

Minnaert revisited. Ofwel: ook in een standaardwerk als *De natuurkunde van het vrije veld* kunnen foutjes voorkomen. Of worden verklaringen achterwege gelaten die best te volgen zouden zijn. **Jan van de Craats** toont aan dat het geen gezichtsbedrog is dat de maan scheef staat en dat de wiskunde van de regenboog helemaal niet zo ingewikkeld is.

De maan en de regenboog

Een van de thema's van de Nationale Wiskundedagen 2003 was *Wiskunde en het vrije veld*, een titel die duidelijk verwijst naar de beroemde boekenreeks *De natuurkunde van 't vrije veld* van de astronoom M. Minnaert. In mijn voordracht binnen dat thema belichtte ik wiskundige aspecten van twee onderwerpen uit deel 1 van die reeks, namelijk de horens van de maan en het ontstaan van de regenboog. De onderstaande tekst is op die lezing gebaseerd.

De horens van de maan

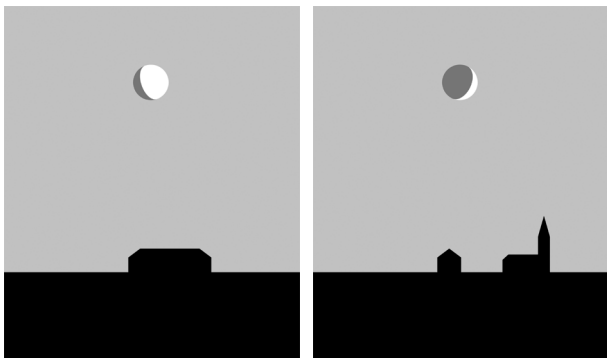


fig. 1 De maan bij zonsondergang

Op bladzijde 167 van Deel 1 van zijn boek *De Natuurkunde van 't vrije veld* wijst M. Minnaert op het merkwaardige verschijnsel dat het verlichte deel van de maan soms niet precies in de richting van de zon lijkt te wijzen. Hij beschrijft de waarneming 'dat de verbindingslijn der horens van de maan, tussen eerste kwartier en volle maan bijvoorbeeld, volstrekt niet loodrecht schijnt op de richting zon-maan; de loodrechte schijnt te moeten ombuigen om de zon te bereiken'.

In figuur 1 laten we als illustratie twee tekeningen van de maan bij zonsondergang zien. De linkerfiguur toont de maan tussen eerste kwartier en volle maan, en de rechterfiguur tussen nieuwe maan en eerste kwartier. In beide gevallen is de verbindingslijn van de horens (dat zijn de

uiteinden van het verlichte deel) niet verticaal, hoewel de zon bij zonsondergang precies in een horizontale richting staat.

Minnaert noemt het een vorm van gezichtsbedrog die verdwijnt zodra je een gespannen touwtje in de richting zon-maan voor je oog houdt. Dat laatste is gewoon niet waar. Wij zullen het verschijnsel, dat wel degelijk reëel en geen gezichtsbedrog is, met goede tekeningen illustreren en op die manier verhelderen. Het is een mooie oefening in ruimtelijk denken en zien.

Zon, aarde en maan

Figuur 2 geeft een schets van de situatie. De maan beweegt zich rond de aarde in een baan die in ruwe benadering als een cirkel kan worden opgevat met een straal van ongeveer zestigmaal de straal van de aarde. Een volledige omloop van de maan duurt ruim zevenentwintig dagen, dus per etmaal legt de maan een boog van ongeveer dertien graden af. Het vlak van de baan van de maan maakt een helling van ongeveer vijf graden met het vlak waarin de aarde rond de zon draait.

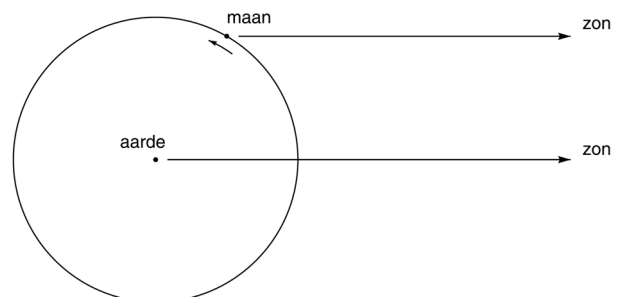


fig. 2 De aarde, de maan en de richting van de zon

Wat figuur 2 laat zien, is dat de onderlinge posities van zon, aarde en maan in de loop van een etmaal slechts weinig veranderen, en dat het ook nauwelijks wat uitmaakt vanuit welke plaats op aarde je de maan gedurende zo'n etmaal bekijkt: als het volle maan is, zie je overal op aarde waar de maan boven de horizon staat volle maan. En als op een bepaalde dag of nacht de verbindingslijn van

de horens niet loodrecht staat op de richting van de zon, moet je dat overal op aarde waar zon en maan beide te zien zijn, kunnen waarnemen. In het bijzonder moet het ook te zien zijn bij zonsopgang of bij zonsondergang, en dat is een situatie die we gemakkelijk kunnen tekenen.

Gezichtsbedrog of onbegrip?

Voordat we daaraan beginnen, is het goed om ons eerst af te vragen of de opmerking van Minnaert niet eerder berust op onbegrip van zijn kant dan op gezichtsbedrog. Want waarom zouden we de verbindinglijn van de horens loodrecht moeten zien op de zonsrichting?

Het verlichte deel van de maan is een halve bol die naar de zon gericht is. De zonnestrallen lopen immers, gezien de grote afstand van de zon praktisch evenwijdig. Wij zien die halve bol, afhankelijk van de maanstand, als nieuwe maan (een dunne sikkkel), eerste kwartier, volle maan of laatste kwartier, of een stand ertussenin.

Het vlak van de grote cirkel die de scheiding vormt tussen de verlichte en de onverlichte helft van het maanoppervlak staat loodrecht op de richting van de zon. Op die scheidingscirkel liggen ook de uiterste punten van de horens die we vanuit de aarde op de maanschijf zien. Hun verbindinglijn ligt dus eveneens in het scheidingsvlak, en die lijn staat daarom ook loodrecht op de zonsrichting. Daar lijkt Minnaert dus een punt te hebben. Maar alleen wanneer onze blikrichting loodrecht staat op het vlak van die lijn en de zonsrichting, zien we die rechte hoek ook echt als een rechte hoek. En dat gebeurt alleen bij halve maan, wanneer de maan precies in het eerste of het laatste kwartier staat. In alle andere gevallen zien we de verbindinglijn van de horens dus niet loodrecht op de zonsrichting, en daarmee is Minnaerts paradox verklaard.

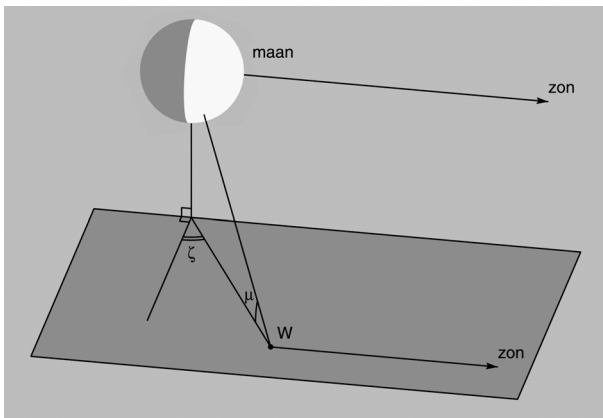


fig. 3 De maan en de waarnemer W op aarde

Vanuit de ruimte bekeken

Maar zien is geloven, en maken is begrijpen. We zullen daarom tekeningen maken van wat we dan wél zien als we naar de maan kijken. Maar eerst bekijken we de situatie vanuit een hoger standpunt. Vanuit vogelperspectief, zouden we haast zeggen, ware het niet dat we ons met de figuren 3 en 4 ver buiten de dampkring begeven.

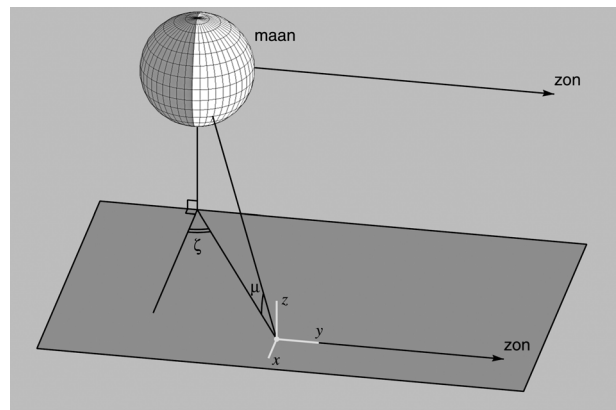


fig. 4 Dezelfde situatie als in figuur 3

Je ziet in die figuren de waarnemer W op aarde, het horizontale raakvlak aan het aardoppervlak ter plaatse, de maan en de richting van de zon bij zonsondergang. Als je je verplaatst in de positie van de waarnemer, zie je dat de maan in de getekende situatie ongeveer halverwege het eerste kwartier en de volle maan staat.

Omwille van de duidelijkheid is de maan veel te groot getekend: in werkelijkheid is de afstand van de maan tot de aarde ongeveer honderdmaal zo groot als de diameter van de maan, maar verder klopt de tekening wel. Hoek μ geeft de hoogte van de maan boven de horizon aan. Door hoek ζ te variëren, kunnen we de schijn gestalten van de maan van nieuwe maan ($\zeta = -90^\circ$) via eerste kwartier ($\zeta = 0^\circ$) naar volle maan ($\zeta = 90^\circ$) laten lopen. De grootte van hoek μ hangt, behalve van ζ , onder andere ook af van het seizoen en de geografische breedte op aarde van de waarnemer W . In feite is hier de precieze bepaling van de maanbaan in het geding, een van de moeilijkste problemen van de hemelmechanica.

In figuur 4 is het maanoppervlak voorzien van een bolcoördinatennet dat past bij een cartesisch (x,y,z) -coördinatensysteem waarin de waarnemer de z -as verticaal houdt en de y -as naar de ondergaande zon richt. In dit bolcoördinatennet loopt de scheidingslijn tussen licht en donker op de maan precies langs een meridiaan. Wanneer we in de bei-

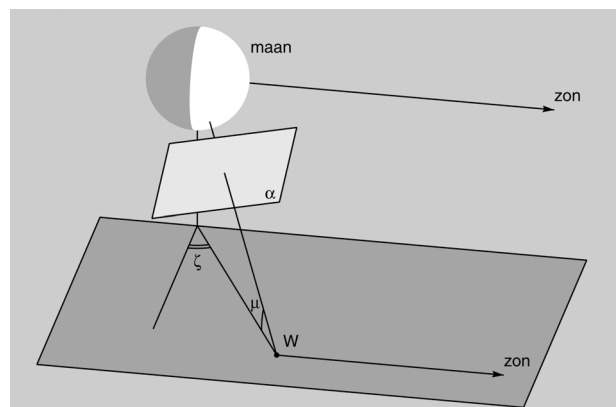


fig. 5 De waarnemer W die naar de maan kijkt, ziet de projectie van de maan op een denkbeeldig vlak α

de figuren de richting van de zon omkeren en op het maanoppervlak licht en donker verwisselen, krijgen we tekeningen van de situatie bij zonsopgang, met maangestalten die lopen van volle maan via laatste kwartier naar nieuwe maan.

Loodrechte projectie

Om te tekenen hoe de waarnemer W de maan ziet, denken we ons een vlak α in dat loodrecht staat op de blikrichting (zie figuur 5). Projectie van de maan op α geeft dan het gewenste beeld. En omdat de maan zo ver weg staat, maakt het niet uit of we daarvoor een centrale projectie vanuit W nemen, of een parallelprojectie in de blikrichting. Dat laatste is gemakkelijker te programmeren, en het resultaat is in figuur 6 te zien. Het meegeprojecteerde bolcoördinatennet laat duidelijk zien waarom de verbindinglijn van de horentjes als regel niet verticaal staat. De grootte van hoek ζ bepaalt langs welke meridiaan de scheidslijn tussen licht en donker valt. De tekeningen van figuur 6 zijn, verkleind en zonder coördinatennet, in figuur 1 opgenomen.

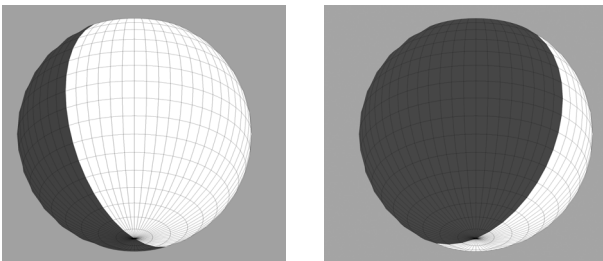


fig. 6 De maan zoals de waarnemer die ziet in de situaties van figuur 1. In de linkerfiguur is $\zeta = 42^\circ$, in de rechterfiguur is $\zeta = -42^\circ$. In beide figuren is $\mu = 27^\circ$ genomen.

