Neem een vierkant. Verdubbel de lengte. Een ieder die nu denkt dat de oppervlakte ook verdubbeld is heeft last van een lineariteits-illusie. En hoeft vooral niet bang te zijn dat hij de enige is: blijkbaar zit de hang naar proportionaliteit diep in ons denken geworteld. Het fenomeen kan de oorzaak zijn van misvattingen bij leerlingen op het gebied van de kansrekening volgens **Wim Van Dooren, Dirk De Bock** en **Lieven Verschaffel**.

# De illusie van lineariteit in kansrekening: een terreinverkenning

## Inleiding

Lineaire of recht evenredige verbanden krijgen zeer veel aandacht in het reken-wiskundeonderwijs, zowel op elementair als op secundair niveau. Dit is terecht, aangezien lineaire functies het onderliggend model zijn voor heel wat toepassingsproblemen. Echter, door deze voortdurende aandacht vertonen nogal wat leerlingen, zowel van het lager als van het secundair onderwijs, de neiging om vrijwel elke functie of relatie tussen grootheden te behandelen alsof het om een lineaire (proportionele) relatie ging (Freudenthal, 1983).
In dat verband spreekt men van de *illusie van lineariteit*. In de literatuur vindt men vele voorbeelden van deze illusie terug, ontleend aan diverse domeinen van de wiskunde, bijvoorbeeld elementaire rekenkunde, meetkunde, algebra of kansrekening, maar ook aan andere vakgebieden, zoals fysica (zie bijvoorbeeld De Bock, 1998). In het eerste domein (elementaire rekenkunde) treedt de lineariteitsillusie soms op bij het oplossen van rekenvraagstukken.
We geven enkele voorbeelden van vraagstukjes waarbij veel lagere schoolleerlingen zich laten verleiden tot een ongeoorloofde proportionele redenering.

*Het koken van één ei duurt zes minuten. Hoeveel minuten zal het tegelijk koken van vier eieren dan duren?*

*Een krat pils met daarin 24 volle flesjes weegt 10,5 kilogram. Hoeveel weegt een krat waarin nog acht volle flesjes zitten?*

Dat leerlingen bij deze vraagstukjes in de lineaire valstrik trappen, komt omdat zij zich uitsluitend fixeren op het uitvoeren van de volgens hen vereiste bewerking(en) met de getallen uit de opgave. Daarbij zetten ze vaak hun ervaringskennis over het stukje werkelijkheid dat in de opgave beschreven wordt helemaal buitenspel (Verschaffel, 1993; Verschaffel, Greer & De Corte, 2000).
Dit onterecht proportioneel oplossingsproces ligt ook aan de basis van menig grapje, zoals de volgende ‘opgave’ laat zien:

*Hendrik VIII had zes vrouwen. Hoeveel vrouwen had Hendrik IV?*

Dat het fenomeen van de lineariteitsillusie – ook in het domein van de elementaire rekenkunde – zeker niet beschouwd mag worden als een grappig doch onbelangrijk valstrikje waar enkel jonge kinderen in trappen, blijkt uit het volgende voorbeeld, ontleend aan Cramer, Post en Currier (1993).

*Kim en Ellen lopen met dezelfde snelheid rond op een piste. Kim startte eerst. Wanneer zij negen rondjes had gelopen, had Ellen er drie gelopen. Hoeveel rondjes zal Kim gelopen hebben wanneer Ellen er vijftien heeft gelopen?*

De auteurs legden deze opgave voor aan 33 toekomstige onderwijzers in het kader van de cursus wiskundedidactiek. Op één aspirant-leerkracht na, loste iedereen dit vraagstuk op door de ontbrekende term te bepalen in de verhouding: $9/3 = x/15$, waaruit $x = 45$, terwijl de juiste oplossing uiteraard $15 + (9 – 3) = 21$ is (Kim heeft steeds zes rondjes voorsprong op Ellen). Volgens de auteurs kwam deze fout tot stand doordat deze aspirant-leerkrachten zo goed vertrouwd waren met verhoudingsvraagstukken en de oplossingswijze ervan, dat ze niet eens opmerkten dat het om een additief vraagstuk ging.

Tot voor een paar jaar was er in de literatuur geen of nauwelijks sprake van systematisch onderzoek naar het onterecht proportioneel redeneren van leerlingen. Een eerste aanzet tot het invullen van deze leemte werd gegeven in een aantal empirische studies door De Bock, Verschaffel en Janssens in het domein van de meetkunde (voor een samenvattend overzicht zie De Bock, Verschaffel & Janssens, 1999). Recent werd echter besloten om dit onderzoeksproject te verruimen en systematischer op zoek te gaan naar het voorkomen van de lineariteitsillusie in andere domeinen van de wiskunde. Nadat we zeer kort zijn ingegaan op het reeds uitgevoerde onderzoek binnen meetkunde, zullen we in deze bijdrage dieper ingaan op het bestaan van de lineariteitsillusie binnen het domein kansrekening.

