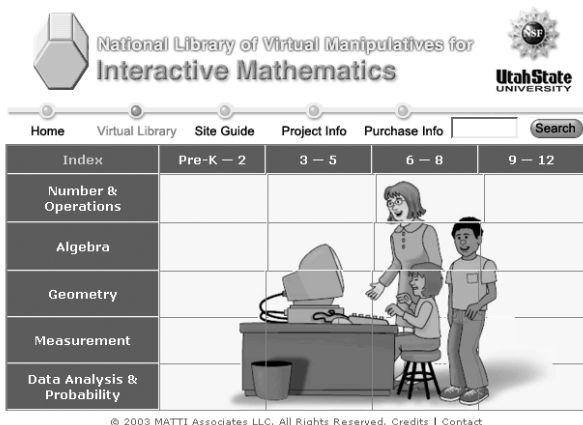


De 'National Library of Virtual Manipulatives for Interactive Mathematics'. Dat is de volledige naam van een Amerikaanse site vol met wiskunde applets. **Gerard Koolstra** neemt u mee naar deze site en bekijkt de verschillen en de overeenkomsten met het Nederlandse equivalent: 'Wisweb'.

## Wurls13

Dit keer een Wurl gewijd aan één site, namelijk: <http://matti.usu.edu> met de prachtige titel 'National Library of Virtual Mathematics for Interactive Mathematics'. De site is gemaakt in het kader van een driejarig project dat gefinancierd werd door de National Science Foundation en uitgevoerd op de Utah State University. Het is aardig om deze site te vergelijken met wisweb ([www.wisweb.nl](http://www.wisweb.nl)), omdat er veel overeenkomsten, maar ook duidelijke verschillen zijn.



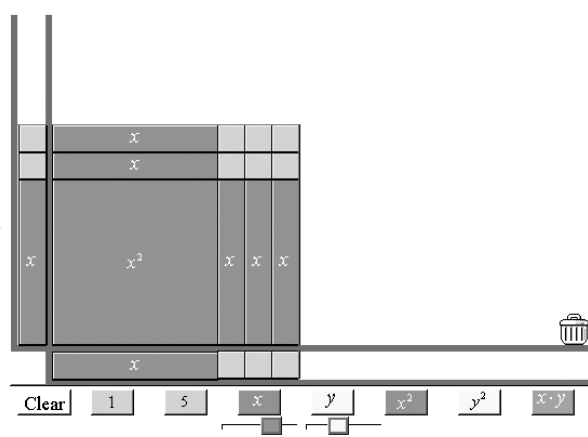
Verreweg het belangrijkste onderdeel van de site is de 'Virtual Library', waar gezocht kan worden op onderwerp (onder andere Number & operations, Algebra, Geometry) en 'doelgroep'.

In Nederland is het onderwijssysteem zo ingewikkeld, dat een bruikbare indeling in doelgroepen niet zo eenvoudig is. In de Verenigde Staten hanteert men gewoon de 'grades'. Daarop afgaand gaat het om materiaal voor leerlingen van zes tot achttien jaar. Over de indeling valt trouwens wel wat aan te merken, sommige applets worden wel erg makkelijk geschikt geacht voor 'alle leeftijden', en met de indeling in onderwerpen wordt soms ook erg ruim omgegaan, maar dit terzijde. Bij elk applet horen opdrachten ('activities'), uitleg over de werking van het applet ('instructions'), informatie voor de leerkracht of de ouders, en een link naar de bijbehorende eindtermen ('standards').

Tijd voor een wat nader onderzoek.

## Algebra

*Algebra Tiles* is een applet waarmee je algebraïsche expressies – zoals bijvoorbeeld  $(x+3)(x+2)$  – kunt visualiseren. Daar zijn er meer van, met name ook op wisweb<sup>1</sup>.



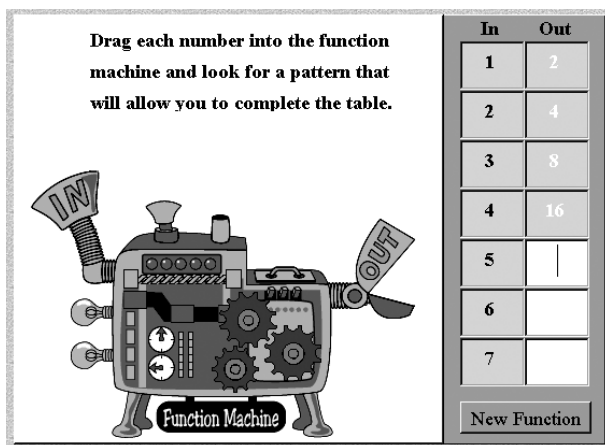
De schermafbeelding geeft een indruk hoe zo'n visualisering eruit kan zien. Alles wordt voorgesteld door rechthoeken (die uiteraard vierkant kunnen zijn). Er kan gewerkt worden met twee onafhankelijke variabelen  $x$  en  $y$ , die ook echt variabel zijn. Met behulp van schuifjes kunnen de waarden onafhankelijk van elkaar en tegelijkertijd aangepast worden, zij het binnen vrij strikte grenzen – tussen ruim 1 en 8. Kleuren spelen een belangrijke rol. Constante waarden zijn groen, variabele zijn rood ( $x$ ,  $x^2$ ), blauw ( $y$ ,  $y^2$ ) of als logische mengkleur paars ( $xy$ ). Politieke bijbetekenissen van deze kleuren spelen buiten Nederland vermoedelijk nauwelijks een rol.

Via *Instructions* wordt uitgelegd hoe het applet bediend moet worden, maar het meeste wijst zichzelf, of wordt duidelijk bij de opdrachten (*Activities*). De productvorm, in ons voorbeeld  $(x+3)(x+2)$ , is zichtbaar aan de randen in de horizontale en verticale sleuven. De uitgewerkte vorm (de stukkenvorm) is zichtbaar in het midden: De opdrachten gaan uiteraard over het uitwerken [zoals *Multiply the following binomials using algebra tiles:  $(x+1)(x+2)$ ;  $(x+1)(y+5)$ ;  $(x+y)(2x+3y)$ ], maar ook het ontbinden van een veelterm, met als lastigste:*

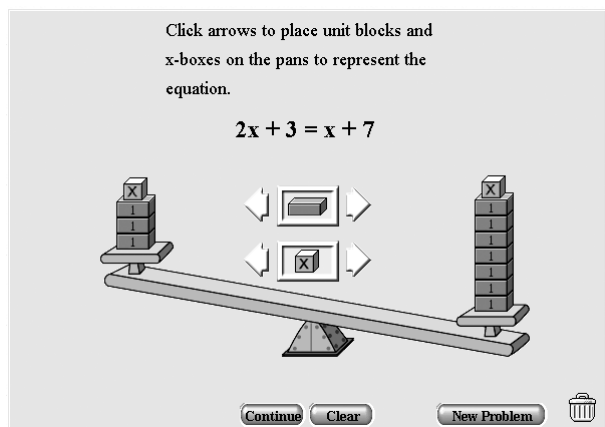
$xy + x + 3y + 3$  [voorgesteld door acht rechthoeken].

De informatie voor ouder/leraar (blijkbaar één pot nat) is helaas nog (steeds) niet beschikbaar, wel een link naar de algebra ‘kerndoelen’ (*Standards*), waarbij de functie die het applet kan vervullen in het onderwijs niet echt helderder wordt.

*Function Machine* haakt in op het ook in Nederland populaire ‘machientjeskarakter’ van functies – je gooit er iets in en er komt wat uit. De invoer zijn bij dit applet getallen (1, 2, 3, ...) en de uitvoer bestaat meestal uit getallen (maar soms ook uit letters). De speler wordt uitdrukkelijk gevraagd op de regelmaat te letten, en een gegeven tabel aan te vullen. De (ludieke) vormgeving doet me denken aan die van de Getallenmachine van rekenweb.<sup>2</sup> Inhoudelijk is er een groot verschil. De opzet is dat de spelers (meestal lineaire) verbanden herkennen en voortzetten. Wat dat betreft komt de spelvariant van stippel-algebra<sup>3</sup> misschien nog wel het dichtst in de buurt.



