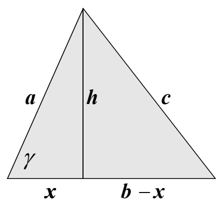
Wat te bewijzen is

Rubriek

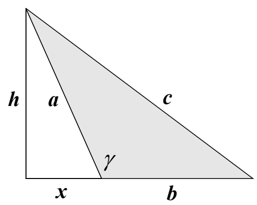
In klassieke analyseboeken wordt de middelwaardestelling voor differentiaalrekening afgeleid uit de zogenaamde stelling van Rolle. Achteraf kun je vaststellen dat laatstgenoemde een speciaal geval van eerstgenoemde stelling is. Dit verschijnsel, dat in de wiskunde nogal eens optreedt, waarbij het bewijs van een stelling wordt geleverd via een eerder bewezen speciaal geval van diezelfde stelling, heb ik altijd als opmerkelijk ervaren.

Specialisatie en generalisatie

Zo'n gang van speciaal naar algemeen komt men ook tegen in de schoolwiskunde. Een sprekend voorbeeld daarvan is de introductie van de cosinusregel. Deze wordt doorgaans bewezen uit de stelling van Pythagoras, dus uit een speciaal geval. Dat gaat dan zó:



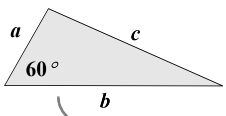
$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b-x)^2 \\ &= \underbrace{h^2 + x^2} + b^2 - 2bx \\ &= a^2 + b^2 - 2bx \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$



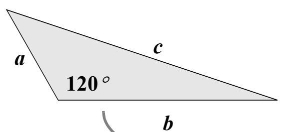
$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b+x)^2 \\ &= \underbrace{h^2 + x^2} + b^2 + 2bx \\ &= a^2 + b^2 + 2bx \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

In de beide gevallen wordt de stelling van Pythagoras tweemaal toegepast (regel 1 en regel 3).

Het is een leuke sport om te kijken of er misschien andere bijzondere gevallen van de cosinusregel zijn die als plaatsbekleder van de stelling van Pythagoras in de bewijsvoering kunnen dienen. Die zijn er inderdaad, namelijk de gevallen $\gamma = 60°$ en $\gamma = 120°$. De wetenschap dat $\cos 60° = \frac{1}{2}$ en $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ leert ons:

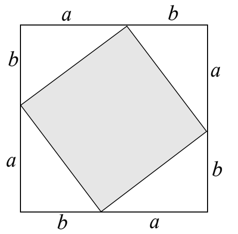


$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - ab}$$



$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 + ab}$$

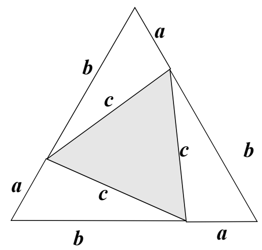
Maar hoe kan dit zonder cosinusregel worden begrepen? Denk aan een van de 'oppervlakkige' bewijzen van de stelling van Pythagoras:



$$c^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{2}ab = (a+b)^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

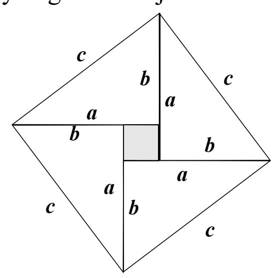
Dit bewijs laat zich verrassenderwijs analogizeren voor een driehoek met een hoek van 60°. Daarbij neem ik voor de oppervlaktemaat nu eens niet een eenheidsvierkant, maar een 'eenheidsdriehoek' (= gelijkzijdige driehoek met zijde 1). De oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijde c is nu c^2. De oppervlakte van een driehoek met zijden a en b om een hoek van 60° is dan ab. Dit is eenvoudig na te gaan, bijvoorbeeld door gebruik te maken van een isometrisch rooster. Er volgt nu:



$$c^2 + 3 \cdot ab = (a+b)^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab$$

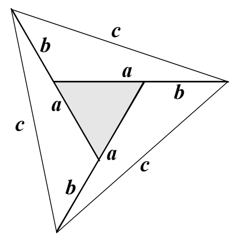
Voor de driehoek met een hoek van 120° staat een ander Pythagorasbewijs model:



$$c^2 = (a-b)^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{2}ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Met als isometrische pendant:

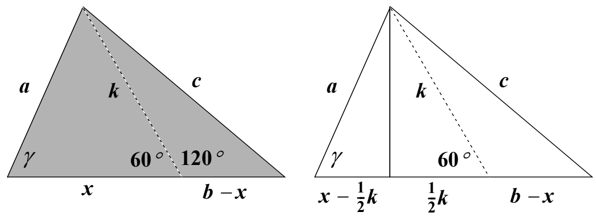


$$c^2 = (a-b)^2 + 3ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab$$

Voor het gemak heb ik me in de bewijzen bediend van twee merkwaardige producten uit de algebra, maar die kunnen eventueel ook worden gemist, al vraagt dat wat meer legpuzzelwerk.

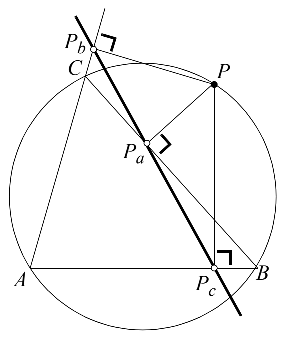
Het grappige is nu dat de cosinusregel uit deze beide speciale gevallen kan worden bewezen en wel op een manier die analoog is aan het eerder gegeven bewijs.
Ik volsta nu met het geval dat hoek γ scherp is:



$$
\begin{aligned}
c^2 &= k^2 + (b-x)^2 + k(b-x) \\
&= \underbrace{k^2 + x^2 - kx} + b^2 + kb - 2bx \\
&= a^2 + b^2 - 2b(x - \tfrac{1}{2}k) \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma
\end{aligned}
$$

Bij de laatste stap doet zich een kleine complicatie voor die gemakkelijk te verhelpen is; de symmetrie van een gelijkzijdige driehoek staat er borg voor dat de loodrechte projectie van het lijnstuk k op de basis van de driehoek de lengte $\frac{1}{2}k$ heeft en zo volgt: $a \cdot \cos\gamma = x - \frac{1}{2}k$.
De lezer moet niet denken dat ik dit een fraai alternatief bewijs van de cosinusregel vind (voor zo'n alternatief verwijs ik naar deze rubriek, *Nieuwe Wiskrant 18*(4)).
Mijn bedoeling was hier om een typisch wiskundig spel te laten zien: stuivertje wisselen van specialisatie en generalisatie, vooral met het oog op het nu volgende.

De rechte van Wallace

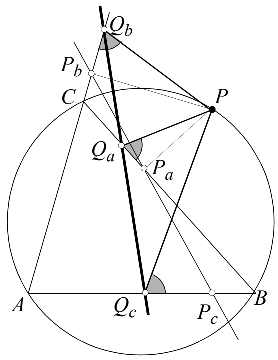


Er is een mooie meetkundige stelling die soms naar Simson wordt vernoemd, maar waarvan Wallace de eerste ontdekker is geweest en die luidt:
De voetpunten P_c, P_a en P_b van de loodlijnen uit een punt P van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC neergelaten op de dragers van de zijden, zijn collineair.
Deze stelling kan worden bewezen via een paar hulplijnen (bijvoorbeeld PB en PC) en een drietal koordenvierhoeken (PBP_cP_a, PP_aCP_b en $PCAB$).
Een beetje gepuzzel met hoeken levert dan ten slotte:

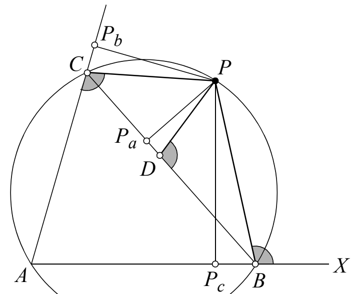
$$\angle P_cP_aP + \angle P_bP_aP = 180°,$$

ofwel P_c, P_a en P_b liggen op één lijn.

Aad Goddijn wees mij op een aardige generalisatie. Als je in plaats van loodlijnen, scheve lijnen uit P kiest, maar die eenzelfde hoek ϕ maken met de zijden, dan geldt weer dat de drie 'voetpunten', zeg Q_c, Q_a en Q_b, collineair zijn (ten minste als het goed zit met de 'oriëntatie' van de drie hoeken).



Het bewijs is andermaal een voorbeeld van de 'gang van speciaal naar algemeen'.
Uitgaande van de reeds bewezen stelling in het geval de hoeken 90° zijn (Wallace), kan worden aangetoond dat Q_c, Q_a en Q_b op één lijn liggen.
De driehoeken PP_cQ_c, PP_aQ_a en PP_bQ_b hebben gelijke hoeken en zijn dus gelijkvormig.
Bij een geschikte rotatie om P, gevolgd door een passende vermenigvuldiging vanuit datzelfde punt P, gaan P_c, P_a en P_b respectievelijk over in Q_c, Q_a en Q_b; omdat de eerste drie collineair zijn, geldt dat dus ook voor de laatste drie (rechte lijnen gaan bij draaivermenigvuldiging natuurlijk over in rechte lijnen).
Nu speel ik het spel als eerder bij de cosinusregel.
Is er misschien een ander speciaal geval, dat eenvoudig direct te bewijzen is en dat dan kan dienen als opstap naar de algemene stelling? Het antwoord is ja, en dit geval is aanzienlijk simpeler dan bij de lijn van Wallace!



Verbind namelijk P met B en C en de koordenvierhoekstelling zegt dat $\angle PCA = \angle PBX$ (= φ).
Op de lijn BC is er een punt D te vinden zodat $\angle PDB = \varphi$.
Omdat B, D en C vanzelf collineair zijn, geldt dit ook (draaivermenigvuldiging!) voor willekeurige Q_c, Q_a en Q_b en in het bijzonder natuurlijk voor P_c, P_a en P_b.
Daarmee is dan tevens een elegant en helder bewijs voor de stelling van Wallace gevonden.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl