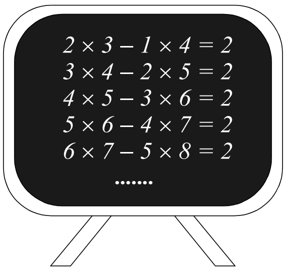
Wat te bewijzen is

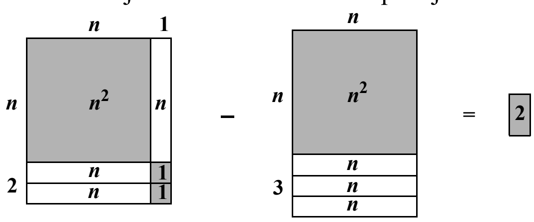
Rubriek



Een mooi rijtje sommen nietwaar? Aan leerlingen van bijvoorbeeld 2 VWO zou je kunnen vragen om te onderzoeken of dit eindeloos zo doorgaat en indien ja, waarom dat waar is. De tweede vraag is eigenlijk overbodig, want het antwoord is 'ja' en zonder redenering kun je dat nooit zeker weten. Als de leerling over voldoende kennis van algebra beschikt, zou een bewijs zo gepiept moeten zijn. Noem bijvoorbeeld het kleinste getal in het linkerlid n en er komt:

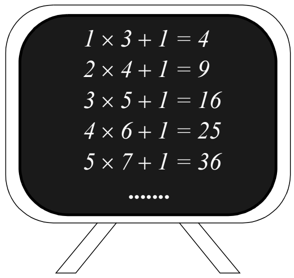
$$(n+1)(n+2) - n(n+3) =$$
$$(n^2+3n+2) - (n^2+3n) = 2$$

Dit voorbeeld is ontleend aan een oud (1969), maar meesterlijk boek (*Aanschouwelijke Algebra*) van W.W. Sawyer. De auteur gebruikt het rijtje sommen om leerlingen vermenigvuldigingen als $(n+1)(n+2)$ te leren uitvoeren.
Misschien wel dé manier om dit uit te lokken is om de leerling attent te maken op het rechthoeksmodel. Kan het aanschouwelijker dan in onderstaand plaatje?



Voor zo'n meetkundige uitleg is de Wisweb-applet Geometrische Algebra 2D geknipt! Met dat programma kan een rechthoek worden opgespannen door de pijlen $x + 1$ en $x + 2$ en die kan, via een klik met de muis, volledig worden gesplitst, zodat een figuur ontstaat die sterk lijkt op het plaatje links. Vervolgens kunnen de onderdelen worden losgemaakt, om als puzzelstukjes aan elkaar gelegd, te resulteren in de tweede rechthoek. Je houdt dan twee blokjes met oppervlakte 1 over; ik kan de lezer aanbevelen om dit even met de applet te doen.
Natuurlijk gaan de meeste leerlingen niet spontaan algebraïseren als ze worden geconfronteerd met het rijtje op het schoolbord hierboven, maar als dit probleem wordt voorgelegd in het kader van het gebruik van bedoelde applet, is er toch een gerede kans dat dit lukt.

Nog zo'n voorbeeld
Neem een (natuurlijk) getal in gedachten, tel daar 2 bij op, vermenigvuldig de uitkomst met het oorspronkelijke getal, tel bij het zo verkregen product nog eens 1 op en het resultaat is altijd een kwadraat!



Hetzelfde verhaal: de applet werkt prima om de regel te verklaren. Algebraïsch komt het neer op:

$$n(n+2)+1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

of eleganter nog:

$$(n-1)(n+1)+1 = n^2-1+1 = n^2$$

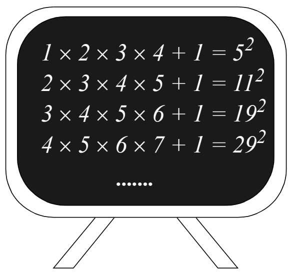
Het aardige van deze twee, voor het algebraonderwijs instructieve voorbeelden is dat je ze kunt combineren.
Als $n(n+3) = A$, dan $(n+1)(n+2) = A+2$, dus

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = A(A+2)$$

Met als conclusie:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (A+1)^2$$

Blijkbaar geldt de volgende stelling: als bij het product van vier opeenvolgende natuurlijke getallen het getal 1 wordt opgeteld, is het resultaat een kwadraat.
Weer een mooi rijtje op het schoolbord:



Vervanging van A door $n^2 + 3n$ geeft de identiteit:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n+1)^2$$

Een eenvoudige transformatie levert op:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)+1 = (n^2-3n+1)^2$$

Het product in het linkerlid is nu juist gelijk aan het aantal permutaties van vier elementen uit een groep van n.

Noteer ik het aantal permutaties van k elementen uit n als $P_k(n)$, dan komt er:

$$P_4(n) + 1 = (n^2 - 3n + 1)^2$$

Een algebraïsch probleem

Bovenstaande identiteit roept de vraag op of er meer te koop is van dat soort. Zijn er meer formules van de vorm:

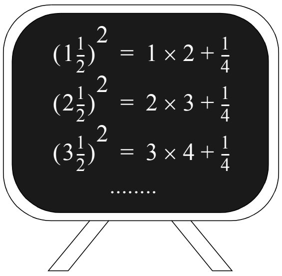
$$P_k(n) + c = [f(n)]^2$$

waarbij k en c constant (k natuurlijk, $c > 0$) zijn en $f(n)$ een polynoom in n is?
Omdat het polynoom in het rechterlid van *even* graad is, moet k (= graad van $P_k(n)$) een even getal zijn.

Voor $k = 2$ is er snel succes, want:

$$n(n-1) + \tfrac{1}{4} = (n - \tfrac{1}{2})^2$$

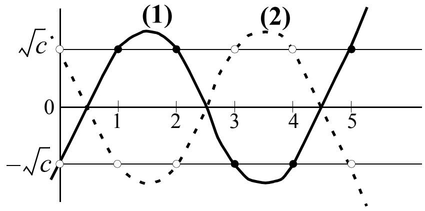
Hier past een (bekend?) rijtje bij:



Het zal blijken dat er buiten $k = 2$ en $k = 4$ geen oplossingen zijn voor bovenstaande 'polynoomvergelijking'.
Laat ik beginnen met $k = 6$.
Uit:

$$P_6(n) + c = [f(n)]^2$$

volgt dat f de graad 3 heeft, dus dat de grafiek van de reële functie $x \to f(x)$ elke horizontale lijn in ten hoogste drie punten snijdt. Omdat $P_6(n) = 0$ voor $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ zal de grafiek van f de lijnen $y = \sqrt{c}$ en $y = -\sqrt{c}$ elk in precies drie punten snijden. Omdat de grafiek van f ten hoogste twee toppen heeft, moet gelden $f(1) = f(2) = f(5)$ en $f(0) = f(3) = f(4)$. Er zijn dan twee mogelijkheden voor de grafiek, aangeduid met **(1)** en **(2)**:



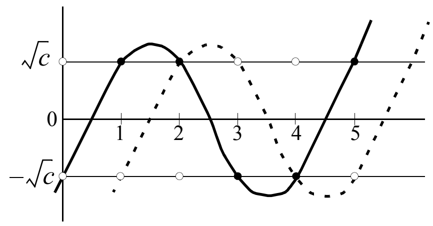
In geval **(1)** is de coëfficiënt van de hoogste macht gelijk aan 1, in geval **(2)** is de 'kopcoëfficiënt' gelijk aan −1.
Ik elimineer c nu uit de polynoomvergelijking.

$$\begin{array}{rrcl} & P_6(n) + c & = & [f(n)]^2 \\ & P_6(n-1) + c & = & [f(n-1)]^2 \\ \hline - & P_6(n) - P_6(n-1) & = & [f(n)]^2 - [f(n-1)]^2 \end{array}$$

Daaruit volgt:

$$\underbrace{6P_5(n-1)}_{\textbf{graad 5}} = \underbrace{[f(n) - f(n-1)]}_{\textbf{graad 2}}\underbrace{[f(n) + f(n-1)]}_{\textbf{graad 3}}$$

Het polynoom $P_6(n)$ is van de graad 5, heeft de nulpunten 1, 2, 3, 4, 5 en de kopcoëfficiënt is gelijk aan 6.
Let nu op de beide factoren in het rechterlid.
De veelterm $f(n) + f(n-1)$ is van de graad 3 en bij keuze **(1)** is de kopcoëfficiënt $1 + 1 = 2$.
De veelterm $f(n) - f(n-1)$ is van de graad 2 en de kopcoëfficiënt is dan $6 / 2 = 3$.
De grafieken van $x \to f(x)$ en $x \to f(x-1)$ snijden elkaar in de punten $(2, -\sqrt{c}\,)$ en $(4, \sqrt{c}\,)$ zoals direct af te leiden is uit de figuur.



Gevolg:

$$f(n) - f(n-1) = 3(n-2)(n-4)$$

$$f(n) + f(n-1) = 2(n-1)(n-3)(n-5)$$

Via optelling komt er:

$$2f(n) = 3(n-2)(n-4) + 2(n-1)(n-3)(n-5)$$

Dus: $2f(1) = 3 \cdot -1 \cdot -3 = 9$ en $2f(2) = 2 \cdot 1 \cdot -1 \cdot -3 = 6$ en dat is in strijd met $f(1) = f(2)$.

De gang van dit onderzoekje ontleen ik voor een deel aan het artikel 'Squares from Products of Consecutive Integers' van A. van der Poorten en G. Woeginger (*American Mathematical Monthly*, May 2002). Daarin wordt bewezen dat er buiten 2 en 4 geen even natuurlijk getal k bestaat waarbij de polynoomvergelijking:

$$P_k(n) + c = [f(n)]^2$$

een oplossing heeft. Het is een kwestie van generaliseren van het deels grafische verhaal voor $k = 6$.

Met $k = 2m \geq 4$ leidt de redenering via de grafiek tot:

$$f(n) - f(n-1) = m(n-2)(n-4)\ldots(n-2m+2)$$

$$f(n) + f(n-1) = 2(n-1)(n-3)\ldots(n-2m+1)$$

Hieruit volgt dan, na optelling en substitutie:

$$2f(1) = (-1)^{m-1} \cdot m \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3-2m)$$

$$2f(2) = (-1)^{m-1} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3-2m)$$

en omdat $f(1) = f(2)$ rest ons alleen de mogelijkheid $m = 2$, dus $k = 4$.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl