De terugkeer van een rubriek. **Aad Goddijn** heeft een drietal vraagstukken voor u bedacht. Het thema van de vragen is het vierkant. Vol verwachting ziet hij uw reacties tegemoet.

Drie keer vierkanten

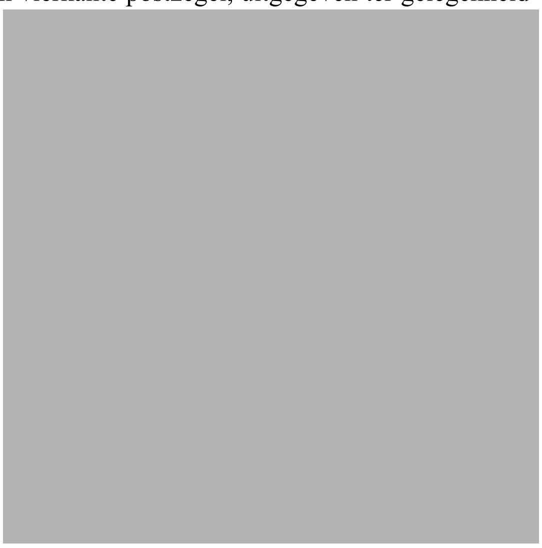
Recreatierubriek

Inleiding

De opgaven van deze recreatierubriek – de eerste na een lange stilte – hebben het vierkant als gemeenschappelijke basis. Vier gelijke zijden, vier gelijke hoeken; dat is de helft van de benodigde voorkennis aan meetkunde. Wie ‘vierkant’ zegt, denkt ‘Pythagoras’; en inderdaad, die is tweemaal van de partij, als andere helft van de voorkennis.

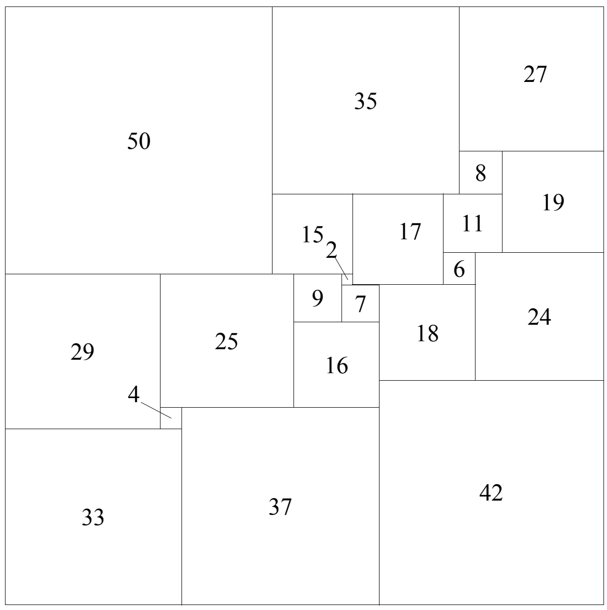
Elf vierkanten in één vierkant?

De eerste opgave met dank aan Ger Blauw, die op een envelop de hieronder afgebeelde postzegel opmerkte.
Een vierkante postzegel, uitgegeven ter gelegenheid van



het Internationaal Mathematisch Congres van 1998 in Berlijn. De achtergrond bestaat uit een spiraal die opgebouwd is uit de decimalen van p, op de voorgrond staat een samenstel van elf vierkanten. Die figuur hangt samen met het in puzzelkringen bekende begrip *volmaakt vierkant*. Een volmaakt vierkant is een vierkant dat verdeeld kan worden in een eindig aantal verschillende vierkanten; de figuur op de postzegel lijkt er zo een te zijn. In een *enkelvoudig* volmaakt vierkant is geen deelgroepje vierkanten dat een rechthoek vormt.

Het blijkt niet mee te vallen volmaakte vierkanten te vinden en er is zelfs ooit ‘bewezen’ dat ze niet bestaan. De ware zoekers gaven het ondanks dat bewijs niet op en er zijn heel wat volmaakte vierkanten gevonden. In 1978 hebben Bouwkamp en Duijvesteijn een volmaakt vierkant gevonden, dat opgebouwd is uit 21 deelvierkanten, volgens hun publicatie het kleinst mogelijke aantal. Zie onderstaande figuur waarin de zijden van de vierkanten zijn aangegeven.



Terug naar de postzegel. We gaan ervanuit dat de figuur verdeeld is in elf verschillende vierkanten, maar we kunnen er nu niet meer van uitgaan dat de totaalfiguur een vierkant is, we hebben hier hoogstens met een volmaakte rechthoek te doen.
Ger Blauw stelde zichzelf de volgende vraag, die hij ook beantwoordde:

Opgave 210
Wat zijn de onderlinge verhoudingen van de elf deelvierkanten in de postzegelfiguur? Hoe kunnen de zijden met zo klein mogelijke gehele getallen worden aangegeven?