## Leariteitsillusie binnen meetkunde

Een vaak geciteerd voorbeeld in dit domein is dat veel leerlingen denken dat de verdubbeling van de zijde van een vierkant tevens de verdubbeling van de oppervlakte ervan tot gevolg heeft. Zij gaan dus, net als de slaaf in Plato's dialoog Meno, spontaan uit van een recht evenredig verband tussen de grootheden lengte en oppervlakte. Via collectieve schriftelijke toetsen met zowel proportionele als niet-proportionele opgaven, afgenomen van grote groepen twaalf- tot zestienjarigen, brachten De Bock, Verschaffel en Janssens (1999) aan het licht dat leerlingen ook nu nog een haast onweerstaanbare drang vertonen om onterecht lineair te redeneren bij vraagstukken over het (gelijkvormig) vergroten of verkleinen van meetkundige figuren. Een voorbeeld van een niet-proportionele opgave uit deze toetsen is:

*Om een vierkant stuk grond met zijde 200 m te bemesten heeft boer Karel ongeveer acht uur nodig. Hoeveel uur zal hij ongeveer nodig hebben om een vierkant stuk grond met zijde 600 m te bemesten? (Juist antwoord: 72 uur, foutief proportioneel antwoord: 24 uur.)*

De Bock en anderen toonden aan dat slechts 2-7% van de twaalf- tot dertienjarige leerlingen en 17-22% van de vijftien- tot zestienjarige leerlingen dergelijke opgaven juist beantwoordden. Ze vonden bovendien dat zelfs het bieden van aanzienlijke steun (zoals het laten maken of het aanbieden van een tekening, het vooraf uitlokken van cognitief conflict door het geven van twee oplossingen bij een voorbeeldopgave of het inbedden van problemen in een authentieke probleemcontext) nauwelijks een invloed heeft op het aantal leerlingen dat de lineaire valstrik weet te ontlopen.

Dergelijk diepgeworteld en zeer resistent oplossingsgedrag is verbazingwekkend en het vormt het vertrekpunt van verschillende lijnen van voortgezet onderzoek binnen het Leuvens Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie. In een eerste onderzoekslijn blijven we ons toespitsen op de meetkundige problemen zoals hierboven beschreven, waarbij we dieper graven naar de onderliggende denk- en probleemoplossingsprocessen bij de leerlingen, en de elementen in hun kennisbasis die het ongebreideld proportioneel redeneren mogelijk maken (enkele bevindingen hierover werden beschreven in De Bock, Van Dooren, Verschaffel & Janssens, 2001). Een tweede, nieuwe onderzoekslijn is het nagaan van de veralgemeenbaarheid van de illusie van lineariteit. Het fenomeen als dusdanig is niet specifiek voor de meetkunde, maar vooralsnog is er enkel systematisch onderzoek gedaan naar het fenomeen binnen dit domein, en bovendien met het type vraagstukken over de relatie tussen lineaire afmetingen, oppervlakte en volume van gelijkvormige figuren. We willen daarom meer systematisch nagaan of de illusie ook, en in even sterke mate, optreedt in andere wiskundedomeinen, zoals elementaire rekenkunde of kansrekening. Dit laatste spoor, en met name de exploratie in het domein kansrekening, zal in het vervolg van deze bijdrage verder worden uitgewerkt. Een derde onderzoekslijn, die in een later stadium zal worden aangevat, sluit nauw aan bij de twee andere onderzoekslijnen: we willen op zoek gaan naar aangepaste instructievormen die het optreden van de lineariteitsillusie kunnen voorkomen en/of wegwerken.

