onderzoek verricht naar dit fenomeen. Via de afname van collectieve toetsen bij grote groepen twaalf- tot zestienjarige leerlin-

fig. 1 Hoeveel weegt de boskabouter?

gen werd onderzocht welke variabelen (bijvoorbeeld het geven of laten maken van een tekening) een invloed hebben op het ongeoorloofd gebruik van lineariteit. Voor een samenvattend overzicht zie bijvoorbeeld De Bock, Verschaffel & Janssens, 1999. Met deze collectieve toetsafnamen kregen we echter onvoldoende informatie over de eigenlijke oplossingsprocessen die achter de onterechte lineaire redeneringen van leerlingen schuilgingen. Zo konden we op die basis geen behoorlijk antwoord geven op de vraag hoe en waarom zoveel leerlingen in de 'lineaire valstrik' trappen, en waarom ze zo ongevoelig bleken voor diverse vormen van hulp die we in die studies aanreikten. Daarom werd besloten om een beperkte groep leerlingen individueel te interviewen, en hun denkprocessen bij het oplossen van een niet-lineair probleem te ontrafelen via het gericht doorvragen en het strategisch geven van enkele hints.

Verloop van de interviews

We namen individuele interviews af bij twintig twaalf- tot dertienjarige en twintig vijftien- tot zestienjarige leerlingen. In deze interviews lieten we de leerling eerst een niet-lineair probleem oplossen over de vergroting van een onregelmatige vlakke figuur. Het probleem was vergezeld van tekeningen, om te garanderen dat de leerlingen het probleem correct zouden interpreteren. Een voorbeeld wordt gegeven in figuur 2.

Bart werkt voor een bedrijf dat reclametekeningen schildert op de etalageruiten van winkels. Tijdens de afgelopen kerstdagen moest hij vaak kerstbomen, kerstmannen, sterren en sneeuwmannen op de ramen schilderen.
Op een dag moest hij een tekening van een kerstman van 56 cm hoog op de glazen winkeldeur van bakkerij Vervoort schilderen. Hiervoor had hij 6 ml verf nodig. Daarna moest hij een veel grotere versie van diezelfde kerstman schilderen op de etalageruit van supermarkt Staes. Die kerstman moest 168 cm hoog zijn. Hoeveel ml verf had Bart hier ongeveer voor nodig?

Bakkerij Vervoort — Supermarkt Staes

fig. 2 Voorbeeld van een niet-lineair probleem (juist antwoord: 54 ml, foutief lineair antwoord: 18 ml)

Bij het oplossen van dit probleem lieten we de leerling hardop denken en stelden ook enkele bijkomende vragen. Wij vroegen bijvoorbeeld systematisch waarom zij dachten dat hun oplossing correct was en hoe zeker zij daarvan waren. Wanneer een leerling het probleem lineair oploste gaven we gaandeweg aanvullende hints. Deze hints boden steeds meer steun aan de correcte (niet-lineaire) oplossingsmethode en lokten zo in toenemende mate een cognitief conflict uit bij de leerlingen. Na elke hint vroeg de interviewer of de leerling zijn antwoord wilde herzien. Het interview werd beëindigd wanneer de leerling het niet-lineaire karakter van de opgave doorzag en het correcte antwoord gaf. Op die manier konden we nagaan hoe volhardend de leerling was in zijn keuze voor het lineair model. Deze hints waren dus niet bedoeld als leertraject, doch enkel om het denkproces van de leerling te achterhalen. In figuur 3 wordt schematisch weergegeven hoe het interview verliep.

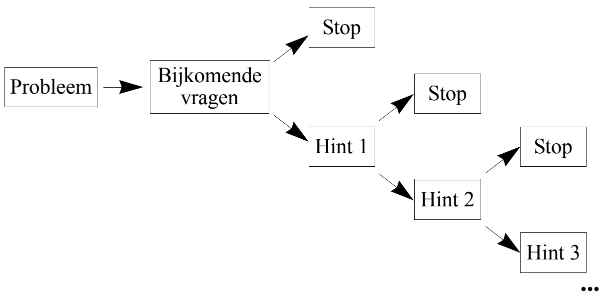

fig. 3 Schematisch verloop van het interview

In totaal werden vier hints voorzien. Een *eerste hint* bestond erin de leerling te confronteren met een door ons gemanipuleerde frequentietabel die aangaf dat (fictieve) medeleerlingen even vaak de niet-lineaire als de lineaire oplossing hadden gegeven (zie figuur 4). De idee was dat twee antwoorden die even vaak werden gekozen twijfel zouden zaaien. Bovendien zouden leerlingen die gewoon uit onoplettendheid lineair hadden geantwoord wellicht het correcte antwoord in de tabel herkennen.

Antwoord	**Percentage leerlingen**
18 ml	41%
54 mi	41%
Overige	18%

fig. 4 Frequentietabel aangeboden als eerste hint

Als *tweede hint* gaf de interviewer de argumentatie voor de niet-lineaire oplossing van een (wederom fictieve) medeleerling. In het voorbeeld luidde de hint als volgt: ‘Een leerling legde me uit dat als de tekening van de kerstman drie keer groter wordt, niet alleen de hoogte, maar ook de breedte met drie wordt vermenigvuldigd. Je hebt dus negen keer zoveel verf nodig en daarom antwoordde hij 54 ml.’

Als *derde hint* werd de oplossingsstrategie getoond van een fictieve medeleerling die de correcte (niet-lineaire) oplossing gaf. Die had rechthoeken rond de kleine en de grote kerstman getekend en zo gemerkt dat deze figuur niet alleen drie keer hoger, maar ook drie keer breder wordt, zodat je negen keer zoveel verf nodig hebt (zie figuur 5).

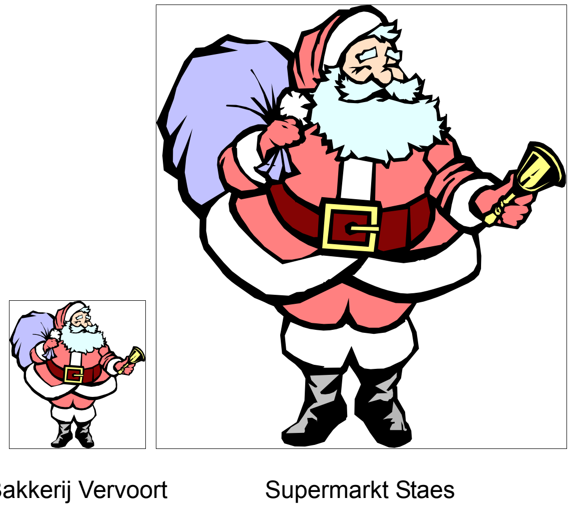

fig. 5 Rechthoeken aangeboden als derde hint

Ten slotte werd als *vierde hint* een expliciete link gelegd met het meten van oppervlakte. Daartoe werd aan de leerling gevraagd de oppervlakte van beide rechthoeken uit figuur 5 te berekenen en te vergelijken. Voor alle nog overblijvende leerlingen werd het interview na deze vierde hint beëindigd.

Overzicht van de resultaten

We formuleren eerst enkele algemene bevindingen over de reacties van de leerlingen tijdens de interviews. Daarna gaan we dieper in op de interviews van twee leerlingen. We selecteerden deze interviews omdat ze het meest representatief waren voor de reacties van de volledige groep leerlingen.

Wanneer we het niet-lineaire vraagstuk aanboden, gaven alle leerlingen (op twee uit de oudste groep na) het lineaire antwoord. Meestal vonden ze het lineaire antwoord door de verhouding van de hoogtes van de twee kerstmannen te berekenen en te redeneren dat die verhouding ook van toepassing is op de hoeveelheden verf die nodig zijn om deze figuren te schilderen (de hoogte wordt vermenigvuldigd met drie, dus ook de hoeveelheid verf wordt met drie vermenigvuldigd). De meeste leerlingen toonden zich tamelijk tot heel zeker dat hun oplossingswijze de juiste was, doch hadden grote moeite om die oplossing uit te leggen en te verantwoorden. Voor hen was die evident en was een ander antwoord niet denkbaar.

Na de confrontatie met de frequentietabel (figuur 4) ruilden slechts twee van de overgebleven 38 leerlingen hun lineaire antwoord in voor het niet-lineaire. De reacties van de meeste andere leerlingen op deze eerste hint kenmerkten zich door oppervlakkigheid (bijvoorbeeld tevergeefse pogingen om aan de alternatieve uitkomst te komen via het ‘at random’ uitvoeren van een aantal bewerkingen met de drie gegeven getallen). Heel wat leerlingen ontdekten zo dat de andere oplossing tot stand kwam door het vermenigvuldigen met negen (of tweemaal met drie), maar dat deed hen niet twijfelen over hun eigen oplossing.

Na het aanbieden van de tweede hint (de argumentatie voor de correcte oplossing), besloten nog veertien van de overgebleven 36 leerlingen om van antwoord te veranderen. Zij erkenden dat ze niet eerder hadden geprobeerd zich het probleem echt voor te stellen en dat ze de opgave op een ondoordachte, routinematige manier hadden opgelost. Maar zelfs nu bleven 22 leerlingen bij hun oorspronkelijke antwoord, hoewel ze dit niet (goed) konden rechtvaardigen. Vaak berustte de argumentatie op erg ‘schoolse’ overtuigingen over het oplossen van wiskundevraagstukken of bleek eruit dat leerlingen niet begrepen wat gelijkvormigheid precies betekent.

De aanbieding van de oplossingsstrategie met de rechthoeken (figuur 5) werkte voor negen van de 22 overblijvende leerlingen als een ware ‘Gestaltwechsel’ (Wertheimer, 1945). Zodra deze derde hint werd aangeboden, kozen zij onmiddellijk en overtuigd voor de niet-lineaire oplossing. De overblijvende dertien leerlingen hielden vast aan het lineaire antwoord en maakten eerder algemene beschouwingen over hoe vraagstukken volgens hen moeten worden opgelost en de rol die tekeningen daarbij in hun ogen kunnen spelen.

Na de laatste (vierde) hint ten slotte, wisselden nog vijf leerlingen hun oorspronkelijke lineaire antwoord in voor het niet-lineaire. Maar zelfs na vier (in sterkte toenemende) hints hielden dus nog steeds acht leerlingen vast aan hun oorspronkelijke lineaire redenering. Zij herhaalden vooral, en vaak met nog grotere nadruk, hun stereotype opvattingen over wiskunde in het algemeen en over het oplossen van vraagstukken in het bijzonder.

Het interview met Pieter (twaalf jaar)

De interviewer toonde Pieter een werkblad met het probleem van de kerstmannen (figuur 2). Het interview verliep als volgt:

Pieter: [leest het probleem hardop] Euh, wacht even, laat me naar de getallen kijken … Ik zie het, de hoogte verandert van 56 cm tot 168 cm. Dat is dus maal drie. Ik moet dus ook de hoeveelheid verf met drie vermenigvuldigen. [Pieter tekent het schema in figuur 6]
Het antwoord is 18 ml. Bart heeft 18 ml nodig voor de grote kerstman.

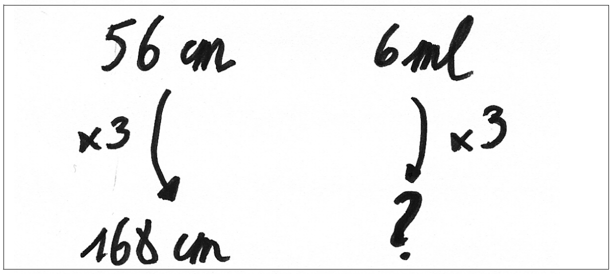

fig. 6 Het oplossingsschema van Pieter

Interviewer: Waarom denk je dat die oplossing juist is?
Pieter: [stilte] Wel, euh … Ik weet het niet … Ik heb het zo opgelost.
Interviewer: Waarom heb je dan met drie vermenigvuldigd?
Pieter: Dat is toch logisch. Het kan niet anders, toch? De kerstman is *hoger*, dus heb je *meer* verf nodig. En hij is *drie keer* hoger, dus … *drie keer* zoveel verf. Simpel!
Interviewer: Hoe zeker ben je van je antwoord?
Pieter: Heel zeker. Het is een gemakkelijk probleem! Ik heb gewoon de drie getallen en de formule gebruikt, dus moet het wel juist zijn.

De interviewer bood vervolgens de eerste hint aan.

Interviewer: Vorige week gaven we dit probleem aan leerlingen van een andere school. Hun antwoorden staan in deze tabel (vergelijk figuur 4). 41% van de leerlingen in die school gaf ook als antwoord 18 ml, maar er waren evenveel leerlingen die 54 ml antwoordden. Pieter, wat denk je van dat andere antwoord? En van jouw antwoord? Wil je veranderen?
Pieter: [onmiddellijk] Nee, dat is onmogelijk. Ik heb het berekend en het is 18 ml. Hoe komen ze trouwens aan die 54? Wacht, ik probeer. [trekt 54 af van 168, probeert enkele combinaties van 54, 168, 6 en + – × en:] Ah nee, ik zie het. Ze hebben *twee* keer met drie vermenigvuldigd. Zie je, ze hebben een fout gemaakt. Ik blijf bij mijn antwoord.

Aangezien Pieter vasthield aan de lineaire oplossing, bood de interviewer de tweede hint aan.

Interviewer: Een leerling van die andere school legde uit hoe hij het probleem oploste. Hij zei dat de kerstman niet alleen drie keer hoger wordt, maar ook drie keer breder. Dus heb je negen keer zoveel verf nodig.

Pieter: O, maar die leerling gebruikt de *tekening*. Ik heb niet naar de tekening gekeken. Alleen naar de tekst. In de tekst staat enkel *hoogte*.

Interviewer: En wat als je naar de tekening kijkt?

Pieter: 18 ml is toch beter. Die leerling maakt het te moeilijk. Mijn antwoord is nog altijd beter.

Daarop gaf de interviewer de derde hint. Hij toonde de tekeningen van figuur 5 en gaf er de volgende uitleg bij.

Interviewer: De leerling die met negen vermenigvuldigde, tekende eerst rechthoeken rond de kerstmannen. Toen zag hij dat de figuur *in beide richtingen* drie keer groter wordt: in de hoogte, maar ook in de breedte. Daarom heb je dus negen keer zoveel verf nodig. Wat denk je van deze oplossing? En van jouw oplossing? Welke oplossing verkies je nu?

Pieter: Dat kan wel een goede oplossing zijn, maar het probleem zegt helemaal niets over de breedte. Dat is in de tekening, maar niet in het vraagstuk. Het vraagstuk gaat over de hoogte.

Interviewer: En wat met de rechthoeken?

Pieter: Wat ze met de rechthoeken doen is correct: ze vergroten in twee richtingen.
Maar binnen de rechthoeken staat een *onregelmatige* figuur. En dat is anders. Kijk hier en hier! [Pieter wijst naar de ‘lege’ gedeelten in de rechthoeken]

Tot slot werd de vierde hint gegeven:

Interviewer: Kun je de oppervlakte van de twee rechthoeken berekenen en vergelijken?

Pieter: [rekent] Wel, deze is negen keer groter.

Interviewer: En wat als je de oppervlakte van die rechthoeken zou moeten schilderen?

Pieter: [onmiddellijk] Dit gaat alleen maar over verf, niet over oppervlakte. Je maakt het te moeilijk. Wiskunde is logisch, en met negen vermenigvuldigen is hier niet logisch. Hij is drie keer groter, dus heb je drie keer zoveel verf nodig!

Hier eindigde het interview met Pieter.

Het interview met Karen (vijftien jaar)

Karen kreeg hetzelfde kerstmannenprobleem aangeboden. Het interview verliep als volgt:

Karen: [leest het probleem] Ah, ik zie het. Je hebt 6 ml nodig voor 56 cm. Ik kan dus berekenen hoeveel je voor 1 cm nodig hebt. [deelt 6 door 56 met haar rekenmachine] Ik heb het. Je hebt 0.1071 ml per cm nodig. Dan vermenigvuldig ik dat met 168, want de grote kerstman is 168 cm. [rekent] Je hebt 18 ml nodig voor de grote kerstman.

Interviewer: Waarom denk je dat dat de juiste oplossing is?

Karen: Eh … Dat werkt, ik weet niet waarom.

Interviewer: Hoe werkt dat dan?

Karen: Het is makkelijk om te weten hoeveel je nodig hebt voor 1 cm. Dan moet je alleen nog vermenigvuldigen. Ze noemen dat de regel van drie. Ik kan daar eigenlijk niets meer over zeggen.

Interviewer: Hoe zeker ben je van je antwoord?

Karen: Ik ben niet helemaal zeker omdat ik het probleem niet zorgvuldig gelezen heb. Maar ik denk dat ik gedaan heb wat verwacht werd. Ik heb de drie getallen gebruikt en het werkte … Misschien heb ik een rekenfout gemaakt. Dat kan altijd gebeuren. Maar mij lijkt het correct.

Aangezien Karen een lineaire oplossing gaf, toonde de interviewer de fictieve frequentietabel en merkt op dat leerlingen van de andere school even vaak 54 ml als antwoord gaven. Karen reageerde als volgt:

Karen: 54??? Ik denk dat dat wat veel is. Ik zou denken dat mijn oplossing veel logischer is. Trouwens, je blijft best altijd bij je eerste gedachte!

Interviewer: Een leerling van de andere school zei me dat de kerstman niet alleen drie keer hoger, maar ook drie keer breder wordt, dus heb je negen keer zoveel verf nodig. Daarom antwoordde hij 54 ml …

Karen: Nee, dat denk ik niet. Het is juist dat hij drie keer hoger en drie keer breder wordt. Maar dat betekent gewoon dat *alles* drie keer meer is. Ook de hoeveelheid verf. Die wordt ook met drie vermenigvuldigd. 6 ml is voor de *hele* kerstman, niet alleen voor de hoogte. En 18 ml is voor de volledige grote kerstman. [wijst achtereenvolgens naar de kleine en de grote kerstman] Deze oppervlakte past drie keer in die oppervlakte, dus heb je drie keer meer verf nodig.

Karen bleef dus ook na de tweede hint de lineaire oplossing verkiezen en kreeg dus de derde hint aangeboden: de interviewer toonde en besprak de oplossingsstrategie met de omgeschreven rechthoeken. Bij het bekijken van deze figuur veranderde Karen onmiddellijk van antwoord.

Karen: Oh ja, nu zie ik het. Inderdaad, hij is negen keer groter, omdat de kleine rechthoek ook negen keer in de grote past. Met de rechthoeken begrijp ik het. Ik ben zeker nu. Het moet 54 ml zijn.

Interviewer: Kun je uitleggen waarom je in het begin 18 ml antwoordde?

Karen: Mijn antwoord leek zo logisch: drie keer groter, drie keer meer verf … Bovendien heb ik alleen naar de tekst gekeken en ben ik onmiddellijk begonnen te rekenen. Als ik eerst naar de tekeningen had gekeken, dan had ik het misschien gezien. Maar ik had me niets bij het probleem voorgesteld … alleen gerekend.

Daarmee eindigde het interview met Karen.

Enkele slotbeschouwingen

Deze interviewstudie bevestigt de hardnekkigheid van het onterecht lineair redeneren van twaalf- tot zestienjarigen bij het oplossen van problemen over lengte en oppervlakte van meetkundige figuren. Bijna alle leerlingen gingen onmiddellijk uit van een lineaire (in plaats van een kwadratische) relatie tussen de lengte en de oppervlakte. Zelfs na (sterke) hints bleven veel leerlingen kiezen voor het lineaire model of ondervonden zij grote moeilijkheden om het alternatieve model naar waarde te schatten.

We verkregen ook waardevolle informatie over de redeneerprocessen die aan de basis liggen van het onterecht lineair redeneren van de leerlingen. Globaal gesproken kunnen de elementen in deze redeneerprocessen in vier grote categorieën worden ingedeeld. De dominantie van elk element varieerde bij verschillende leerlingen, maar ook bij eenzelfde leerling varieerde dit in de verschillende fasen van het interview.

Een eerste categorie verwijst naar het intuïtieve karakter (in de betekenis die eraan gegeven werd door Fischbein, 1987) van het lineaire model: het heeft een zelf-evident karakter en wordt op een spontane, haast onbewuste wijze toegepast. Daardoor ervaren leerlingen geen behoefte om hun keuze voor dit model te rechtvaardigen. Intuïtieve modellen blijken ook in hoge mate resistent tegen formeel onderwijs waarin men tegenwicht probeert te bieden. Niet-lineaire modellen worden daarentegen door de leerlingen als tegenintuïtief of onlogisch ervaren.

Een tweede categorie vormt de bewuste en weloverwogen toepassing van het lineaire model. Sommige leerlingen zijn er echt van overtuigd dat elke ‘toename’ in feite een ‘lineaire toename’ is. Deze leerlingen beredeneren soms expliciet dat lengte en breedte allebei met factor drie toenemen, zodat ook de oppervlakte en de hoeveelheid verf met die factor toenemen. Voor deze specifieke overtuiging is de benaming ‘illusie van lineariteit’ zeker op haar plaats: deze leerlingen zijn er uitdrukkelijk van overtuigd dat het lineaire model de gepaste keuze is.

Ten derde brengt deze interviewstudie een aantal hiaten in de meetkundige kennis van de leerlingen aan het licht. Deze hiaten verhinderden dat leerlingen de fout in hun redenering en de correcte oplossing ‘ontdekten’. In het bijzonder kwam naar voren dat heel wat twaalf- tot zestienjarige leerlingen worstelen met concepten zoals gelijkvormigheid of oppervlakte, in het bijzonder bij onregelmatige figuren.

Ten vierde blijken heel wat leerlingen behept met inadequate gewoonten en opvattingen over het oplossen van wiskundige problemen zoals: je kunt je beter baseren op formules dan op tekeningen, je blijft het beste altijd bij je eerste idee, je mag enkel de informatie gebruiken die expliciet in de opgave vermeld wordt, vraagstukken hebben niets met de realiteit te maken, bij het oplossen van een vraagstuk wordt enkel verwacht dat je een of enkele standaardbewerkingen uitvoert. Deze overtuigingen zijn wellicht een (neven)product van het wiskundeonderwijs dat de leerlingen kregen en de ervaringen die ze op school opdeden met wiskundig probleemoplossen.

De combinatie van deze vier elementen leidde bij de meeste leerlingen tot oppervlakkig en gebrekkig wiskundig modelleren.
In een volgende fase van ons onderzoek zal worden nagegaan hoe we leerlingen beter kunnen wapenen tegen de valstrik van de lineariteitsillusie. Daartoe worden thans experimentele lespakketten ontwikkeld en geëvalueerd. Naast de bevindingen van onze vroegere studies naar de lineariteitsillusie dienen de meer algemene principes van het realistisch wiskundeonderwijs (uitgaan van rijke contexten, verder bouwen op informele kennis en strategieën van leerlingen, …) hiervoor als richtsnoer.

Dirk De Bock, Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie (CIP&T), K.U. Leuven en EHSAL, Europese Hogeschool Brussel.
Wim Van Dooren, Aspirant van het Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek (FWO) Vlaanderen, Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie (CIP&T), K.U. Leuven.
Dirk Janssens, Academische Lerarenopleiding Wiskunde, K.U. Leuven.
Lieven Verschaffel, Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie (CIP&T), K.U. Leuven.

Deze publicatie is totstandgekomen in het kader van de Onderzoekstoelage OT-2000-10 van het Onderzoeksfonds van de Katholieke Universiteit Leuven en werd onder meer gepresenteerd op de Nationale Wiskundedagen 2003.

Literatuur

De Bock, D., L. Verschaffel & D. Janssens (1999). Some reflections on the illusion of linearity. In P. Radelet-De Grave (Ed.). *Proceedings of the Third European Summer University on History and Epistemology in Mathematical Education, Vol. 1*, pp. 153–167. Leuven/Louvain-la-Neuve, Belgium.

Eggermont, H. (1993). Gewichtige kabouters. *Uitwiskeling, 9*(3), 3–5.

Feys, R. (1995). Meten en metend rekenen. In L. Verschaffel & E. De Corte (eds.). *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie. Deel 3: Verder bouwen aan gecijferdheid,* pp. 99–135. Brussel/Leuven: Studiecentrum Open Hoger Onderwijs (StOHO)/Acco.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

National Council of Teachers of Mathematics (1990). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Poortvliet, R. & W. Huygen (1976). *Leven en werken van de kabouter*. Bussum: Van Holkema & Warendorf.

Van Dooren, W., D. De Bock & L. Verschaffel (2002). De lineariteitsillusie in kansrekening: een terreinverkenning. *Nieuwe Wiskrant, 21*(3), 46–52.

Wertheimer, M. (1945). *Productive thinking.* New York: Harper & Brothers.

Wiskunde in het dagelijks leven
Vakantiecursus 2003

De Vakantiecursus Wiskunde voor leraren in de exacte vakken in VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden is een initiatief van de Nederlandse Vereninging van Wiskundeleraren. Ook in 2003 organiseert het CWI een vakantiecursus. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit. Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar.

Data

Amsterdam: 22 en 23 augustus
Eindhoven: 29 en 30 augustus

Programma

Vrijdag

15.00-15.25 Ontvangst, koffie
15.25-15.30 Prof.dr. J. van de Craats. *Inleiding*.
15.30-16.15 Prof.dr.ir. P.J.G.Teunissen. *GPS en wiskunde.*
16.15-16.45 Pauze
16.45-17.30 Mw. dr. V. Rottschäfer. *De wiskunde van de rozenkweker*.
17.30-18.30 Warme maaltijd
18.30-19.15 Drs. R. Bosch. *Verkiezingsprocedures*.
19.15-19.45 Pauze
19.45-20.30 Prof.dr. H.J. van Zuylen. *Routekeuzegedrag in verkeersstromen*.

Zaterdag

10.00-10.45 Dr. E. van Zwet. *Statistische analyse van snelwegdata.*
11.15-12.00 Prof.dr. G.B. Huitema. *Nieuwe generatie telecommunicatietechnieken en -diensten*.
13.00-13.45 Ir. W.A. Timmer. *Aerodynamica en schaatsstrips*.
14.15-15.00 Drs. M.F.M. Nuyens en drs. R. Planqué. *De wiskunde van de eurodiffusie.*

Cursusgeld

Het cursusgeld bedraagt e 72,-. De syllabus en de maaltijden zijn hierbij inbegrepen.

Aanmelding

Deze kan elektronisch geschieden of door het aanmeldingsformulier achter in de brochure in te vullen en vóór 15 augustus 2003 op te sturen aan het CWI.
Meer informatie en online aanmelden:
http://www.cwi.nl/events/2003/VC2003/