De wiskunde van de regenboog

In Deel I van zijn boek *De natuurkunde van 't vrije veld* besteedt M. Minnaert op pagina 184 e.v. veel aandacht aan de ontstaanswijze en de fysische eigenschappen van de regenboog. De wiskundige afleidingen ervan laat hij echter achterwege, waarschijnlijk om zijn lezers niet al te zeer af te schrikken. Toch is het interessant om zulke afleidingen wél te geven. Daarbij blijken, naast de brekingswet van Snellius, slechts elementaire meetkunde en de afgeleide van de arcsinusfunctie een rol te spelen.

Minnaert legt uit dat de regenboog ontstaat door breking van het zonlicht in een wolk van kleine regendruppels. De boog maakt deel uit van een cirkel die zich, als je hem in gedachten volledig maakt, voor meer dan de helft onder de horizon bevindt. Het middelpunt van die cirkel is precies het tegenpunt van de zonsrichting, dat wil zeggen dat de verbindinglijn van de zon naar het oog van de waarnemer, als je hem in gedachten verlengt tot in de aarde, een as vormt waarop als een wiel de regenboogcirkel zit. En de verbindingslijnen van het oog met de regen-

boog vormen een kegel met een halve tophoek van ongeveer 42 graden. Minnaert zegt verder: 'Naarmate de zon lager komt te staan, stijgt het tegenpunt, dus tevens ook de gehele regenboog, terwijl hij zich als een steeds toeneemend gedeelte van de cirkelomtrek boven de gezichtseinder verheft, en bij zonsondergang een halve cirkel is geworden. Anderzijds verdwijnt hij geheel onder de gezichtseinder als de zon hoger dan 42 graden staat: dit is de reden waarom in onze gewesten niemand ooit een regenboog in de zomer omstreeks middagtijd heeft gezien.'

De regenboog als volledige cirkel kan men zien wanneer men in een vliegtuig boven een regenwolk vliegt. De schaduw van het vliegtuig bevindt zich dan in het middelpunt van de cirkel.

Lichtbreking in een druppel

Om te verklaren hoe de regenboog ontstaat, kijken we hoe een lichtstraal in een waterdruppel, die in vallende toestand een zuivere bolvorm heeft, gebroken wordt. Figuur 7 toont die stralengang voor een straal die na breken en éénmaal terugkaatsen de druppel weer verlaat. Uiteraard zal bij elk van de beide brekingspunten een gedeelte van het licht weerkaatst worden, en ook zal bij het terugkaatsingspunt een gedeelte van het licht via breking naar buiten treden, maar in figuur 7 zijn die straalgedeelten niet getekend. Wij zullen ze voorlopig buiten beschouwing laten.

De brekingswet van Snellius zegt dat bij de overgang van lucht naar water lichtbreking optreedt volgens de formule:

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \alpha$$

waarbij α de brekingsindex is, en ϑ_1 en ϑ_2 de hoeken zijn die de lichtstraal vóór, respectievelijk na breking met de normaal op het grensvlak maakt. De brekingsindex α hangt af van de golflengte λ van het licht. Zoals we zullen laten zien, danken we aan die afhankelijkheid de kleuren van de regenboog.

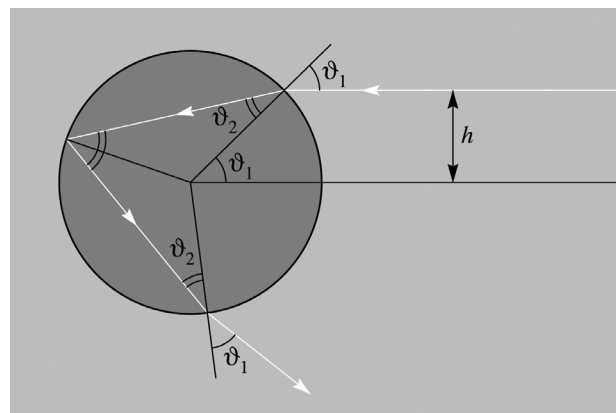


fig. 7 Stralengang van een lichtstraal die na één keer terugkaatsen de druppel weer verlaat

In BINAS vinden we de volgende waarden:

λ (nm)	kleur	α
687	rood	1.330
589	geel	1.333
486	blauw	1.337
434	violet	1.341

Als we in figuur 7 de stralengang volgen, zien we dat de invallende en de uittreedende straal (na breking, terugkaatsing en opnieuw breking) een hoek met elkaar maken van

$$(\vartheta_1 - \vartheta_2) + (180^\circ - 2\vartheta_2) + (\vartheta_1 - \vartheta_2) = 180^\circ + 2\vartheta_1 - 4\vartheta_2.$$

In de getekende situatie is $\vartheta_1 \approx 46^\circ$ en $\vartheta_2 \approx 33^\circ$ zodat die hoek dan ongeveer 140° is. De hoeken ϑ_1 en ϑ_2 hangen af van h , de afstand van de invallende lichtstraal tot de ermee evenwijdige lijn door het middelpunt van de druppel. Als we de straal van die druppel op 1 stellen, geldt $h = \sin \vartheta_1$, en uit de wet van Snellius volgt dat dan $\sin \vartheta_2 = h/\alpha$. Dit betekent dat de hierboven gevonden hoek tussen invallende en uittreedende straal ook een functie van h is, en wel, in radialen uitgedrukt:

$$F(h) = \pi + 2\arcsin h - 4 \arcsin \frac{h}{\alpha}.$$

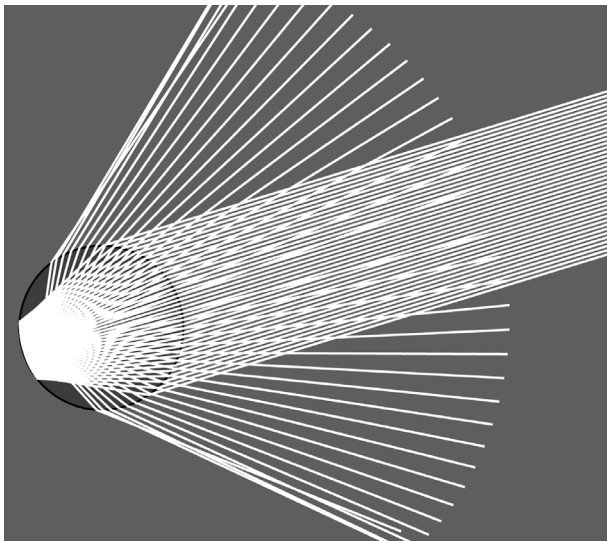


fig. 8 *Verstrooiing van een evenwijdige bundel monochromatisch licht in een waterdruppel*

In figuur 8 hebben we de stralen van een evenwijdige bundel monochromatisch rood licht (golflengte $\lambda = 687$ nm, dus brekingsindex $\alpha = 1.330$) getekend die, volgens het recept van figuur 7, na één keer terugkaatsen de druppel weer verlaten. Je ziet hoe de stralen van de bundel, die van rechtsboven de druppel binnenkomt, na terugkaatsen uitwaaiëren, maar het opmerkelijke is dat de waaier naar buiten toe twee keerlijnen heeft. $F(h)$ bereikt blijkbaar

een extreme waarde voor zekere $h < 1$. Wat is daar aan de hand? Wel, terwijl de lichtintensiteit van de uitwaaiërende bundel teruggekaatsd licht in het algemeen zwak is (de stralen liggen ver uit elkaar), treedt er vlak bij die extreme waarde juist een lichtconcentratie op. Ook in figuur 8 is dat goed te zien. Vlak in de buurt van de keerlijnen bevinden zich relatief veel rode lichtstralen. We moeten ons hierbij wel realiseren dat de druppel eigenlijk geen cirkel is, maar een bol, zodat de keerlijnen in werkelijkheid een omwentelingskegel vormen, met langs die kegel een sterke concentratie van rood licht.

De waarde van h die hoort bij de extreme stralen, vinden we door de afgeleide $F'(h)$ nul te stellen. Dat levert de vergelijking

$$\frac{2}{\sqrt{1-h^2}} = \frac{4}{\alpha \sqrt{1-\left(\frac{h}{\alpha}\right)^2}}$$

met als oplossingen

$$h = \pm \sqrt{\frac{4-\alpha^2}{3}}.$$

Voor $\alpha = 1.330$ geeft dit $h = \pm 0.8624$ met $F(h) = \pi \mp 0.74205$ radialen, corresponderend met hoeken van 180 ∓ 42.52 graden. De halve tophoek van de in de vorige alinea genoemde kegel is dus 42.52 graden. Het is niet toevallig dat dit in goede overeenstemming is met de waarde van 42 graden die Minnaert noemt voor de hoek waaronder we de regenboog zien. Maar hoe dat verband tussen de kleine kegeltjes uit de druppels en de grote kegel van de regenboog precies zit, zullen we pas in de volgende paragraaf uitleggen.

We hebben nu het geval van een bundel rood licht behandeld. Aan de andere kant van het spectrum vinden we bij violet licht ($\alpha = 1.341$) de waarde $h = \pm 0.8567$ voor de extreme stralen, en een halve kegeltophoek van 40.93 graden.

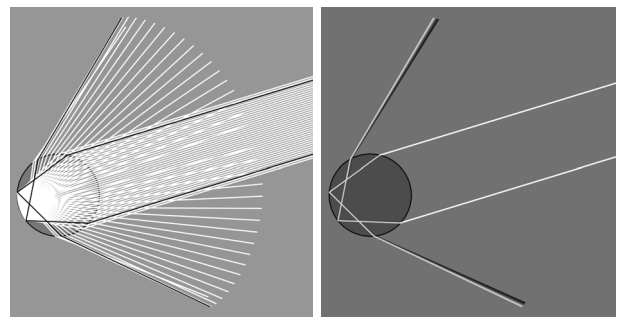


fig. 9 *Links: rode lichtbundel. Rechts: bundel van verschillende kleuren.*

De linkerhelft van figuur 9 laat opnieuw de rode lichtbundel zien, met in het zwart de twee extreme stralen die, zoals we hebben uitgerekend, behoren bij $h = \pm 0.8624$. De rechterhelft van de figuur toont de extreme stralen voor een aantal verschillende kleuren. Elke kleur heeft zijn ei-

gen kegeltje van geconcentreerd licht. De as is steeds de lijn door het middelpunt van de druppel in de richting van het invallende licht, maar de halve tophoek hangt af van de kleur, en varieert tussen 40.93 graden (voor violet licht) en 42.52 graden (voor rood licht).

Van druppel naar regenboog

Wat is er nu aan de hand wanneer wij een regenboog zien doordat de zon op een wolk van regendruppeltjes schijnt? We staan dan ongeveer met onze rug naar de richting van de zon, en kijken naar de regenwolk die door de zon beschenen wordt. Wit zonlicht bevat alle kleuren, en elk druppeltje zendt dus kegeltjes van geconcentreerd licht in elke kleur uit. Elk kegeltje heeft zijn eigen halve tophoek die alleen van de kleur afhangt. Wanneer wij zo'n druppeltje precies onder diezelfde hoek zien, gemeten ten opzichte van het tegenpunt van de zonsrichting, dan treffen juist de lichtstralen van die kleur ons oog. Zo zien we een rode kleur in alle druppeltjes waarvoor de hoek met de lijn door het tegenpunt van de zon precies 42.52 graden is. Al die druppeltjes liggen op een grote kegelmantel met de lijn naar het tegenpunt van de zon als as en 42.52 graden als halve tophoek. Figuur 10 geeft er een impressie van. De zonnestrallen komen weer van rechtsboven, en links bevindt zich een wolk van waterdruppeltjes. De rode lichtstralen zijn afkomstig van de druppeltjes die op de bijbehorende kegelmantel liggen. Bij het oogpunt is ter illustratie ook een topje van de volledige rode kegel getekend.

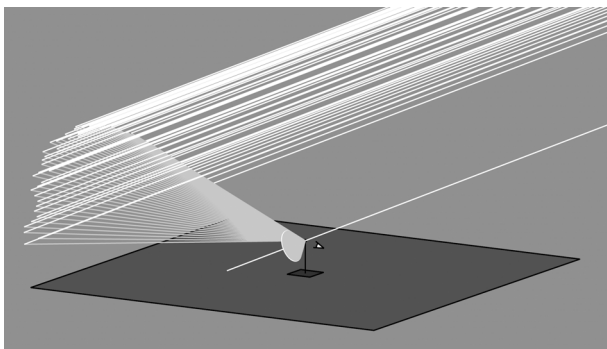


fig. 10 De rode lichtkegel bij het ontstaan van een regenboog in een door zonlicht beschenen regenwolk

Wat voor rood geldt, geldt natuurlijk ook voor iedere andere kleur. Alleen is de tophoek van de kegel afhankelijk van de kleur: hoe kleiner de golflengte is, des te kleiner is ook de tophoek. Het resultaat is dat we in de regenwolk een regenboog zien, met de rode kleur aan de buitenkant, en violet aan de binnenkant. Daarmee zijn de vorm, de plaats, de kleuren en de breedte van de regenboog verklaard.

Er is nog iets anders dat opmerkelijk is. Omdat de regenboog in feite in het oog gevormd wordt, ziet elk oog als het ware zijn eigen regenboog, zodat het gewone mechanisme waarin we met twee ogen de afstand van een voor-

werp kunnen schatten, in dit geval niet werkt. De regenboog is een ongrijpbaar fenomeen: je ziet niet de waterdruppeltjes waar de kleurscheiding plaatsvindt, maar een kleurenkegel zonder 'tastbare' lokalisatie. En bovendien moeten we bedenken dat de regeldruppeltjes ook allemaal naar beneden vallen, zodat het telkens weer andere druppeltjes zijn die aan de regenboog die wij aan de hemel zien staan, een bijdrage leveren.

De tweede regenboog

Wanneer de omstandigheden gunstig zijn, kan men boven de gewone regenboog, onder een hoek van ongeveer 51 graden nog een tweede regenboog waarnemen, concentrisch met de eerste, maar in het algemeen zwakker, en met de kleuren precies omgekeerd, dus met rood aan de binnenzijde en violet aan de buitenkant. Die boog is afkomstig van lichtstralen die binnen een druppeltje niet éénmaal, maar tweemaal teruggekaatst zijn.

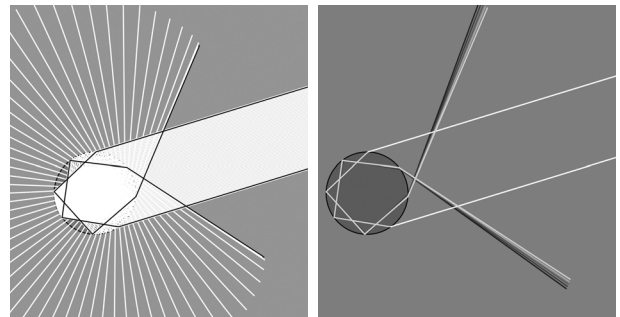


fig. 11 Stralengang van bundels licht die in een druppel tweemaal wordt teruggekaatst

Figuur 11 toont, analoog aan figuur 9, de stralengang in dit geval. Ook hier is weer sprake van keerlijnen in de uitwaaiierende bundel, en de berekening van de bijbehorende hoek gaat op precies dezelfde wijze. De hoek tussen invallende en uittreedende lichtstraal is nu (er treedt binnen de druppel twee maal terugkaatsen op)

$$(\vartheta_1 - \vartheta_2) + 2 \times (180^\circ - 2\vartheta_2) + (\vartheta_1 - \vartheta_2) = 360^\circ + 2\vartheta_1 - 6\vartheta_2$$

of, als functie van h , en uitgedrukt in radialen:

$$F(h) = 2\pi + 2\arcsin h - 6 \arcsin \frac{h}{\alpha}$$

Nul stellen van de afgeleide geeft als waarden van h voor de extreme straal

$$h = \pm \sqrt{\frac{9 - \alpha^2}{8}}$$

Voor rood licht ($\alpha = 1.330$) geeft dit $h = \pm 0.9507$ met $F(h) = 2\pi \mp 2.26716$, corresponderend met hoeken van 360 ∓ 129.90 graden. De halve tophoek van de kegel is dan $180 - 129.90 = 50.10$ graden. Bij violet licht ($\alpha = 1.341$) vinden we $h = \pm 0.9488$ voor de extreme stra-

len met daarbij een halve tophoek van 52.97 graden. In figuur 11 zijn in de rechterfiguur de extreme stralen voor een aantal verschillende kleuren getekend.

Waarom er geen derde regenboog is

Een soortgelijke berekening ligt ten grondslag aan figuur 12, waarin we de extreme stralen bij verschillende kleuren hebben getekend na driemaal terugkaatsen binnen de regendruppel. We zien dat de stralen nu ongeveer in dezelfde richting doorlopen als de invallende zonnestrallen, en dat betekent dat je ongeveer tegen de zon in zou moeten kijken om die ‘derde regenboog’ te zien. Dat lukt natuurlijk niet, nog afgezien van het feit dat de intensiteit van de kleuren sterk zal zijn afgenomen omdat er bij elke terugkaatsing ook licht door breking uit de druppel verdwijnt.

Tot slot merken we op dat we, zoals zo vaak bij toegepaste wiskunde, heel wat details van de werkelijkheid hebben vereenvoudigd of verwaarloosd. Zo hebben we geen aandacht besteed aan interferentieverschijnselen en aan de invloed van de diameter van de waterdruppels, omdat het hierbij gaat om factoren die slechts van secundair belang zijn. Evenmin hebben we rekening gehouden met het feit dat de zonnestrallen niet volmaakt evenwijdig lo-

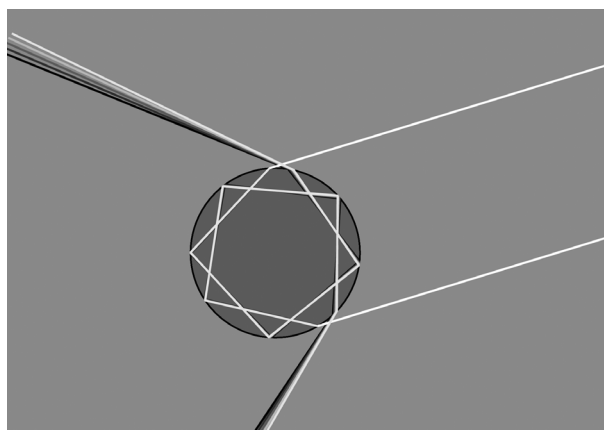


fig. 12 De extreme stralen voor een aantal verschillende kleuren na driemaal terugkaatsen binnen de druppel

pen. Bij een preciezer bestudering van regenboogverschijnselen mogen deze zaken niet verwaarloosd worden. Wie hier meer over wil weten, moet Minnaerts volledige tekst bestuderen en verdere bronnen raadplegen.

*Jan van de Craats, KMA, UvA, OU
email: J.vd.Craats@mindef.nl*

Voorronde A-lympiade en B-dag

Op vrijdag 28 november 2003 vinden zowel de voorronde van de vijftiende wiskunde A-lympiade als ook de vierde wiskunde B-dag plaats. De wiskunde B-dag bestaat uit één ronde op de scholen. De wiskunde A-lympiade kent ook een internationale finale; deze wordt gehouden in maart 2004.

In september ontvangen alle scholen voor voortgezet onderwijs per post aanmeldingsformulieren voor beide wedstrijden. Aanmelden is dan ook mogelijk via de websites: www.fi.uu.nl/Alympiade en www.fi.uu.nl/wisbdag.

De Wiskunde A-lympiade is een wedstrijd bedoeld voor leerlingen uit 5 HAVO of 5/6 VWO met wiskunde A (A1 of A1,2) in hun profiel, die het leuk vinden om in teamverband (drie of vier leerlingen) een uitdagend probleem aan te pakken. De voorronde duurt één dag en wordt in maart gevolgd door een finaleweekend op de Veluwe waaraan

de twaalf beste teams mee mogen doen. Aan de finale doen ook teams uit het buitenland mee.

De Wiskunde B-dag is de ‘wiskunde B-variant’ van de A-lympiade, het is een wedstrijd voor leerlingen in 5 HAVO en 5/6 VWO waarin vaardigheden als probleemoplossen, kritisch beschouwen van modellen, mathematiseren, logisch redeneren, argumenteren en samenwerken centraal staan, kortom: net als bij de Wiskunde A-lympiade, met dit verschil dat de Wiskunde B-dag bedoeld is voor leerlingen met wiskunde B. De opdracht waaraan de leerlingen werken is technisch-exact georiënteerd en sluit daarmee aan op de N-profielen; er ligt, in vergelijking met de Wiskunde A-lympiade, meer nadruk op de gebruikte wiskunde.

De Wiskunde B-dag heeft geen finale; uit de beste werkstukken worden door een jury de winnaars bepaald.