*Algebra Balance Scales* geeft een aardige visualisatie van het bekende balansmodel voor het oplossen van lineaire vergelijkingen.



Opmerkelijk is wel dat de mogelijkheid ontbreekt om beide kanten door hetzelfde getal te delen (of met hetzelfde getal te vermenigvuldigen). Ook is opmerkelijk dat bij het oplossen de blokjes niet meer verslept kunnen worden. De beschikbare opdrachten zijn beperkt in aantal, en

zeker in moeilijkheidsgraad.

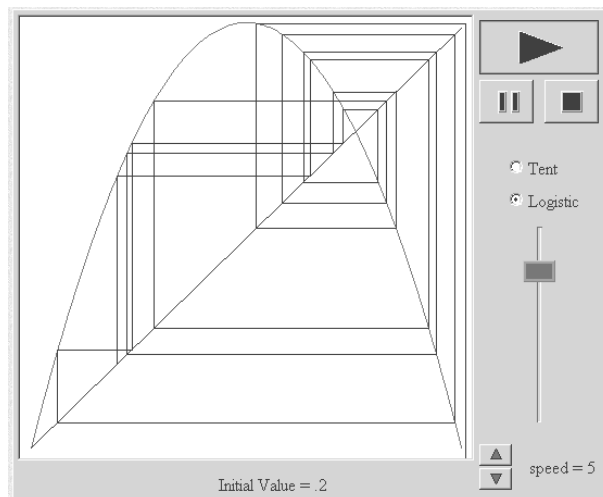
Uiterlijk zijn er wederom overeenkomsten met een rekenwebapplet<sup>4</sup>, inhoudelijk zou het vergelijkbaar moeten zijn met een applet als *Vergelijkingen oplossen met weegschaal*<sup>5</sup>.

Andere algebra-applets betreffen uiteenlopende onderwerpen als:

- Rekenen met behulp van staafjes, kubusjes en dergelijke
- Triomino's, Pentomino's en dergelijke
- Het valse munt probleem
- Tangrams
- Torens van Hanoi
- Wisselen of niet? (het bekende kansprobleem over de drie deuren).

## Meetkunde

De manier waarop de indeling wordt gehanteerd doet soms wat vreemd aan. Bij algebra is een probleem uit de kansrekening ondergebracht, bij meetkunde kom je het Webdiagram tegen, voor veel vwo-leerlingen geen onbekende meer: het komt bij dynamische modellen (discreet en continu) aan de orde.



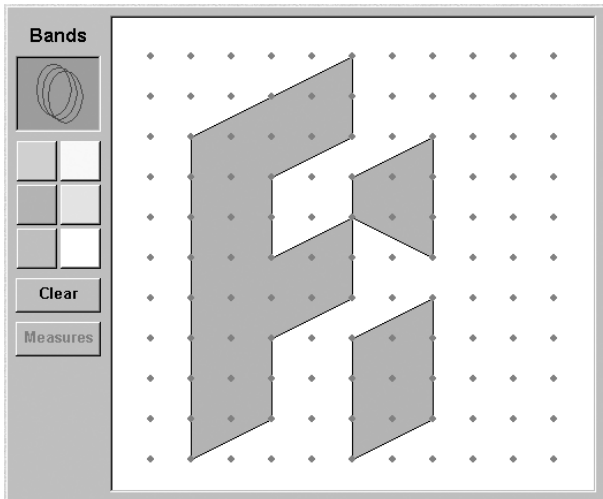
Overigens zijn de mogelijkheden van *Cob Web Plot* vrij beperkt. Je kunt er logistische groei mee simuleren, maar het is, mede door het ontbreken van opdrachten en achtergrondmateriaal, nauwelijks duidelijk wat er precies gebeurt.

Een vergelijking met wisweb-applet *Webgrafiek*<sup>6</sup> kan het ook niet goed doorstaan.

