In 1989 duikt het instrument dat de omslag van deze wiskrant siert op in Londen. Waarschijnlijk drie eeuwen geleden vervaardigd in Iran. Maar waar komt het idee vandaan? En moet de visie over de oorspronkelijkheid van de Islamitische wiskunde in onze middeleeuwen worden herzien? En terwijl u zelf met behulp van de bouwplaat uitzoekt waar de drie wijzen echt vandaan kwamen onthult **Jan Hogendijk** voor u:

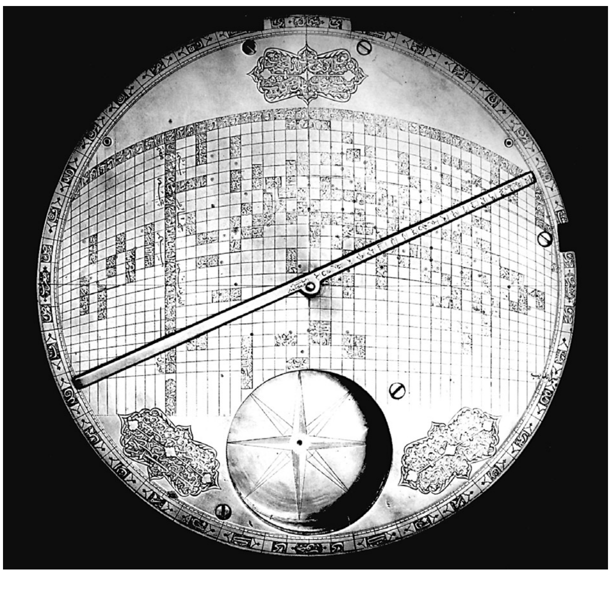
Het mysterie van de Mekkawijzers van Isfahan

De ontdekking van de Mekkawijzers

Elke Moslim is verplicht vijfmaal per dag te bidden met het gezicht naar Mekka. Al in de middeleeuwen hebben Islamitische wiskundigen daarom methoden ontwikkeld om de richting van Mekka in iedere plaats op aarde te vinden. Veel van die methoden zijn in een eerder artikel in de *Nieuwe Wiskrant* beschreven.[1] Sindsdien zijn er nieuwe ontdekkingen gedaan.

In 1989 werd bij Sotheby's in Londen een metalen Islamitisch instrument geveild van een onbekend type, met een diameter van circa 22,5 cm. Met dit instrument kan niet alleen de richting, maar ook de afstand tot Mekka gevonden worden. In 1995 vond iemand een tweede instrument van hetzelfde soort in een antiekwinkel in Parijs, en in 2001 is er een derde exemplaar gevonden, dat nu in het Sackler museum van de Harvard University wordt tentoongesteld. Uit de Perzische inscripties blijkt dat alledrie exemplaren in de zeventiende of achttiende eeuw in Isfahan in Iran zijn gemaakt.

Het instrument bestaat uit een wijzer die draait over een platte schijf, met daarop een soort kaart van een deel van de aarde. We zullen het instrument daarom Mekkawijzer noemen. Op de schijf zit ook een kompas, en op een van de instrumenten is een zonnewijzer met een scharnier aan de rand van de schijf vastgemaakt. We zullen niet verder ingaan op deze zonnewijzer, die met de rest van het instrument weinig of niets te maken heeft.



De 'Londense' Mekkawijzer. Foto David King

Meteen na de ontdekking in 1989 heeft de Mekkawijzer allerlei mensen enthousiast gemaakt. De vraag was onmiddellijk waar en wanneer dit prachtige instrument is bedacht. Volgens de veilingcatalogus van Sotheby's was 'de (kaart)projectie Westeuropees geïnspireerd', en was 'dit ongebruikelijke instrument ... interessant bewijsmateriaal voor de overname van Europese wetenschap en technologie in het achttiende-eeuwse Perzië'.[2] In 1999 publiceerde David King (Frankfurt) een omvangrijk boek[3] over de twee toen bekende Mekkawijzers. Volgens King is de Mekkawijzer al in de negende eeuw in Bagdad uitgevonden. In 2000 heeft Elly Dekker (Utrecht) aangetoond[4] dat op de schijf een retro-azimuthale kaartprojectie is gebruikt die in de moderne vakliteratuur pas sinds 1968 bekend is. Zij stelt dat het idee van de Mekkawijzer ook in de zeventiende eeuw in Frankrijk bedacht zou kunnen zijn en naar Isfahan werd gebracht door een van de vele Europeanen die in die tijd naar Iran reisden. Ook op de zonnewijzer die aan een van de instrumenten vastzit zijn Europese invloeden te zien.

De oorsprong van de Mekkawijzer is interessant voor de discussie over de originaliteit van de middeleeuws Islamitische wiskunde. De moderne wetenschapshistorici Wilbur Knorr en Morris Kline geloven dat de Islamitische cultuur vooral een doorgeefluik was van Griekse en Indiase wiskunde naar Europa.[5] Volgens Knorr is bijna alle meetkunde in middeleeuws Arabische teksten van Griekse oorsprong. We kunnen deze visie weerleggen door aan te tonen dat de Mekkawijzer door een middeleeuws Islamitisch wiskundige uitgevonden is. De oude Grieken kunnen de Mekkawijzer niet bedacht hebben, omdat de Islam in hun tijd nog niet bestond.

Een beschrijving van een instrument wordt pas leuk als de lezer zelf met het instrument kan spelen. Daarom zal ik hieronder de Mekkawijzer uitleggen aan de hand van

modellen die kunnen worden gekopieerd en uitgeknipt en zelfs in een les worden gebruikt. Daarna wordt met formules uit de moderne bolmeetkunde aangetoond dat de Mekkawijzer wiskundig exact is.
De rest van dit artikel gaat over de vraag waar het instrument vandaan komt. Ik zal enkele nieuwe wiskundige en historische invalshoeken presenteren op basis van speurwerk in Arabische teksten. Dit artikel is geschreven voor liefhebbers van wiskundige en historische puzzels, want het mysterie is nog (lang?) niet opgelost. Gelukkig maar, want zoals David King altijd zegt: 'Die ungelösten Probleme halten einen Geist lebendig, und nicht die gelösten.' [6]
Reacties zijn welkom op hogend@math.uu.nl.

Een model van de Mekkawijzer

Op de schijf van de Mekkawijzer zien we meer dan honderd puntjes waarbij plaatsnamen gegraveerd staan, en een rooster met verticale rechte lijnen en horizontale krommen. De rechte lijnen zijn meridianen tussen Marokko en India, en de krommen zijn parallellen tussen 10 en 52°. De meridianen en parallellen zijn getekend met intervallen van 2 graden. Op de wijzer staat een schaalverdeling in parasangen (de parasang is een oude Perzische afstandsmaat, ongeveer 5 km).

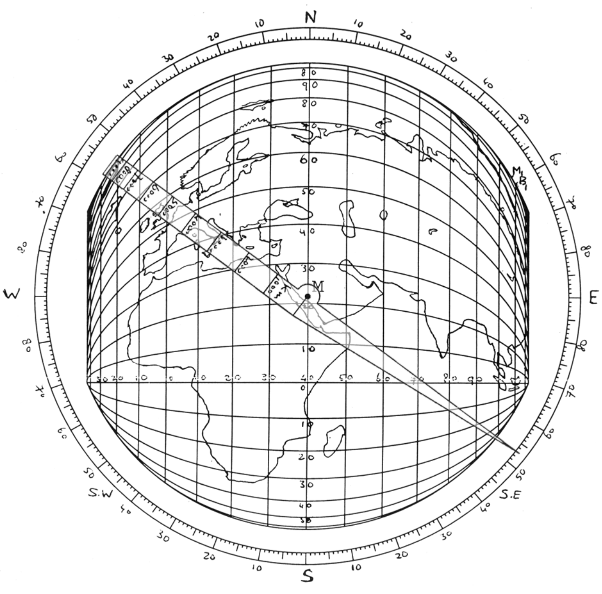


fig. 1

Op grond van wiskundige formules die hieronder uitgelegd zullen worden, heb ik het instrument uitgebreid tot de hele wereld. Op de website van de *Nieuwe Wiskrant* (www.fi.uu.nl/wiskrant/) staan tekeningen van de wijzer en van de helft van het aardoppervlak met middelpunt Mekka, met meridianen en parallellen voor elke 10 graden. Als de schijf op een stuk papier gekopieerd wordt en de wijzer op een overheadsheet, krijgen we een model van het instrument. We hebben nog een drukknoop of splitpen nodig om wijzer en schijf op de zwarte stip aan elkaar te hechten. Hoewel op de oorspronkelijke instrumenten geen kustlijnen staan, heb ik deze om didactische redenen in het model wel ingetekend.

Nu de werking: we draaien de wijzer totdat de rand van het gedeelte met de schaalverdeling door onze woonplaats loopt. Let op: we moeten wel de goede rand kiezen, namelijk die waarvan het verlengde door de stip in het midden gaat! De punt van de wijzer geeft nu op de rand van de schijf de richting van Mekka aan. De windrichtingen staan aangegeven en de rechte hoeken daartussen zijn in 90 graden verdeeld. Op de wijzer heb ik de afstand naar Mekka in kilometers vermeld.
Op de website van de *Nieuwe Wiskrant* staat ook een figuur voor de andere kant van de wereld. Ik heb deze modellen voor het eerst gepresenteerd op een workshop in New Orleans (USA). Diverse Moslims uit Texas en Californië zijn daarna met het instrument aan het werk gegaan om uit te vinden hoe zij in hun woonplaats moeten bidden!

Is de Mekkawijzer correct?

Om deze vraag te beantwoorden voeren we een coördinatensysteem op de schijf in (figuur 2). We nemen de oorsprong in Mekka, de positieve x-as naar het Oosten (E) op de rand van de schijf, en de positieve y-as naar het Noorden (N). We kiezen nu voor het gemak een plaats I ten Noordoosten van Mekka, bijvoorbeeld Isfahan. Bij deze plaats hoort een punt I' op de schijf met coördinaten (x, y). Noem d de afstand van I tot Mekka over een grootcirkel op aarde (in graden, 1 graad $\approx$ 110 km), en q de hoek tussen de richting van Mekka (de *qibla*) en het Zuiden. We rekenen q positief als Mekka in het Westen ligt (voorbeeld: Isfahan), negatief als Mekka in het Oosten ligt (voorbeeld: Utrecht). Als de wijzer precies over I' ligt, zoals in figuur 2, maakt hij een hoek q met de y-as.

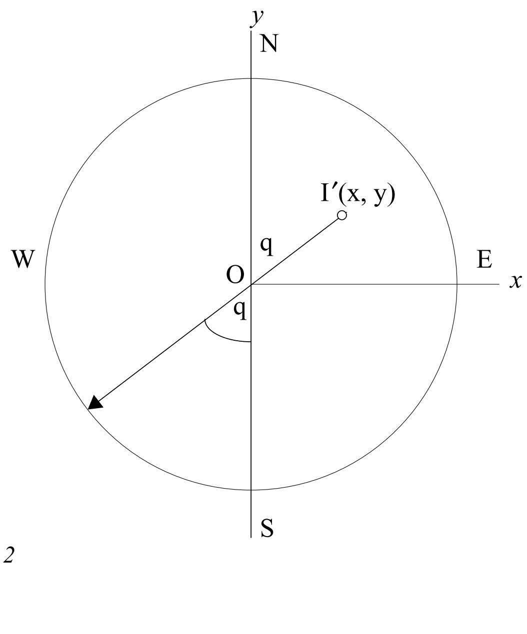


fig. 2

De streepjes op de wijzer staan niet evenver van elkaar. De lengte van het stuk van de wijzer tussen I' en de oorsprong is op het instrument evenredig met de sinus van de afstand d tot Mekka. dus $|OI'| = r \cdot \sin d$. De factor r hangt af van de grootte van het instrument; $r \approx 14$ cm op de Mekkawijzers uit Isfahan (niet het hele halfrond om Mekka is op de schijf afgebeeld). De hoek van de wijzer met de positieve y-as is q. Uit dit alles volgt:

$$x = r \cdot \sin d \cdot \sin q, \quad y = r \cdot \sin d \cdot \cos q \qquad (1)$$

Veronderstel nu dat het instrument exact is. We willen nagaan hoe de meridianen en parallellen op de schijf er dan uit zouden moeten zien. Dit kunnen we afleiden zodra we weten hoe q en d afhangen van de geografische breedte φ van I, de geografische breedte μ van Mekka en het verschil in geografische lengte $\Delta\lambda$ tussen I en Mekka (we rekenen $\Delta\lambda$ positief voor plaatsen ten oosten van Mekka en negatief voor plaatsen ten westen van Mekka). Het getal μ is een constante, in de middeleeuwen gebruikte men $\mu = 21°40'$, een moderne waarde is $\mu = 21°26'$. De makers van de instrumenten gebruikten voor Isfahan $\varphi = 32°30'$, $\Delta\lambda = 9°20'$.[7] Moderne waarden voor Isfahan zijn $\varphi = 32°41'$, $\Delta\lambda = 11°52'$.
We bekijken nu de boldriehoek PMI die bestaat uit bogen van grootcirkels, met M Mekka, I de plaats en P de noordpool. De drie zijden zijn $PI = 90° - \varphi$, $PM = 90° - \mu$, $MI = d$, en verder geldt $\angle MPI = \Delta\lambda$, $\angle PIM = 180° - q$.

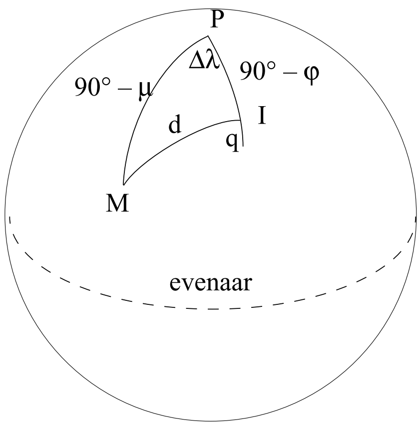


fig. 3

De sinusregel uit de boldriehoeksmeting geeft:

$$\sin q / \cos \mu = \sin \Delta\lambda / \sin d \qquad (2)$$

Er is een regel om de cotangens van een hoek uit te drukken in een aanliggende en de overstaande zijde en de ingesloten hoek. Deze regel levert hier:

$$\sin \Delta\lambda \cdot \cot q + \tan \mu \cdot \cos \varphi = \sin \varphi \cdot \cos \Delta\lambda \qquad (3)$$

We weten nu genoeg over de afbeeldingen

$(\Delta\lambda, \varphi) \rightarrow (q, d)$ en $(q, d) \rightarrow (x, y)$.

Noem f de samengestelde afbeelding: $(\Delta\lambda, \varphi) \rightarrow (x, y)$. Het rooster op de schijf bestaat uit de beelden onder f van de lijnen $\Delta\lambda$ = constant en φ = constant.

Uit (1) en (2) volgt:

$$x = r \cdot \sin \Delta\lambda \cdot \cos \mu \qquad (4)$$

Het beeld van een meridiaan op aarde (gegeven door een constant lengteverschil $\Delta\lambda$ met Mekka) is dus een rechte lijn op afstand $r \cdot \sin \Delta\lambda \cos \mu$ van de y-as. Dit klopt op de drie bewaarde Mekkawijzers. Op de foto op pagina 4 is duidelijk zichtbaar dat meridianen verder van Mekka vandaan dichter bij elkaar liggen.
Uit (1) volgt $\cot q = y / x$, uit (4) halen we:
$\sin \Delta\lambda = x / (r \cdot \cos \mu)$, en dus $\cos^2 \Delta\lambda = 1 - (x / (r \cdot \cos \mu))^2$.
Als we dit alles in (3) invullen en kwadrateren komt er

$$(y / (r \cdot \cos \mu) + \tan \mu \cdot \cos \varphi)^2 = \\ = \sin^2 \varphi \cdot (1 - (x / (r \cdot \cos \mu))^2) \qquad (5)$$

Dit kunnen we herschrijven als:

$$x^2 + (y + r \cdot \sin \mu \cdot \cos \varphi)^2 / \sin^2 \varphi = (r \cdot \cos \mu)^2 \qquad (6)$$

Voor $\varphi \neq 0, 90°$ is (6) de vergelijking van een ellips met middelpunt $(0, -r \cdot \sin \mu \cdot \cos \varphi)$ en toppen $(0, \pm r \cdot \sin (\varphi \mp \mu))$ en $(\pm r \cdot \cos \mu, -r \cdot \sin \mu \cdot \cos \varphi)$.
Voor $\varphi = \pm 90°$ komt er een cirkel[8], voor $\varphi = 0°$ levert (5) een rechte lijn.
De krommen op de drie bewaarde Mekkawijzers lijken erg op de ellipsen met vergelijking (6). Volgens David King zijn de krommen als cirkelbogen getekend omdat enkele sporen zichtbaar zijn van een passerpunt die in het middelpunt stond. Elly Dekker heeft berekend dat de gedeelten van ellipsen die afgebeeld moeten worden zo weinig van cirkels verschillen, dat het verschil binnen de meetnauwkeurigheid valt.
Conclusie: het instrument is in de praktijk exact. De wiskundige die de Mekkawijzer bedacht heeft, heeft waarschijnlijk geweten dat de (lastig te tekenen) ellipsen op het instrument goed door cirkels te benaderen zijn.

Intermezzo

Als voorbereiding voor latere hoofdstukjes behandelen we nu eerst een constructie van de richting van Mekka uit ongeveer 1020. De auteur was al-Bīrūnī, die in 973 werd geboren in de streek Khwārezm in Uzbekistan. Uit die streek kwamen meer wiskundigen, zoals 'de man uit Khwārezm' al-Khwārizmī, wiens naam voortleeft in het moderne woord 'algoritme'. In 1017 werd het gebied veroverd door Sultan Maḥmūd van Ghazna (Afghanistan) die al-Bīrūnī meenam als deel van de oorlogsbuit. Tijdens zijn reis naar Afghanistan begon al-Bīrūnī met het schrijven van een boek over het bepalen van geografische coördinaten met als toepassing de bepaling van de richting van Mekka in Ghazna. Uit dit boek stamt de volgende constructie van de richting van Mekka.[9]
Al-Bīrūnī werkte niet met de aardbol maar met de hemelbol (figuur 4). Dit is een bol met als middelpunt het middelpunt van de aarde, en straal zo groot dat we de afmeting van de aarde kunnen verwaarlozen. Elke plaats op aarde heeft een 'zenit' op de hemelbol, namelijk het punt

waar de rechte halflijn vanuit het middelpunt O van de aarde door die plaats de hemelbol snijdt. Zo is bijvoorbeeld het zenit van de Noordpool P een punt Z_P dicht bij de poolster, waaromheen de sterren (schijnen te) draaien. Het zenit van onze woonplaats I is het punt Z_I recht boven ons hoofd. Het zenit van Mekka is het punt Z_M, dat in Iran en Afghanistan in het zuidwesten staat.

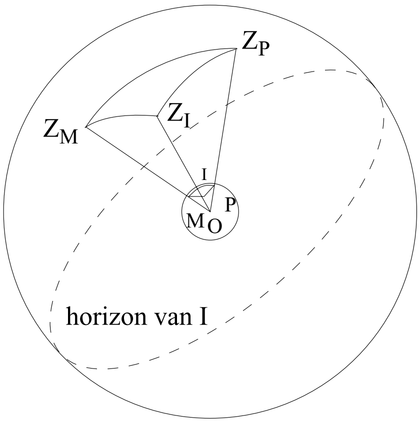


fig. 4

Natuurlijk is de driehoek $Z_P Z_M Z_I$ op de hemelbol precies dezelfde als de driehoek PMI op de aardbol; we zien de afstand tussen onze woonplaats en Mekka in graden op de hemelboog terug als de lengte van boog

$d = MI = Z_M Z_I$.

De hemelbol heeft als voordeel dat we de horizon van onze woonplaats I kunnen toevoegen, dat is het vlak door het middelpunt O loodrecht op de lijn OZ_I. Dit vlak kunnen we gelijkstellen aan de horizon die we zien, omdat we de afmeting van de aarde kunnen verwaarlozen. We kunnen nu de vier windrichtingen toevoegen (het noorden N ligt in de richting van de loodrechte projectie van Z_P op de horizon).

Van nu af aan laten we de notatie voor zenit op de hemelbol weg: we noteren het zenit van onze woonplaats, Mekka, en de Noordpool simpelweg als I, M en P.

We zullen zometeen zien hoe al-Bīrūnī de loodrechte projectie M' van M op het horizontale vlak construeert. De lijn van O naar M' geeft dan de richting van Mekka aan, zie figuur 5.

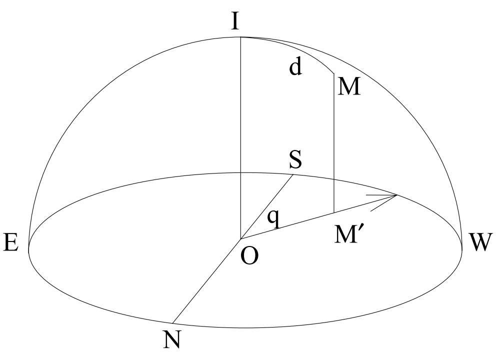


fig. 5

Al-Bīrūnī's constructie van M' wordt gegeven in figuur 6. We veronderstellen μ, φ en $\Delta\lambda$ bekend, en we geven de constructie voor een plaats ten Oosten van Mekka. (Door de hele constructie te spiegelen krijgen we de constructie voor plaatsen ten Westen van Mekka.)

Al-Bīrūnī tekent de helft van het vlak van de horizon NWS met N het Noorden, W het Westen en S het Zuiden, en middelpunt O. Hij maakt de cirkel compleet, maar gebruikt de linkerhelft voor het tekenen van het vlak van de meridiaan; dit roteert hij over 90° om de lijn NS, zodat het in het vlak van het papier terechtkomt. Hierin vinden we punt P, de Noordpool, die φ graden boven de horizon staat, en het zenit I: $\angle NOP = \varphi$ en $\angle NOI = 90°$. De hemelevenaar snijdt dit vlak in de stippellijn loodrecht op OP. Het zenit van Mekka ligt op een cirkel parallel aan de evenaar, op afstand μ graden ervan (vergelijk met de aardbol!).

Al-Bīrūnī vindt de doorsnede XY van het meridiaanvlak met deze *parallelcirkel van Mekka* als volgt: kies punt X zodat $\angle POX = 90° - \mu$ en trek XY loodrecht op OP.

Al-Bīrūnī klapt daarna een deel van deze parallelcirkel uit, zodat hij ook in het vlak van het papier terechtkomt (de gestippelde cirkel in figuur 6). Punt Y is het middelpunt. Als het lengteverschil $\Delta\lambda$ met Mekka 0° is, ligt het zenit van Mekka in X. Anders is Mekka het punt M op de gestippelde cirkel met $\angle XYM = \Delta\lambda$.

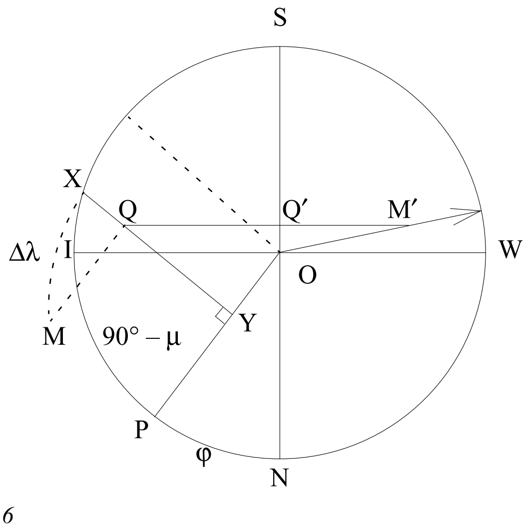


fig. 6

Nu zijn we bijna klaar! Laat een loodlijn MQ neer op XY, trek een loodlijn QQ' op SN en verleng deze lijn tot punt M' zodat $M'Q' = MQ$. Dan is punt M' de loodrechte projectie van M.

Voor al-Bīrūnī was dit duidelijk, want hij en zijn tijdgenoten waren aan dit soort constructies gewend. Voor ons kan het volgende helpen: knip figuur 6 uit langs de buitenste randen (inclusief het gestippelde deel), en knip langs lijn MQ tot punt Q. Vouw het stukje XMQ om de vouwlijn XQ om een hoek van 90° en vouw dan de linkerhelft van de figuur langs SN om een hoek van 90°. Vlak $SIPN$ is dan de meridiaan, en we zien dat QQ' verticaal komt te liggen.

Vlak XMQ wordt het vlak van de parallelcirkel van Mekka, lijn QM is evenwijdig aan de horizon en loodrecht op SN. Omdat we $QM = Q'M'$ gekozen hebben is $QMM'Q'$ een rechthoek, dus is M' de loodrechte projectie van M. Tot zover al-Bīrūnī.

De constructie van al-Bīrūnī en de Mekkawijzer

Hoewel al-Bīrūnī de Mekkawijzer nergens noemt in teksten die bewaard zijn, heeft zijn constructie veel met het instrument te maken. We laten dit zien in figuur 5 en 6. Omdat op de hemelbol IM de afstand d tussen de twee plaatsen I en M weergeeft, geldt in figuur 5 voor de loodrechte projectie: $OM' = r \cdot \sin d$, met r de straal van de bol. Verder hebben we $\angle SOM' = q$. Als we de windrichtingen verwisselen, Noord met Zuid en Oost met West, dan kunnen we OM' in figuur 5 opvatten als een deel van de wijzer van het instrument. Het punt M' in figuur 5 komt overeen met het punt $I'(x, y)$ in figuur 2.
De schijf van de Mekkawijzer ontstaat automatisch als we de constructie van al-Bīrūnī voor verschillende plaatsen in dezelfde figuur herhalen. We krijgen steeds verschillende punten M', die we kunnen uitroepen tot de projecties van die plaatsen.
In figuur 7 (niet op schaal) is dit idee uitgevoerd voor drie verschillende plaatsen in Iran.

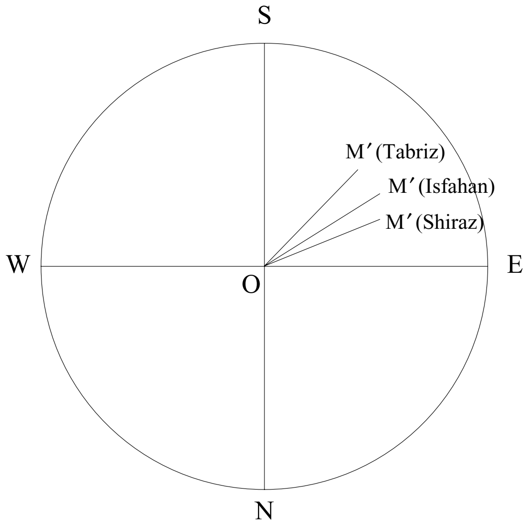


fig. 7

We kunnen de meer dan honderd gegraveerde puntjes op de schijf van de foto krijgen door de constructie van al-Bīrūnī meer dan honderd keer te herhalen, met steeds voor elke plaats de juiste coördinaten. Dit is natuurlijk onhandig; we zouden de plaatsen liever direct willen invullen met behulp van het rooster op de schijf.
Met al-Bīrūnī's constructie kunnen we ook het rooster vinden. In figuur 8 zijn de notaties dezelfde als in figuur 6. De grootte van parallelcirkel XYM is constant, want de

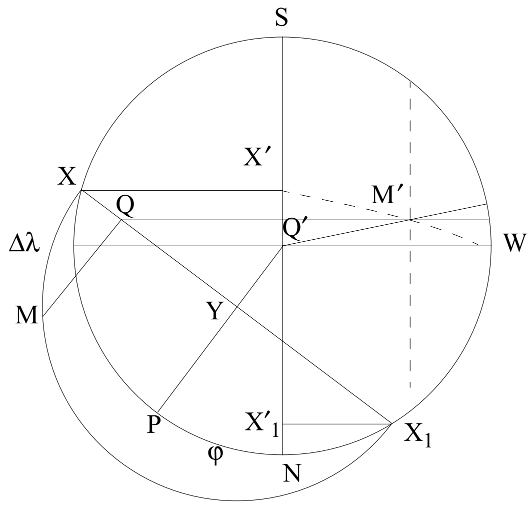


fig. 8

straal $r \cos \mu$ hangt alleen af van de geografische breedte van Mekka. Voor plaatsen op een bepaalde meridiaan is $\Delta\lambda$ vast en zal de bijbehorende φ en dus de positie van P in figuur 8 variëren, maar de lengte van MQ zal gelijk blijven aan $r \cos \mu \sin \Delta\lambda$. Daarom liggen de bijbehorende punten M' op een rechte gestippelde lijn.
Bij vaste φ en variabele $\Delta\lambda$ ligt de positie van P vast, en dus ook die van de punten Y en X. Punt M ligt dus ergens op de vaste cirkel met straal YX. Hieruit kunnen we op twee manieren afleiden dat de punten M' op een vaste ellips liggen:

a. noem X_1 het andere uiteinde van middellijn XY en noem X' en X'_1 de loodrechte projecties van X en X_1 op NS. Vanwege de cirkel geldt $MQ^2 = QX \cdot QX_1$, en omdat $QX : Q'X' = QX_1 : Q'X_1' = 1 : \sin \varphi$, een constante, is $M'Q'^2 : Q'X' \cdot Q'X_1'$ constant, dus de punten M' liggen op een ellips volgens stelling 21 van boek 1 van de *Conica* van Apollonius, het standaardwerk over kegelsneden, dat ook bekend was in Arabische vertaling.
b. Als φ vast ligt, ligt ook de positie van de parallelcirkel van Mekka vast, en de loodrechte projectie daarvan op de horizon is een ellips, zie figuur 9.