## Domein kansrekening: doelen en opzet van het onderzoek

Er waren verschillende redenen om te kiezen voor het domein kansrekening als het eerstvolgende gebied waarin we de lineariteitsillusie zouden exploreren. Ten eerste zijn de wetten van de kansrekening tamelijk complex en gaan er achter toevalsfenomenen vaak vrij ingewikkelde wiskundige verbanden schuil (zoals in het vervolg van deze bijdrage nog zal blijken). Ten tweede – en daarmee samenhangend – is het bij uitstek een domein waarin zeer veel leerlingen diepgewortelde misvattingen hebben en waarin eenieder wel eens in de verleiding komt om voort te gaan op onterechte intuïties. Er bestaat dan ook al een enorme hoeveelheid onderzoeksliteratuur rond misvattingen in kansrekenen. En, 'last but not least', het begrip 'kans' op zich vertoont ook een zeer sterke verwantschap met het begrip 'verhouding', zodat mensen in kanssituaties vrijwel als vanzelfsprekend grijpen naar verhoudingen. Fischbein (1975, p. 58) schrijft over proportioneel redeneren en kansrekening dat '*at a very basic intuitive level, the two schemata share the same roots, namely an intuition called by us the intuition of relative frequency*'. De kans op een bepaalde gebeurtenis (bijvoorbeeld het gooien van een even aantal ogen met een dobbelsteen) wordt meestal ingeschat door het beschouwen van de relatieve frequentie van het aantal succesvolle uitkomsten (drie uitkomsten kunnen beschouwd worden als het optreden van de gebeurtenis: het gooien van één, twee, vier of zes ogen) ten opzichte van het aantal mogelijke uitkomsten (een dobbelsteenworp kan zes mogelijke resultaten opleveren).

De eerste stap in het onderzoek naar onterecht proportioneel redeneren bij kansrekenen bestond uit het uitvoeren van een uitgebreide literatuurstudie. In die onderzoeksliteratuur werd systematisch gespeurd naar misconcepties die enige verwantschap hebben met (en dus mogelijk zijn toe te schrijven aan) de overgeneralisering van het proportioneel model.

In een tweede fase willen we langs empirische weg nagaan of de geïnventariseerde misvattingen ook daadwerkelijk toe te schrijven zijn aan de neiging van leerlingen om overal proportionele verbanden toe te passen. Zo proberen we aan te tonen dat het fenomeen een breder toepassingsgebied heeft en kan bovendien een ander licht geworpen worden op een aantal in de onderzoeksliteratuur gekende misvattingen omtrent kansrekening.

## Resultaten van het literatuuronderzoek

Bij de literatuurstudie werd vertrokken van een aantal overzichtsartikelen (bijvoorbeeld Shaughnessy, 1992), die ons een goed beeld gaven van de gekende misvattingen binnen kansrekening, en ons verwezen naar andere sleutelreferenties. Binnen dat overzicht werd vervolgens gezocht naar die specifieke misvattingen die mogelijk de uiting zijn van de onterechte toepassing van het proportioneel model. Daarbij viel overigens op dat de onderzoekers zelf slechts zelden verwijzen naar onterecht proportioneel redeneren als mogelijke onderliggende oorzaak van misvattingen omtrent kansen.
Om een idee te geven van dergelijke gekende kansenmisvattingen en hoe deze gebaseerd zouden kunnen zijn op een onterechte proportionele redenering, zullen we in een eerste paragraaf enkele problemen presenteren die een dergelijke misvatting kunnen uitlokken. In de volgende paragraaf behandelen we vervolgens een bijzondere categorie van misvattingen die te wijten zijn aan het proportioneel relateren van de parameters in binominale kanssituaties. Ook deze misvattingen zullen we telkens illustreren aan de hand van een concrete situatie.

***Een eenvoudig en een complex voorbeeld***
Om de diversiteit aan kanssituaties te illustreren waarin een onterechte proportionele redenering uitgelokt kan worden, zullen we in deze paragraaf twee voorbeelden geven: een eerste voorbeeld waarin gezondigd wordt tegen een zeer eenvoudig principe uit de kansrekening en een tweede voorbeeld waarin meer geavanceerde redeneringen en berekeningen vereist zijn om tot het correcte antwoord te komen.

***Voorbeeld 1***
*Je mag twee keer met een eerlijke dobbelsteen gooien. Hoe groot is de kans dat de som van de ogen gelijk is aan zes?*

Deze kans is gemakkelijk te berekenen. Er zijn vijf manieren om met twee dobbelsteenworpen een totaal van zes ogen te werpen. De kans op zes ogen is de verhouding tussen deze vijf succesvolle mogelijkheden en het totale aantal mogelijkheden dat men kan verkrijgen met twee dobbelsteenworpen. Bij de eerste dobbelsteenworp zijn er zes mogelijkheden, ook bij de tweede dobbelsteenworp zijn er zes, zodat er in totaal $6^2 = 36$ mogelijke uitkomsten zijn. 5/36 geeft een kans van 14%.
Fischbein en Gazit (1984) rapporteerden dat zowat een op de drie twaalf- tot veertienjarige leerlingen in hun onderzoek deze opgave op een andere manier beantwoordde, namelijk met 41%. Een kwalitatieve analyse van de antwoordprotocollen leverde een verklaring voor deze frequent voorkomende fout: deze leerlingen gingen uit van het correcte principe van het berekenen van de verhouding van het aantal gunstige mogelijkheden ten opzichte van het totaal aantal mogelijkheden, alleen berekenden zij deze laatste waarde (het totale aantal mogelijkheden) verkeerd: de leerlingen gingen ervan uit dat er bij twee dobbelsteenworpen $2 \times 6 = 12$ mogelijkheden zijn en berekenden dus 5/12 in plaats van 5/36, hetgeen 41% als uitkomst gaf.

In welke zin is hier sprake van een overgeneralisering van het proportioneel model? De leerlingen zien juist in dat het aantal mogelijke uitkomsten toeneemt met het aantal dobbelsteenworpen, maar ze kwantificeren dit verkeerd. Zij gaan ervan uit dat er een proportioneel verband is tussen het aantal dobbelsteenworpen ($n$) en het aantal mogelijke uitkomsten ($N$), terwijl het een exponentieel verband betreft. Zij gaan er met andere woorden van uit dat $N = 6 \times n$ in plaats van $N = 6^n$.

***Voorbeeld 2***
*Er zitten dertig leerlingen in onze klas. Hoe groot is de kans dat er minstens twee klasgenoten zijn die dezelfde verjaardag hebben?*

Het gaat hier om de tamelijk bekende verjaardagenparadox, en ook hier wordt vaak intuïtief een antwoord gegeven dat terug te brengen is tot het verkeerdelijk veralgemenen van het proportioneel model. Menig leerling zal hier immers de 'intuition of relative frequency' (Fischbein, 1975) toepassen en de volgende redenering maken: 'In een gewoon jaar zijn er in totaal 365 mogelijke verjaardagen. In de klas zijn er dertig leerlingen, dus dertig verjaardagen. Om de kans te bepalen op een dubbele verjaardag moeten die dertig beschikbare verjaardagen bekeken worden ten opzichte van de 365 mogelijkheden die er in totaal zijn. De verhouding tussen dertig en 365 is 0,08, zodat er 8% kans is om bij dertig leerlingen een dubbele verjaardag te vinden.'
Analoog zijn leerlingen dan ook geneigd te denken dat de kans op dezelfde verjaardag bij zestig leerlingen dubbel zo groot is dan bij dertig leerlingen, in een groep van negentig leerlingen drie keer zo groot, enzovoort.
Het is vrij makkelijk om aan te geven waarom de $n$/365-redenering van deze leerlingen fout is, maar velen zullen echter moeite hebben om aan te geven wat de juiste berekeningswijze dan wel is. Bovendien staan velen versteld wanneer zij de ware (theoretische) kans vernemen, omdat deze (tegenintuïtief) erg hoog is: 71%!
De berekening van die kans is complex, maar kan als volgt uitgelegd worden. De eerste leerling maakt zijn verjaardag bekend. Wanneer leerling 2 vervolgens zijn verjaardag bekend maakt is er een kans van 364/365 dat deze verschillend is. De kans om dezelfde verjaardag te hebben is bijgevolg 1 – (364/365) = 0,002. Gesteld dat deze twee leerlingen *niet* dezelfde verjaardag hebben, dan vertelt leerling drie wanneer hij verjaart. Er is dan een kans van 363/365 dat deze nieuwe datum verschilt van de vorige twee. Bijgevolg is de kans dat de drie verjaardagen verschillend zijn gelijk aan (364/365) × (363/365). De kans dat er bij de drie leerlingen wel een dubbele verjaar-

dag is, is dan:

$$1 - \left(\frac{364}{365} \times \frac{363}{365}\right) = 0{,}009.$$

Dit principe is eenvoudig uitbreidbaar naar dertig leerlingen, en de kans wordt dan:

$$1 - \frac{364 \times 363 \times 362 \times \ldots \times [365 - (30 - 1)]}{365^{29}} = 0{,}71.$$

Meer algemeen kan men de relatie tussen het aantal leerlingen in een klas ($n$) en de kans op tweemaal dezelfde verjaardag uitdrukken als:

$$P(\text{dubbele verjaardag}) =$$

$$1 - \frac{364 \times 363 \times 362 \times \ldots \times [365 - (30 - 1)]}{365^{n-1}}.$$

In figuur 1 is het verband uitgezet tussen enerzijds het aantal leerlingen dat zich in een klas bevindt en anderzijds de kans dat twee leerlingen dezelfde verjaardag hebben. Zowel het correcte (niet-lineaire) verband als het foutieve (lineaire) verband ($P = n/365$) zijn weergegeven.

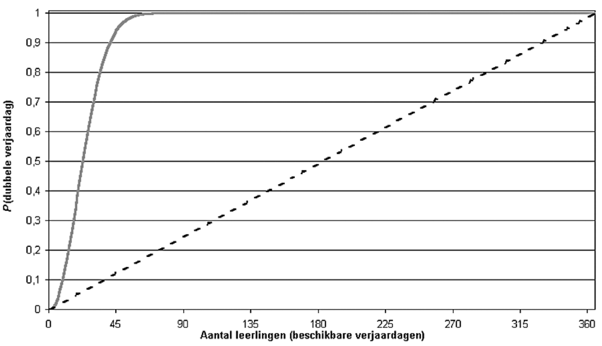


*fig. 1 Voorstelling van het correcte en foutieve verband tussen het aantal leerlingen en de kans op twee leerlingen met dezelfde verjaardag*

De twee hierboven gegeven voorbeelden tonen aan hoe een proportionele redenering in zowel eenvoudige als complexere kanssituaties kan leiden tot foutieve antwoorden. We bespreken nu nog een bijzondere categorie van foutieve proportionele redeneringen in kanssituaties, waarbij onterecht wordt uitgegaan van een recht of omgekeerd evenredig verband tussen de variabelen die betrokken zijn bij de binominale kansverdeling.

***Misconcepties met betrekking tot de variabelen van de binominale kansverdeling***

Bij het uitvoeren van het literatuuronderzoek bleek dat heel wat van deze misconcepties terug te brengen zijn tot één welbepaald mechanisme, met name de onterechte veronderstelling van een proportioneel verband tussen de verschillende variabelen die de kans in een binominale kanssituatie bepalen. Om die variabelen te beschrijven kunnen we uitgaan van de volgende situatie:

*Wat is de kans om minstens viermaal een zes te gooien in tien worpen met een eerlijke dobbelsteen?*

De kans ($P$) op een succesvolle samengestelde uitkomst (minstens vier zessen in tien pogingen) is in dit geval ongeveer 0,07, en wordt bepaald door de volgende drie variabelen uit de kanssituatie:

- ***n***: het aantal pogingen dat is toegestaan (in het voorbeeld is $n = 10$)
- ***k***: het vereiste aantal succesvolle uitkomsten (in het voorbeeld is $k$ Š≥ 4)
- ***p***: de kans op een succesvolle uitkomst van de enkelvoudige gebeurtenis (in het voorbeeld is $p = 1/6$).

We geven nu telkens een voorbeeld van een redenering waarin een of twee van deze variabelen uit de kanssituatie onterecht proportioneel worden gerelateerd aan de uiteindelijke kans op een succesvolle uitkomst ($P$).

***Voorbeeld 3: Verband tussen n en P***

*Thomas heeft reeds een intuïtief begrip van kansen, en hoe die berekend kunnen worden. We nodigen Thomas uit om mee te spelen in een dobbelspelletje dat als volgt gaat. Nadat hij tien euro heeft ingezet mag hij driemaal met een dobbelsteen gooien. Gooit hij minstens eenmaal een zes, dan krijgt hij zijn inzet plus twaalf euro terug. In het andere geval is hij zijn inzet kwijt. Thomas redeneert: 'Als ik driemaal mag gooien, verdrievoudigt mijn kans op succes ook, dus heb ik 3/6 kans om te winnen. Aangezien ik in de helft van de gevallen twaalf euro win (en in de andere helft van de gevallen tien euro verlies) zal het spelletje dus wel in mijn voordeel zijn.'*

Hier gaat Thomas in de fout. Na een tijdje zal hij merken dat hij geld verliest in plaats van wint. Hij heeft hier de onterechte redenering gemaakt dat er een proportioneel verband bestaat tussen $P$ (minstens een zes) en $n$.
De kans op een succes bij één worp is inderdaad 1/6. Maar de kans op succes bij drie pogingen is *niet* $3 \times 1/6$, maar wel $1 - (5/6)^3$, of één min de kans op *geen* zes in drie pogingen, en deze is ongeveer gelijk aan 0,42. We kunnen dan ook voorspellen dat Thomas, als hij honderd keer meespeelt, geen vijftig keer twaalf euro zal winnen en vijftig keer tien euro zal verliezen (met als balans +100 euro), maar 42 keer twaalf euro zal winnen, en 58 keer tien euro zal verliezen (waarbij de balans uitvalt op −76 euro)!

De fout in Thomas' redenering kan aangetoond worden doordat, wanneer in dit gokspel het aantal pogingen ($n$) groter wordt dan zes, de toepassing van het lineaire model tot kansen groter dan 1 leidt. In Figuur 2 wordt het foutieve lineaire en het correcte niet-lineaire verband tussen $n$ en $P$ duidelijk weergegeven.

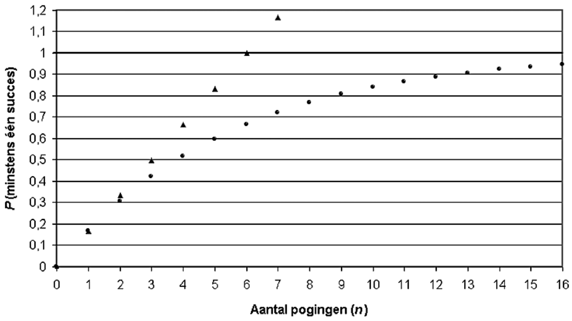


*fig. 2 Verband tussen het aantal toegestane worpen met een dobbelsteen en de kans op minstens één zes*

Uit deze figuur valt verder af te leiden dat de proportionele redenering wel een goede benadering biedt voor de kanssituatie bij een klein aantal pogingen. Bijvoorbeeld: in geval van twee pogingen is de correcte kans op minstens één zes 0,3056, terwijl de proportionele redenering leidt tot een kans van 0,3333. Dit is zeker het geval in situaties met een zeer kleine kans op succes: wanneer men twee lootjes in de loterij koopt met 1/1000 kans op succes per lotje, geeft dit 0,0019999 kans om te winnen, hetgeen zeer goed benaderd wordt door $2 \times 0{,}001$.
De zonet beschreven misconceptie is een voorbeeld van de onterechte veronderstelling van een lineaire relatie tussen $n$ en $P$. Er bestaan analoge misconcepties over het verband van $P$ met de twee andere variabelen: $k$ en $p$. Telkens gaat het in principe om dezelfde foutieve redenering: men ziet *kwalitatief* in wat het effect is van het veranderen van een bepaalde parameter op de uiteindelijke kans op succes, maar dit inzicht wordt onterecht *gekwantificeerd* volgens een proportioneel verband.

***Voorbeeld 4: Verband tussen k en P***
*Als je tien keer met een dobbelsteen mag gooien, is de kans om minstens twee zessen te gooien gelijk aan 0,52. Hoe groot is de kans dat je in die tien dobbelsteenworpen minstens vier zessen gooit?*

Wanneer het vereiste aantal succesvolle uitkomsten in een kanssituatie toeneemt, dan daalt de kans om een spel te winnen. Als men tien pogingen heeft, is de kans op minstens vier zessen kleiner dan de kans op minstens twee zessen. Maar die daling gebeurt niet op een proportionele manier. Veel leerlingen zullen in bovengenoemde situatie in de verleiding komen om te redeneren dat de kans halveert als men het vereiste aantal successen verdubbelt (wat de kans op minstens vier zessen op 0,26 zou brengen). Wanneer men de correcte binominale kans berekent, zal echter blijken dat die kans 0,07 is!

***Voorbeeld 5: Verband tussen p en P***
*Uit een spel van 52 kaarten, wordt telkens één na één een kaart getrokken. Het resultaat wordt genoteerd, de kaart wordt teruggestoken en het spel wordt geschud, zodat elke trekking volledig onafhankelijk van de vorige is. Het trekken van een rode kaart levert een punt op. Als je tien keer mag proberen, dan heb je een kans van 0,38 om zes of meer punten te behalen.*
*We maken nu de regels van het spel wat strenger: vanaf nu levert alleen het trekken van een hartenkaart een punt op. De vraag is: wat is nu de kans dat je zes of meer punten behaalt?*

Ook hier geldt dat er geen proportioneel verband bestaat tussen de variabelen. Wanneer hier proportioneel wordt geredeneerd, dan zal men besluiten dat die kans 0,19 is (de kans $p$ wordt gehalveerd, zodat ook de kans om minstens zes punten te behalen wordt gehalveerd), terwijl de binominale verdeling ons leert dat die kans 0,02 is.

Naast de drie hierboven beschreven misconcepties over het effect van $n$, $k$ of $p$ op de uiteindelijke kans $P$, zijn er nog andere misvattingen die gebaseerd zijn op de proportionele *combinatie* van twee variabelen. De redenering achter de misvattingen is misschien wat complexer en wellicht daardoor zijn deze misvattingen ook moeilijker te doorbreken. Niet toevallig gaat het dan ook om misvattingen met een ruimere bekendheid in de literatuur.

***Voorbeeld 6: Gezamenlijk effect van p en n op P***
Zeer bekend is het volgende probleem dat Chevalier de Méré voorlegde aan zijn vriend Pascal (zie bijvoorbeeld Freudenthal, 1973).
De Méré wist uit ervaring dat het voordelig was om op minstens één zes in vier worpen met een eerlijke dobbelsteen te wedden. Hij beredeneerde vervolgens dat het dan even voordelig moest zijn om te wedden op één dubbele zes in 24 worpen met twee eerlijke dobbelstenen. Eén specifieke uitkomst uit zes mogelijkheden in vier worpen moet immers even frequent voorkomen als één specifieke uitkomst uit 36 mogelijkheden in 24 worpen aangezien 6/4 = 36/24. Toen bleek dat, zijn redenering ten spijt, weddenschappen op dit laatste niet het verhoopte financiële resultaat opleverden, ging hij bij zijn vriend Pascal te rade ... Pascals (correcte) antwoord luidde als volgt: de kans op geen zes in één worp is 5/6. In vier worpen is die kans $(5/6)^4$ en de kans op minstens één zes in vier worpen is dan $1 - (5/6)^4 = 0{,}5177$. Analoog is de kans op een dubbele zes in 24 worpen $1 - (35/36)^{24} = 0{,}4914$, net iets minder dan een half.

Een analyse van dit probleem vanuit de variabelen van de binominale verdeling maakt de onterechte proportionele redenering duidelijk: enerzijds wordt de kans op een succesvolle uitkomst ($p$) zesmaal kleiner, anderzijds wordt het aantal pogingen ($n$) verzesvoudigd. De redenering is dan dat (vanwege de recht evenredige verbanden tussen $n$ en $P$, en tussen $p$ en $P$) deze effecten elkaar uitvlakken, waardoor de uiteindelijke kans ($P$) dezelfde blijft.

***Voorbeeld 7: Gezamenlijk effect van n en k op P***
Een misvatting die teruggaat op het uitvlakkende effect van de *n*- en *k*-variabele uit de binominale verdeling, is het bekende hospitaal-probleem, onder meer bestudeerd door Fischbein en Schnarch (1997):

*In een zekere stad zijn er twee hospitalen, een klein, waarin men dagelijks gemiddeld vijftien geboorten telt en een groot met gemiddeld 45 geboorten per dag.*
*De kans op de geboorte van een jongen bedraagt ongeveer 50%. (Uiteraard zijn er dagen waarop er meer dan 50% jongens worden geboren en dagen waarop er minder dan 50% jongens worden geboren.)*
*In het kleine hospitaal noteert iemand gedurende een gans jaar de dagen waarop er meer dan negen jongens worden geboren, hetgeen dus meer is dan 60% van het totaal aantal geboorten in dat hospitaal.*
*In het grote hospitaal noteert iemand gedurende een gans jaar de dagen waarop er meer dan 27 jongens worden geboren, hetgeen dus meer is dan 60% van het totaal aantal geboorten in dat hospitaal.*
*In welk van de twee hospitalen komen zulke dagen het vaakst voor?*

Gezien de wet van de grote aantallen, luidt het correcte antwoord dat in het kleine hospitaal vaker dagen voorkomen waarop meer dan 60% van de geboorten jongens zijn. Verificatie via de binominale verdeling geeft kansen op meer dan 60% jongens van, respectievelijk, 0,1509 en 0,0676 voor het kleine en het grote hospitaal. Het verwachte aantal dagen in een jaar waarop deze gebeurtenis zich voordoet is dus ongeveer 55 dagen voor het kleine en 25 dagen voor het grote hospitaal.

Fischbein en Schnarch legden dit probleem voor aan vier groepen van elk twintig leerlingen (een groep tien- tot elfjarigen, een groep twaalf- tot dertienjarigen, een groep veertien- tot vijftienjarigen en een groep zestien- tot zeventienjarigen). Het aantal leerlingen dat deze opgave foutief beantwoordde en redeneerde dat het aantal dagen gedurende een jaar waarop er meer dan 60% jongens geboren worden niet afhangt van de steekproefgrootte, nam toe met de leeftijd (respectievelijk 10%, 30%, 70%, en 80% van de tien- tot elfjarigen, twaalf- tot dertienjarigen, veertien- tot vijftienjarigen en zestien- tot zeventienjarigen gaven dit antwoord).
Meestal werd dit antwoord gerechtvaardigd door een gelijkheid van verhoudingen (‘9/15 = 27/45’), en die onterechte rechtvaardiging bleek vaker voor te komen naarmate leerlingen ouder worden.

De verklaring van Fischbein ligt duidelijk in de lijn van onze interpretatie. We komen tot de volgende redenering. Het vereiste aantal successen verdrievoudigt (in het kleine hospitaal is $k > 9$, tegenover $k > 27$ in het grote hospitaal) en daardoor neemt de kans $P$ af met een factor 3. Daartegenover staat dat het toegestane aantal pogingen met dezelfde factor toeneemt (in het kleine hospitaal is $n = 15$, tegenover $n = 45$ in het grote hospitaal). Beide effecten heffen elkaar op, zodat de kans $P$ in beide hospitalen even groot is.