Ger Blauw stuurde een elegante oplossing, met de vraag of er meer van dergelijke figuren zijn, en of er regelmaat is te vinden in die mogelijkheden. Ik schat die laatste vraag in als zeer lastig; de lezer die diep wil graven verwijs ik eerst naar de bronnen op dit gebied; die zijn makkelijk te vinden via Eric Weisstein's internet-encyclopedie voor wiskunde:

http://mathworld.wolfram.com/
PerfectSquareDissection.html.

In de volgende aflevering geef ik de oplossing van Ger Blauw, hopelijk naast die van anderen!

Pythagoreïsche drietallen, even anders

Het tweede probleem gaat over vierkantsgetallen, kwadraten. We weten dat de driehoek met zijden 3, 4 en 5 rechthoekig is; volgens propositie 48 van boek I van de *Elementen* van Euclides is dat zo omdat de vierkanten op 3 en 4 samen het vierkant op 5 vormen, $3^2 + 4^2 = 5^2$.
Zijn er meer van dergelijke drietallen van gehele getallen, en hoe kunnen we die vinden? Dat waren de vragen die een 86-jarige briefschrijver K. Lingsma zich stelde en waarvoor hij een oplossing voorlegde. Ik dacht dat de vraag al eerder beantwoord was en verwees onder meer naar de klassieke Grieks-Babylonisch-Indiase methoden om alle Pythagoreïsche drietallen te karakteriseren. Maar mijn briefschrijver was met dit kort-door-de-bocht antwoord bepaald niet geholpen, omdat hij van een iets andere probleemstelling uitging dan de traditionele.
Zijn vraag was in feite:

Opgave 211
Als ik al een positief geheel getal X heb, hoe vind ik bijhorende gehele positieve getallen Y en Z die aan

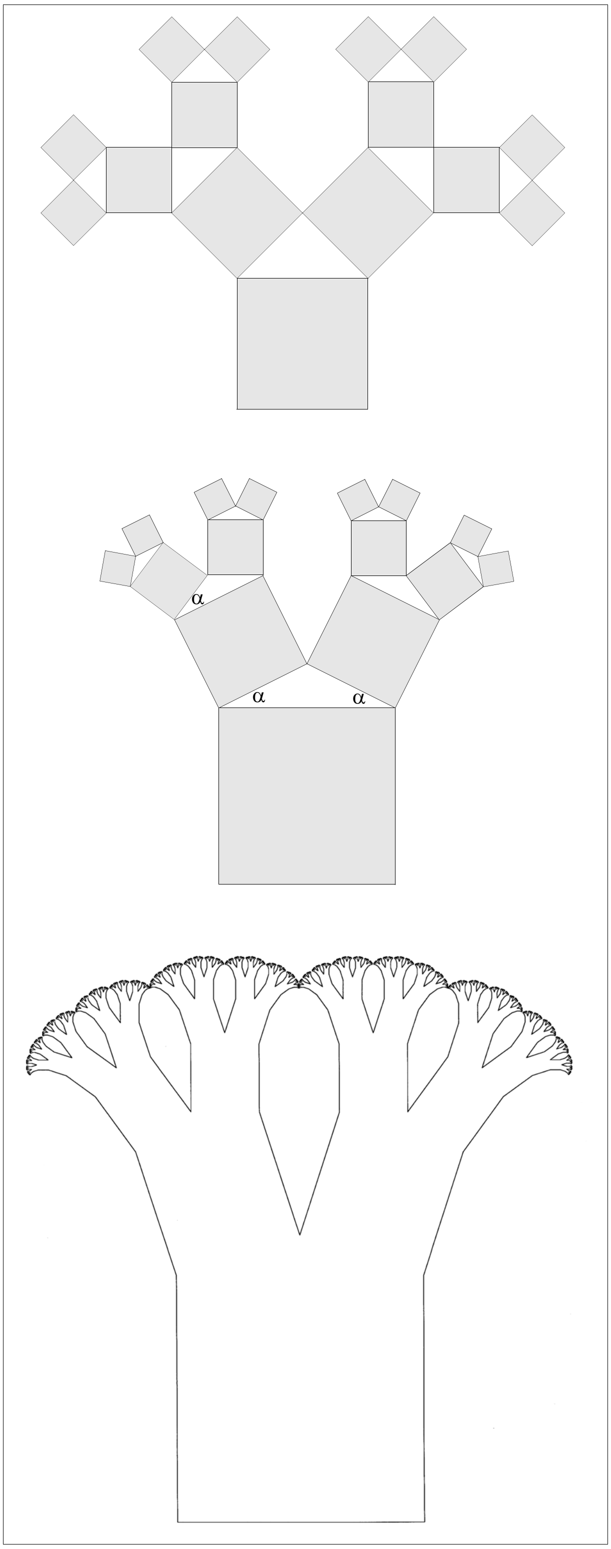
$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

voldoen, en hoe vind ik alle mogelijkheden?

De Griekse methode geeft de oplossingen bepaald niet mooi geordend naar X.

Voorbeelden in de correspondentie waren $X = 120120$ en $X = 255255$. Inzenders wordt aangeraden hun bewezen werkende technieken te beproeven met deze voorbeeldgetallen.
Het opmerkelijke van de prestatie van K. Lingsma is dat hij door slim kijken naar voorbeelden een oplossingsmethode vond. Volgende keer meer daarover, weer naast oplossingen van anderen.

De hoogte van de broccoli



In de volgende kolom staat bovenaan een vier jaar oude symmetrische Pythagoras-boom.
Het grote vierkant onderaan is eerst getekend, daarna is de 45-90-45 driehoek eropgezet met ook twee vierkanten. Vanuit die vierkanten gaat het verder. Hier zien we vier jaargangen van vierkanten, maar u stelt zich er makkelijk meer bij voor, liefst oneindig veel. Misschien is het beter om 4 de diepte van de boom te noemen.
In de tweede figuur is hetzelfde gedaan, maar de driehoeken hebben nu basishoek α.
Was ik bij de eerste Pythagoras-boom nog een niveau dieper gegaan, dan zouden de takken in het midden tegen elkaar komen; bij de tweede boom, met hoek α duidelijk kleiner dan 45°, is dat niet zo.

In de derde figuur is α weer anders, nu zijn van alle vierkanten op de onderste na alleen de zijkanten getekend en is tot niveau 10 doorgetekend. Broccoli, zonder meer.

De laatste figuur denken we ons als in het oneindige voortgezet; bij elke ‘verdieping’ ontstaan kleinere vierkantjes; er is een vaste verkleiningsfactor als α maar onder de 60° blijft en in die gevallen is de broccoli niet oneindig groot; enig nadenken over oneindige meetkundige reeksen met reden kleiner dan 1 laat dat zien. Een mooie manier om naar de broccoli-figuur te kijken is deze: hij bestaat uit een basisvierkant met daarop twee verkleinde kopieën van zichzelf.
In de derde figuur is het eigenlijk niet echt goed te zien, maar het lijkt erop dat de broccoli zichzelf in het midden overlapt, net als bij de Pythagoras-boom als we die hadden doorgetekend naar diepteniveau 5 en verder.
Vandaar:

Opgave 212
Onderzoek of de broccoli-figuur zichzelf overlapt zoals de Pythagoras-boom dat doet. Onderzoek of dat van α afhangt.

Als we α als variabele opvatten en we laten α kleiner worden, dan verandert door deze genetische manipulatie de vorm van de broccoli. De twee hoofdtakken neigen duidelijk naar elkaar, wat het totaal hoger zou moeten maken, maar ze worden ook smaller.
Vandaar:

Opgave 213
Wat zou het netto-effect daarvan zijn op de hoogte van de de broccoli?
Anders gezegd: laat het basisvierkant zijde 1 hebben. Hoe hangt de hoogte van de broccoli van α af?

In deze tekst heb ik de uitdrukking ‘oneindige meetkundige reeksen met reden kleiner dan 1’ laten vallen. Dat is niet als dwingende tip bedoeld. Opgaven 211 en 212 kunnen ook zonder dat soort fratsen aangepakt worden!

Aad Goddijn, Freudenthal Instituut

Oude Meesters – Reflecties op het didactische werk uit de jaren vijftig en zestig van Pierre van Hiele, Wim Bos, Rudolf Troelstra en Jan Nieland HKRWO Symposium 2003

Op zaterdag 17 mei 2003 vindt het jaarlijkse symposium van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs plaats.

Adres: Hogeschool Domstad, Koningsbergerstraat 9, Utrecht
Tijd: 10.15-16.00 uur

Programma
- Prof. Heinrich Bauersfeld (Bielefeld, Duitsland)
  Algemene inleiding: *What shall we do? – New demands for old perspectives*.
- Harrie Broekman en Pierre van Hiele
  Vectoren in en vanuit de visie van Pierre van Hiele. Over de methode ‘Van A tot Z’.
- Fred Goffree en Harm Jan Smid
  De klas kan verder. Het leerboek als hulpmiddel tot zelfwerkzaamheid.
- *De meetkundeboeken van Wim Bos (met video-interview van Wim Bos).*
- Wim Groen
  Van Euclides naar Felix Klein. Over het transformatiemeetkunde project van Rudolf Troelstra c.s.
- Tineke Brinkman en Jan Nieland
  Structuurrekenen, nog steeds ter zake?
- Tentoonstelling over boeken en materialen uit de jaren vijftig en zestig.
  Eenieder is uitgenodigd om een poster op te hangen en/of iets te exposeren.

Deelname door overmaking van ¤ 22,- op giro 4657326 t.n.v. HKRWO te Amsterdam (koffie, thee en lunch inbegrepen).
Contactpersonen: Ed de Moor, tel: 020-6121382, e-mail: e.demoor@fi.uu.nl of Sylvia Eerhart, tel. 030-2635575.

Het symposium wordt mede mogelijk gemaakt door subsidies van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW), de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO) en ondersteuning van het Freudenthal Instituut (FI).