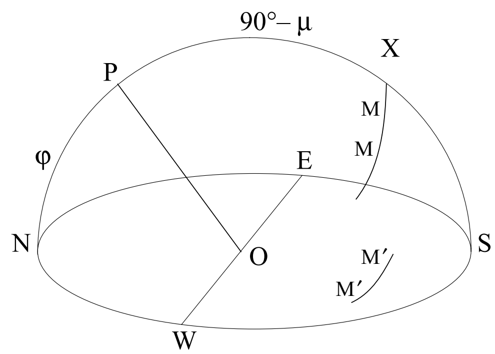


fig. 9

Een soortgelijke redenering kunnen we ook toepassen voor de meridianen: als $\Delta\lambda$ vastligt, ligt M op een cirkel parallel aan vlak NPS, en loodrecht op de horizon. Zo kunnen we het hele rooster op de schijf krijgen als loodrechte projectie van een stel cirkels op een bol.
En hieruit blijkt dat de loodrechte projectie in de Mekkawijzer wiskundig gezien misschien niet eens zo handig is. Als de uitvinder stereografische projectie had gebruikt met als pool het nadir (punt recht onder het middelpunt O), had hij een Mekkawijzer gekregen met alleen maar cirkels. De schaalverdeling op de wijzer was dan niet $r \cdot \sin d$ geweest maar $r \cdot \tan (d / 2)$. Stereografische projectie werd gebruikt in de standaardvorm van het astrolabium[10] en was daarom in de middeleeuwen heel bekend.

Sporen in middeleeuwse Arabische teksten?

Ondanks uitgebreid speurwerk heeft David King geen beschrijving van de Mekkawijzer in een Arabisch of Perzisch handschrift kunnen vinden, en aan niemand na hem is dat tot nu toe gelukt. Op zichzelf is dit niet verrassend, omdat een groot deel van de middeleeuws Arabische wiskundige teksten verloren is gegaan.

In het vorige hoofdstukje hebben we gezien, dat de richting van Mekka in een plaats met gegeven geografische lengte en breedte met passer en liniaal geconstrueerd kan worden, zoals aangegeven door al-Bīrūnī. Alle Islamitische constructies die nu in de literatuur bekend zijn, behalve de Mekkawijzer, werken met passer en liniaal.
In Arabische handschriften heb ik twee verwijzingen gevonden naar een constructie van de richting van Mekka met behulp van kegelsneden. Deze zouden op de Mekkawijzer betrekking kunnen hebben.

1. Het eerste mogelijke spoor vond ik toen ik een microfilm van een Arabisch handschrift per ongeluk te ver doordraaide, tijdens een bezoek aan het Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften in Frankfurt. Een pagina die ik niet wilde bekijken was het begin van deel 5 van een serie teksten die volgens een anonieme auteur bestudeerd moesten worden tussen de *Elementen* van Euclides en de *Almagest* van Ptolemaeus. Het deel ging over kegelsneden, en de anonieme auteur zegt dat dit deel nuttig was voor de ‘constructie van de richting van Mekka met kegelsneden’. Hij noemt ook een paar andere toepassingen (trisectie van een hoek, enzovoort), maar hiervoor waren alleen parabolen en hyperbolen nodig. In deel 5 komen wel ellipsen voor, en stelling I:21 van de *Conica* wordt bewezen. Die ellipsen waren dus misschien nodig voor het vinden van de richting van Mekka. De tekst is ongedateerd, maar in deel 3 noemt de auteur Ibn al-Haytham (circa 965-1041), dus de tekst dateert vermoedelijk van na het jaar 1000.[11]
2. De tweede verwijzing heeft te maken met een groot boekwerk van een tamelijk onbekende astronoom Muḥammad ibn Aḥmad Al-Khāzemī, die omstreeks 1060 in Isfahan werkte.[12] Helaas is het boek niet zelf bewaard, maar wel een samenvatting met de titels van alle hoofdstukjes waaruit het boek bestond. In deel 11, getiteld ‘de richtingen van plaatsen en hun afstanden van elkaar en de richting van Mekka’, stonden hoofdstukjes over ‘inleiding met stellingen over kegelsneden voor kennis van richtingen van plaatsen’, ‘de richting van plaatsen met kegelsneden’, en ‘de kennis daarvan met ambachtelijke methodes’. Van een paar andere hoofdstukjes wordt de volledige tekst gegeven. In een daarvan staat bewezen dat de loodrechte projectie van een parallelcirkel op de horizon een ellips is (zie figuur 9), en de lengtes van beide assen worden gespecificeerd. Hieruit volgen onmiddellijk alle benodigde gegevens voor de ellipsen op de Mekkawijzer.

Wanneer en waar is de Mekkawijzer ontdekt?

We keren nu terug naar de vraag uit het begin van dit artikel. De constructie van al-Bīrūnī laat zien dat de Mekkawijzer in de middeleeuws Islamitische traditie ontdekt *kan* zijn, wat niet betekent dat dat ook gebeurd *moet* zijn. De verwijzingen naar kegelsneden in verband met de richting van Mekka kan ik alleen verklaren door de aanname dat de Mekkawijzer en de theorie daarachter bekend geweest moet zijn. Het staat de lezer uiteraard vrij andere verklaringen te bedenken. Zekerheid krijgen we pas als we een beschrijving van de Mekkawijzer kunnen vinden in een middeleeuws Arabisch of Perzisch handschrift. David King heeft aangetoond dat de geografische coördinaten van de meer dan honderd plaatsen op de Mekkawijzer waarschijnlijk afkomstig zijn van een lijst uit Centraal-Azië (Uzbekistan) uit de vijftiende eeuw. Hieruit volgt alleen dat deze gegevens in de zeventiende eeuw in Isfahan beschikbaar waren.
Stel dat de Mekkawijzer in het Islamitisch cultuurgebied is ontdekt, dan kunnen we wel wat vermoedens opstellen over de plaats en tijd waar we de ontdekker zouden kunnen zoeken. King noemt als kandidaat Ḥabash al-Ḥāsib uit het negende-eeuwse Bagdad, op grond van algemene argumenten. Ḥabash is ook auteur van een constructie van M' in figuur 6[13], die veel ingewikkelder is dan de constructie van al-Bīrūnī. Het rooster van rechte lijnen en ellipsen op de Mekkawijzer kan niet eenvoudig uit de constructie van Ḥabash worden afgeleid. Daarom vind ik hem geen plausibele kandidaat. Al-Bīrūnī zou in principe de Mekkawijzer ontdekt kunnen hebben; hij interesseerde zich voor loodrechte projectie van cirkels aan de hemelbol op de horizon en heeft zelfs een nieuw type astrolabium ontwikkeld dat daarop gebaseerd is, met ellipsen en al. Het is wel opvallend dat al-Bīrūnī de Mekkawijzer nergens noemt in zijn boeken die bewaard zijn gebleven. Een van die boeken is de *Kanon voor Masᶜūd*, een groot

overzicht van de sterrenkunde met informatie over de richting van Mekka, in 1030 geschreven voor de zoon van zijn ontvoerder. Dit zou een ideale plaats zijn geweest om de Mekkawijzer ten tonele te voeren.

Al-Khāzemī's werk geeft mij persoonlijk het gevoel dat hij alle noodzakelijke theorie voor de Mekkawijzer kende. Opvallend is dat hij in Isfahan werkte, waar de bewaarde instrumenten vandaan komen. Zijn behandeling van de ellips als loodrechte projectie van een parallelcirkel is onvolledig en niet helder. Daarom denk ik niet dat hij de Mekkawijzer bedacht heeft. Op grond van dit alles vermoed ik dat de Mekkawijzer tussen 1020 en 1060 ontdekt is. Een extra argument voor deze vroege datum is de kennis van kegelsneden in de Arabische wereld. Die was in de eerste helft van de elfde eeuw nog goed, maar ging daarna hard achteruit. Het instrument zou eventueel ook uitgevonden kunnen zijn door de beroemde Ibn al-Haytham (ca. 965-1040), die in Egypte woonde, veel van kegelsneden hield, en met wie al-Bīrūnī na zijn gedwongen verhuizing weinig of geen contact had.

We zouden dus in elfde-eeuwse literatuur moeten zoeken, maar helaas is veel daarvan verloren gegaan. We hebben meer kans een latere beschrijving te vinden. Het kan ook zijn dat de Mekkawijzer wel in de Islamitische cultuur is ontdekt, maar we dit nooit zullen kunnen bewijzen. 'God weet het het beste' zouden al-Bīrūnī en Ibn al-Haytham in zo'n geval hebben gezegd.

In het tegenwoordige Isfahan is een 'huis van wiskunde' opgericht (www.mathhouse.org). Men is er uiteraard erg geïnteresseerd in de Mekkawijzer. Ik hoop dat een oude traditie in ere wordt hersteld, dat de Mekkawijzers binnenkort weer in de bazaar van Isfahan zullen worden aangeboden en dat dit artikel daartoe zal bijdragen.[14]

Jan Hogendijk, Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Noten

[1] Hogendijk, J.P. (1993). Middeleeuws Islamitische methoden voor de bepaling van de richting van Mekka, *Nieuwe Wiskrant*, *12*(4), 45-52.

[2] Geciteerd uit Dana Mackenzie (2001). A Sine on the Road to Mecca. *American Scientist, 89*(3). http://www.americanscientist.org/Issues/Sciobs01/sciobs0105mecca.html

[3] King, David A. (1999). *World-Maps for Finding the Direction and Distance to Mecca*. Leiden: Brill.

[4] Dekker, Elly (2000). Cartographic Grids from Iran: An Early Version of the Retro-Azimuthal Orthographic Projection? *The Cartographic Journal, 37*, 109-116.

[5] Zie bijvoorbeeld M. Kline (1972). *Mathematical thought from Ancient to Modern Times*. 195-197; W.R. Knorr (1989). *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*. Boston: Birkhäuser, 238-239.

[6] De uitspraak is van E.G. Kolbenheyer (1878-1962), geciteerd op p. 274 van King, D.A. (2001). *The Ciphers of the Monks: A Forgotten Number-notation of the Middle Ages*. Stuttgart: Steiner.

[7] Zie King p. 557. De geografische breedte was dezelfde als de onze. Er waren twee systemen voor de geografische lengte λ. In het ene systeem werd λ gemeten ten opzichte van de Canarische eilanden, in het andere systeem ten opzichte van de Westkust van Afrika. De lengte van Mekka werd in het eerste systeem aangegeven als 77°10′ en in het tweede als 67°10′. Welk systeem op de instrumenten gebruikt werd is niet uit te maken; de 10 minuten zijn wel op de foto te zien, want de meridiaan voor 77° of 67° loopt iets links van de noord-zuid lijn.

[8] Duidelijk is dat de afbeelding f: $(\Delta\lambda, \varphi) \rightarrow (x, y)$ een aantal vreemde eigenschappen heeft. In de noord- en zuidpool ontaardt de afbeelding, en het punt $(180° - \Delta\lambda, 180° - \varphi)$ heeft hetzelfde beeld als $(\Delta\lambda, \varphi)$. Ik heb daarom een extra figuur voor het halfrond rond de Stille Oceaan getekend, om op de meeste plaatsen eenduidigheid te krijgen. De punten waar het mis gaat met de afbeelding vallen uiteraard buiten de middeleeuws Islamitische wereld!

[9] Zie Al-Bīrūnī, *The Determination of the Coordinates of Positions for the Correction of Distances between Cities*, (Kitāb Taḥdīd Nihāyāt al-Amākin li-Taṣḥīḥ Masāfāt al-Masākin), translated by Jamil Ali, Beirut: American University of Beirut, 1967, 252-253, en E.S. Kennedy, *A commentary upon Bīrūnī's Kitāb Taḥdīd al-Amākin, An 11th Century Treatise on Mathematical Geography*, Beirut: American University of Beirut, 1973, 209-211. Voor informatie over al-Bīrūnī zie het artikel van E.S. Kennedy in C.G. Gillispie (ed.). *Dictionary of Scientific Biography, vol. 2.* (New York 1970), 148-158.

[10] Voor stereografische projectie en het astrolabium zie J.P. Hogendijk (1988). Occulte Wiskunde. *Nieuwe Wiskrant, 7*(3), 35-44.

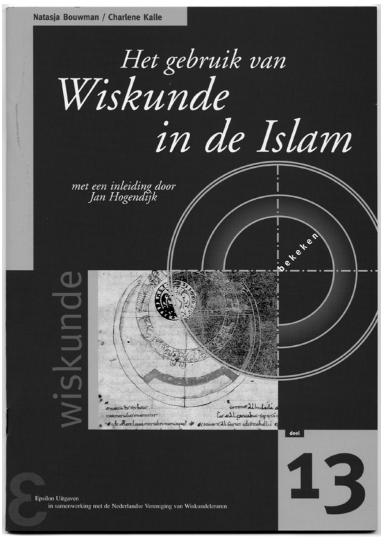
[11] Het enig bekende handschrift van de hele serie van vijf delen is Algiers 1446. Dr. Djebbar in Parijs was zo vriendelijk mij een microfiche te leen te geven. Het tweede handschrift, van alleen deel 5, is in Oxford, Bodleian Library, Hunt. 237. Deel 5 is gebaseerd op een herziene versie van de *Conica* van Apollonius door Abū Jaᶜfar al-Khāzin (circa 950).

[12] Zie de editie in facsimile in: F. Sezgin (ed.). *Manuscript of Arabic Mathematical and Astronomical Treatises*, Frankfurt: IGAIW, 2001, series C vol. 66. De belangrijke passages staan op pp. 31-32 en p. 38 regels 6-8.

[13] Zie voor de constructie van Ḥabash King p. 63 (het wiskundig verband met de Mekkawijzer wordt daar niet aangegeven) en E.S. Kennedy & Yusuf ᶜId (1974). A Letter of al-Bīrūnī: Ḥabash al-Ḥāsib's Analemma for the Qibla, *Historia Mathematica, 1* , 3-11. Het verband tussen de constructies van Ḥabash en al-Bīrūnī wordt uitgelegd in J.L. Berg-

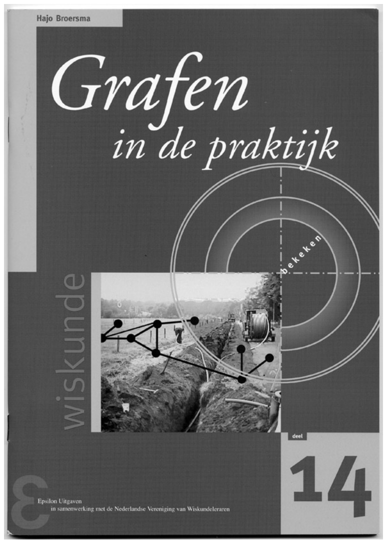
gren (1980). A Comparison of Four Analemmas for Determining the Azimuth of the Qibla. *Journal for the History of Arabic Science, 4*, 69-80.
[14] Mijn artikel ‘Een workshop over Iraanse mozaïeken’ uit de *Nieuwe Wiskrant, 16*(2), 1996, 38-42, is in Perzische vertaling verschenen in het tijdschrift *Farnud* van de Vereniging van Wiskundeleraren uit het district Isfahan (de aflevering van Mordād 1377 - Juli/Aug. 1997). Het artikel dat u nu leest wordt ook in het Perzisch vertaald en ik hoop in April 2003 in Isfahan een workshop over de Mekkawijzer te geven.

Verschenen



Het gebruik van wiskunde in de Islam
Natasja Bouwman & Charlene Kalle
met een inleiding van Jan Hogendijk

De Islam kent een aantal regels waaraan moslims zich moet houden. Zo moet een moslim vijf keer per dag bidden met het gezicht naar Mekka. Hoe bepaal je die richting? Een andere regel is dat moslims zich aan de vastenperiode, de Ramadan, moeten houden. Het begin van deze vastenperiode wordt bepaald door de Islamitische kalender die samenhangt met de gang van de maan langs de hemelbol. Met deze Zebra kun je leren hoe vroeger (en nu) deze problemen door moslims werden opgelost.



Grafen in de praktijk
Hajo Broersma

Het wegennet, het internet, de spoorrails verbindingen, de buizenstelsels voor gas en water, het kabelnet voor tv, het telefoonnet zijn allemaal voorbeelden van netwerken. Dergelijke netwerken kunnen worden beschreven met een eenvoudig wiskundig hulpmiddel, de graaf. Afhankelijk van het toepassingsgebied, bijvoorbeeld een reisplanner voor de Nederlandse Spoorwegen of snel transport van emails tussen internet gebruikers, worden verschillende eisen aan de graaf gesteld.

De ZEBRA reeks wordt uitgegeven door Epsilon Uitgaven, Utrecht, in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en is verkrijgbaar in de boekhandel.