# Wat te bewijzen is

## Rubriek

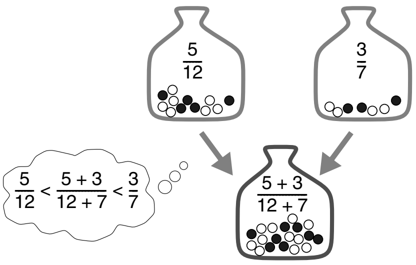
*En als er breuken zijn ... lastig is 't, nu ja, maar ik zoek de algemene noemer*. Aldus mijmert Multatuli's geesteskind Woutertje Pieterse in het kantoor van zijn toekomstige bazen Ouwetijd & Kopperlith. Woutertje moet welhaast aan het optellen (of aftrekken) van breuken hebben gedacht. Bij het vermenigvuldigen heeft het *gelijknamig* maken van breuken weinig zin; bij het delen van breuken wél, al wordt dat voorzover ik weet weinig toegepast en zal dit niet in het rekenboek van Strabbe hebben gestaan. Of de Woutertjes anno 2002 weten wanneer en hoe breuken gelijknamig gemaakt worden, daaraan kun je twijfelen. Zeker als het breuken met variabelen betreft. Want wie kijkt er nog gek op als een leerling een vorm zoals $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$ achteloos herleidt tot: $\frac{3}{2x}$ ?

Daar komt dan een rode streep door; maar in plaats van voorschrijven hoe het dan wel moet, zou de leraar ook eens met de klas kunnen onderzoeken wat de betekenis is van het naïef optellen van tellers en noemers.

Uitgaande van bijvoorbeeld $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ komt er $\frac{2}{5}$ en de waarde van die laatste breuk ligt tussen de waarden van de oorspronkelijke breuken. Bij andere voorbeelden gebeurt hetzelfde en de prikkelende vraag rijst dan of er altijd een *tussenbreuk* uitkomt en zo ja, waarom dan wel?

Ik gebruik een nieuw voorbeeld als paradigma.

De breuk $\frac{5}{12}$ is een beetje kleiner dan de breuk $\frac{3}{7}$; ze zijn immers respectievelijk gelijk aan $\frac{35}{84}$ en $\frac{36}{84}$, zoals Woutertje Pieterse zou hebben kunnen bevestigen. Dat betekent dat als je een bal trekt uit een vaas met 12 ballen waarvan er 5 zwart zijn, de kans op een zwarte bal een pietsje kleiner is dan bij een vaas waarin 3 van de 7 ballen zwart zijn. Voeg je nu de inhouden van beide vazen samen in een nieuwe vaas, dan zal de kans op zwart ten opzichte van de eerste vaas iets groter worden en ten opzichte van de tweede vaas iets kleiner. Dat is intuïtief duidelijk.




Een formeel bewijs is bijvoorbeeld dit: stel $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ met $a$, $b$, $c$ en $d > 0$. Met hulp van de 'algemene noemer' $bd$ is dan te zien dat $ad < bc$. Vergelijk nu $\frac{a}{b}$ met $\frac{a+c}{b+d}$

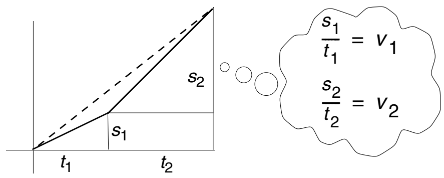
Er geldt:

$$\frac{a}{b} = \frac{a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab + \boldsymbol{ad}}{b(b+d)} < \frac{ab + \boldsymbol{bc}}{b(b+d)} = \frac{b(a+c)}{b(b+d)} = \frac{a+c}{b+d}$$

Geheel analoog volgt: $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Geen speld tussen te krijgen, wat je noemt een hard bewijs. Toch denk ik dat er mensen zijn die zich gemakkelijker laten overtuigen door die vazen met balletjes.

Er is nog een context die heel overtuigend is. Bekijk de tijd-afstand-grafiek van bijvoorbeeld een fietsrit:




De eerste $t_1$ minuten van de rit werd met een constante snelheid $v_1$ gefietst; in de volgende $t_2$ minuten was de (constante) snelheid groter: $v_2$.

De gemiddelde snelheid over de gehele rit is duidelijk meer dan $v_1$ en minder dan $v_2$, zoals ook in het plaatje te zien is (helling stippellijn). Hoe bereken je die gemiddelde snelheid? Wel: totale weg gedeeld door totale tijd. Zo wordt opnieuw duidelijk dat:

$$\frac{s_1}{t_1} < \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} < \frac{s_2}{t_2}$$

Deze context maakt ook onmiddellijk duidelijk dat de waarde van een tussenbreuk afhankelijk is van de representatie van zijn twee voortbrengers. Als er zeg twee keer zo lang wordt doorgefietst met dezelfde constante snelheid $v_2$, verandert de breuk $\frac{s_2}{t_2}$ niet van waarde, maar de tussenbreuk (= gemiddelde snelheid) wordt groter.

Aardig is het nog om de twee speciale gevallen $t_1 = t_2 = t$ en $s_1 = s_2 = s$ te bekijken. In het eerste geval geldt:

$$v_{gem} = \frac{s_1 + s_2}{t + t} = \frac{1}{2}\left(\frac{s_1}{t} + \frac{s_2}{t}\right) = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Dus bij gelijknamige breuken is de 'tussenbreuk' het rekenkundige gemiddelde van zijn voortbrengers.

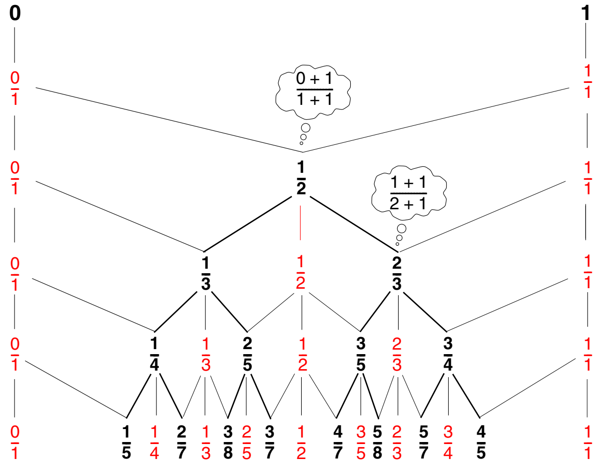
In het tweede geval geldt:

$$v_{gem} = \frac{s + s}{t_1 + t_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{t_1}{s} + \frac{t_2}{s}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)}$$

In het geval van gelijke tellers is de tussenbreuk blijkbaar gelijk aan het *harmonisch* gemiddelde van de voortbrengende breuken. Het harmonisch gemiddelde is kleiner dan (of gelijk aan) het rekenkundig gemiddelde. Denk aan een fietsrit met heen wind mee en terug wind tegen. De gemiddelde snelheid van de totale rit is dan lager dan het (rekenkundig) gemiddelde van de snelheden, om de doodeenvoudige reden dat je langer (in tijd) met de lagere snelheid fietst.

### *Stamboom van breuken*

Het 'naïef optellen' van breuken leidt tot een (oneindige) stamboom van de rationale getallen tussen 0 en 1.
De 'oerouders' 0 en 1 worden geschreven als $\frac{0}{1}$ en $\frac{1}{1}$.
Die brengen als tussenbreuk $\frac{1}{2}$ voort.
Uit $\frac{0}{1}$ en $\frac{1}{2}$ wordt $\frac{1}{3}$ geboren, terwijl $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{1}$ de breuk $\frac{2}{3}$ voortbrengen. Enzovoort. Na vier stappen komt er:




Deze stamboom heeft veel interessante eigenschappen waarvan ik er hier vier onder de loep neem:

1. Op elke regel staat een van klein naar groot geordend rijtje van breuken.
2. Als $\frac{y}{x} < \frac{y^*}{x^*}$ buren zijn op een regel, dan $xy^* - yx^* = 1$.
3. Alle voorkomende breuken (na $\frac{0}{1}$ en $\frac{1}{1}$) zijn onvereenvoudigbaar.
4. Alle bestaande en niet te vereenvoudigen breuken tussen 0 en 1 komen in de stamboom voor.

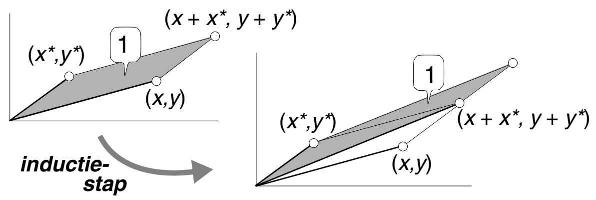
Eigenschap 1 volgt onmiddellijk uit het feit dat er steeds *tussen*breuken worden ingelast.
Voor het bewijs van de andere eigenschappen kies ik het instrument van de lineaire algebra.
Een breuk $\frac{y}{x}$ (waarbij $x$ en $y$ geheel) correspondeert met een 'roostervector' $(x , y)$ in het $Oxy$-vlak.
Het getal $xy^* - yx^*$ is de zogenaamde determinant van de vectoren $(x , y)$ en $(x^* , y^*)$, in de klassieke notatie:

$$\begin{vmatrix} x & x^* \\ y & y^* \end{vmatrix}$$

Het bewijs van eigenschap 2 is een zaak van volledige inductie. Om te beginnen is de stelling juist voor het geval $(x , y) = (1 , 0)$ en $(x^* , y^*) = (1 , 1)$.
De inductiestap volgt gemakkelijk uit:

$$\begin{vmatrix} x & x+x^* \\ y & y+y^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^* \\ y & y^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+x^* & x^* \\ y+y^* & y^* \end{vmatrix}$$

maar is ook meetkundig te zien.




Eigenschap 3 volgt uit 2. Als $\frac{y}{x} = \frac{kv}{ku}$ en $\frac{y^*}{x^*}$ buren in de boom zijn, $k$ geheel, dan geldt:

$$1 = \begin{vmatrix} x & x^* \\ y & y^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kv & x^* \\ ku & y^* \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} v & x^* \\ u & y^* \end{vmatrix}$$

dus $k$ is een deler van 1.

Ten slotte het bewijs dat elk rationaal getal een plekje in de boom krijgt. Stel dat $\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{n}}$, met $n$, $t$ onderling ondeelbare positieve gehele getallen, niet in de boom optreedt. Die breuk kan dan stapsgewijs nauwer worden ingeklemd tussen buurbreuken uit de stamboom.
Stel dat zo na een aantal stappen wordt gevonden:

$$\frac{y}{x} < \frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{n}} < \frac{y^*}{x^*}$$

Vector $(\boldsymbol{n} , \boldsymbol{t})$ is lineair afhankelijk van $(x , y)$ en $(x^* , y^*)$:

$$(\boldsymbol{n} , \boldsymbol{t}) = \lambda \cdot (x , y) + \mu \cdot (x^* , y^*)$$

met $\lambda$ en $\mu$ rationaal.
Nu geldt (onder meer volgens eigenschap 2):

$$\begin{vmatrix} x & \boldsymbol{n} \\ y & \boldsymbol{t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \lambda x + \mu x^* \\ y & \lambda y + \mu y^* \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu$$

Gevolg: $\mu$ is geheel en omdat $\frac{y}{x} < \frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{n}}$ ook $\mu > 0$.
Hetzelfde geldt voor $\lambda$.

Is nu $\lambda = \mu = 1$, dan $\boldsymbol{n} = x + x^*$ en $\boldsymbol{t} = y + y^*$ en verschijnt de breuk $\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{n}}$ in de volgende regel van de boom.

Is $\lambda > 1$ of $\mu > 1$, dan: $\boldsymbol{n} > x + x^*$ en $\boldsymbol{t} > y + y^*$ dus:

$$\boldsymbol{n} + \boldsymbol{t} > x + x^* + y + y^*$$

De breuk $\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{n}}$ kan nu nauwer worden ingeklemd tussen $\frac{x+x^*}{y+y^*}$ en een van beide breuken $\frac{y}{x}$ en $\frac{y^*}{x^*}$.

Vervolgens kan de vector $(\boldsymbol{n} , \boldsymbol{t})$ als lineaire combinatie van de nieuwe buurvectoren worden geschreven.
De som van de tellers en noemers van het nieuwe paar buurbreuken is op zijn minst 1 groter dan de vorige som $x + x^* + y + y^*$.
Als $\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{n}}$ niet na een zeker aantal stappen in de boom zou verschijnen, zou dit proces van inklemmen nooit eindigen. Dat is echter in tegenspraak met het feit dat de (bij elke stap groeiende) som van de tellers en noemers van de inklemmende breuken steeds kleiner zou moeten zijn dan het vaste getal $\boldsymbol{n} + \boldsymbol{t}$.

De boom waarvan hier is aangetoond dat zij alle rationale getallen tussen 0 en 1 genereert (en via de reciproque breuken ook alle rationale getallen > 1) dateert uit ongeveer 1860 en draagt de naam van zijn ontdekkers Stern (een Duits wiskundige) en Brocot (een Franse klokkenmaker).
Een behandeling van de boom en daaruit voortvloeiend een opmerkelijke binaire voorstelling van de reële getallen (Minkowski, 1904) is te vinden in het boek *Concrete Mathematics for Computer Science,* auteurs: R.L. Graham, D.E.Knuth, O. Patashnik, Addison-Wesley 1994.

*Martin Kindt, martin@fi.uu.nl*