De andere applets gaan echt over meetkunde. Ze zijn te verdelen in vijf groepen:

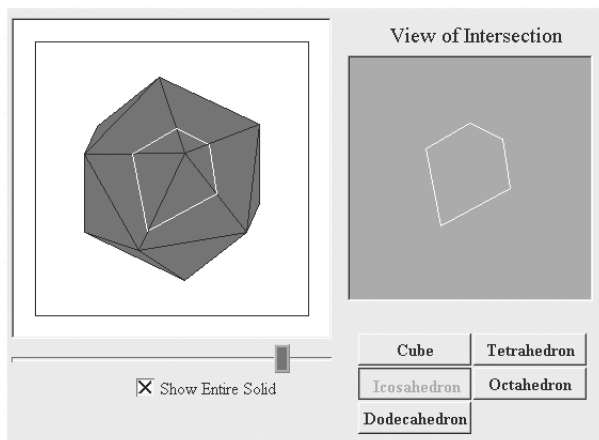
- Geoboard applets – virtuele spijkerborden
- Applets over fractals
- Applets over veelvlakken
- Applets over driehoeken
- Applet over transformaties – spiegeling, rotatie, translatie, enzovoort.

Applets over de gulden snede en betegelingen vallen een beetje buiten deze indeling.



*Geoboards* is kort gezegd een elektronisch spijkerbord waarmee met behulp van virtuele elastiekjes heel eenvoudig allerlei veelhoeken gemaakt (en desgewenst gekleurd) kunnen worden. Met een druk op de knop is de oppervlakte en omtrek van de figuur op te roepen. Een dergelijk bord biedt veel mogelijkheden om te experimenteren met oppervlakte en omtrek. Herontdekking van de beroemde formule van Pick<sup>7</sup> lijkt binnen bereik. Een van de bijbehorende opdrachten is het maken van een letter *W* met een bepaalde oppervlakte. Er zijn varianten, onder andere voor coördinaten en een isometrische die handig is bij het tekenen van driedimensionale figuren. Ik ken eigenlijk niets vergelijkbaars in Nederland. Misschien de moeite waard om eens over na te denken.

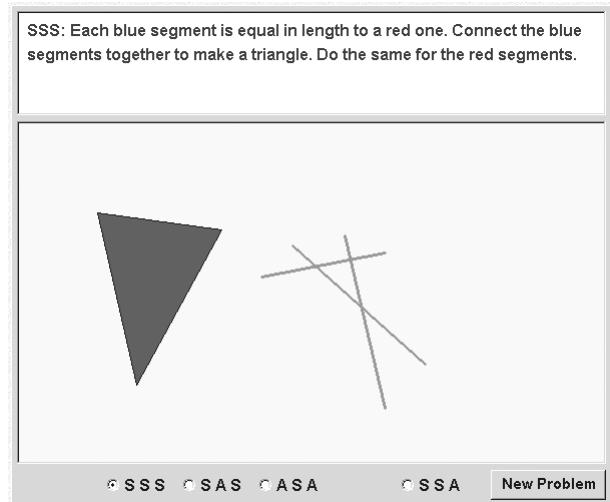
Hoewel de *fractal-applets* mooie plaatjes leveren, zijn ze naar mijn mening niet zo interessant. Ze geven weinig andere mogelijkheden om te kijken. De mogelijkheden om zelf te experimenteren zijn zeer beperkt, en er wordt de gebruiker weinig geboden wat echt verhelderend kan werken.



De applets over de *Platonic solids* geven gelukkig veel meer mogelijkheden tot interactiviteit. Vlakken, hoek-

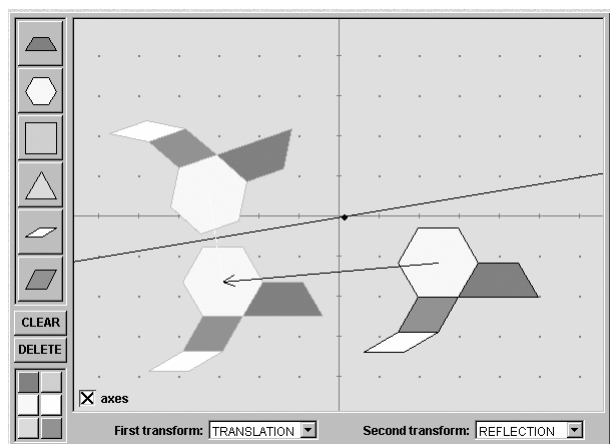
punten en ribben kunnen worden geteld (en zo de formule van Euler herontdekt), dualiteitsrelaties gelegd, en doorsnijdingen gevisualiseerd.

Een digitale versie van een eenvoudig legpuzzelbewijs van de stelling van Pythagoras ziet er vertrouwd uit. Minder vertrouwd, en op het eerste gezicht wat ouderwets, is een applet dat *Similar triangles* (congruentiegevallen) behandelt. Toch is het concept aardig en wellicht meer dan dat.



Na keuze van een van de congruentiegevallen (drie zijden, twee zijden met ingesloten hoek, twee hoeken met ingesloten zijde) krijgt men in twee kleuren de betreffende zijden/hoeken als gereedschap met de opdracht om daar twee driehoeken van te maken. De driehoeken blijken (al dan niet na een spiegeling) precies op elkaar te passen. In het 'pseudo-congruentiegeval' (twee paar gelijke zijden en een niet-ingesloten hoek) is de opdracht twee niet-congruente driehoeken te maken.

Misschien toch een aardige combinatie van klassieke meetkunde en moderne middelen?



In Nederland wat 'uit de mode' – zo lijkt het – maar in veel andere landen zijn *transformations* – spiegeling, translatie, rotatie en dergelijke – een belangrijk fundament van het onderwijs in de (vlakke) meetkunde. De di-

verse applets met dit thema maken veel verkenningen mogelijk. Niet alleen kunnen spiegelsymmetrie en rotatiesymmetrie makkelijk onderzocht worden, maar ook combinaties van transformaties, zoals twee spiegelingen die vervangen kunnen worden door één rotatie, kunnen met behulp van geschikte opdrachten goed onderzocht worden. Het is ook hier weer opmerkelijk dat opdrachten nog steeds ‘in de maak’ zijn.

Wordt het belang van goede opdrachten om applets op een goede manier te laten functioneren in het onderwijs onderschat, of betekent het dat men er juist erg veel tijd voor uittrekt om heel goede opdrachten te maken? Ik hoop het laatste, maar neig naar het eerste. Misschien daarover een andere keer meer.

Gerard Koolstra, [g.koolstra@chello.nl](mailto:g.koolstra@chello.nl)

## Noten

[1] Zie onder andere Geometrische Algebra 2D:

<http://www.fi.uu.nl/toepassingen/02019/toepassing.xml> en Legpuzzel-algebra Rechthoek: <http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00250/toepassing.xml>

- [2] Getallenmachine: <http://www.fi.uu.nl/toepassingen/03014/toepassing.xml>
- [3] Stippelalgebra opdrachten: <http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00299/toepassing.xml>
- [4] Fruitpuzzels: <http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00012/toepassing.xml>
- [5] Vergelijkingen oplossen met weegschaal (PB): <http://www.fi.uu.nl/toepassingen/02017/toepassing.xml>
- [6] Webgrafiek (voorheen chaos): <http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00120/toepassing.xml>
- [7] Voor driehoeken waarvan de hoekpunten op roosterpunten liggen is de oppervlakte gelijk aan  $B + \frac{1}{2}R - 1$ , met  $B$  het aantal roosterpunten binnen de driehoek, en  $R$  het aantal roosterpunten op de rand van de driehoek.

## Verschenen



Titel: *De Nederlandse Wiskunde Olympiade*  
 Auteurs: Jan van de Craats en Thijs Notenboom  
 Uitgever: Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade  
 ISBN: 90 76976 12 0  
 Prijs: e 12,-

Verkrijgbaar in de boekhandel of te bestellen op [olympiads.win.tue.nl/nwo/](http://olympiads.win.tue.nl/nwo/)