## Slotbeschouwing

In een aantal gevallen blijkt ongeoorloofde toepassingen van lineariteit aan de basis te liggen van misvattingen van leerlingen in kanssituaties, in het bijzonder in situaties waarin de binominale verdeling van toepassing is. Als leraar is het belangrijk de onderliggende basis van misvattingen van leerlingen te doorzien om nadien op adequate wijze te kunnen remediëren. Meestal is het vrij eenvoudig te verklaren waarom een proportionele redenering niet *kan* kloppen en de vraag naar de juiste redenering rijst dan spontaan. Voor Pascal vormden de vragen en foutieve (proportionele) redeneringen van Chevalier de Méré een belangrijke motivatie om grote stappen te zetten in het begrijpen van kanssituaties … Een inspirerend voorbeeld voor de klas?

*Wim Van Dooren, Aspirant van het Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek (FWO) Vlaanderen, Centrum voor Instructiepsychologie en –Technologie (CIP&T), K.U. Leuven*
*Dirk De Bock, Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie (CIP&T), K.U. Leuven, Economische Hogeschool Sint-Aloysius (EHSAL), Brussel*
*Lieven Verschaffel, Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie (CIP&T), K.U. Leuven*

*Deze publicatie is tot stand gekomen in het kader van de Onderzoekstoelage OT-2000-10 van het Onderzoeksfonds van de Katholieke Universteit Leuven. De auteurs wensen Patrick Onghena en Michel Roelens te bedanken voor hun waardevolle opmerkingen en suggesties bij een eerdere versie van dit artikel.*

## Literatuur

Cramer, K., T. Post & S. Currier (1993). Learning and teaching ratio and proportion: research implications. In D.T. Owens (Ed.). *Reseach ideas for the classroom: Middle grades mathematics,* pp. 159-178. New York: Macmillan.
De Bock, D., W. van Dooren, L. Verschaffel & D. Janssens (2001). Secondary school pupils’ improper proportional reasoning: An in-depth study of the nature and persistence of pupils’ errors. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Vol. 2*, pp. 313-320. Utrecht: Freudenthal Institute.
De Bock, D. (1998). De illusie van lineariteit. Deel 1: Situering en achtergronden. *Wiskunde & Onderwijs, 93*, 18-26.

De Bock, D., L. Verschaffel & D. Janssens (1999). Some reflections on the illusion of linearity. In P. Radelet (Ed.). *Proceedings of the third european summer university on history and epistemology in mathematical education Vol. 1*, pp. 153-167. Leuven/Louvain-la-Neuve, Belgium.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. & A. Gazit (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics, 15*, 1-24.

Fischbein, E. & D. Schnarch (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 96-105.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: reflections and directions. In D.A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics thinking and learning,* pp. 465-494. New York: Macmillan.

Verschaffel, L. (1993). Leren oplossen van reken/wiskundeproblemen in en buiten de school: Enkele resultaten van recent onderzoek. *Wiskunde & Onderwijs, 73*, 19-32.

Verschaffel, L., B. Greer & E. De Corte (2000). *Making sense of word problems.* Lisse: Swets & Zeitlinger.

## Mathematisch Congres: Lerarensymposium en uitreiking Wiskunde Scholen Prijs

Onder auspiciën van het Wiskundig Genootschap organiseert de Technische Universiteit Eindhoven op donderdag 4 en vrijdag 5 april 2002 het 38$^{e}$ Nederlands Mathematisch Congres.
Het volledige programma van het NMC is te vinden op http://www.win.tue.nl/nmc2002.

***Lerarensymposium***

Als onderdeel van het NMC is er op vrijdagmiddag 5 april speciaal voor leraren van 13.15-14.45 uur een symposium over Interactieve Digitale Leeromgevingen. In dit symposium wordt een drietal voordrachten gegeven door respectievelijk Kees Hoogland (APS), André Heck (UvA), Lodewijk van Schalkwijk (KUN/Elzendaalcollege te Boxmeer) en Mijke Campschroer (Elzendaalcollege te Boxmeer, gedetacheerd bij de KUN).
De sprekers werken allen met verschillende programma's en tijdens hun voordrachten zullen ze ingaan op de achtergronden hiervan. Tevens zullen in elke voordracht voorbeelden gedemonstreerd worden.
Na de voordrachten is er voor de deelnemers de mogelijkheid een eigen mening over een en ander kenbaar te maken. Voor meer informatie, waaronder de kosten van deelname, zie http://www.win.tue.nl/nmc2002/

***Uitreiking Wiskunde Scholen Prijs***

Aansluitend op het lerarensymposium vindt op 5 april van 15-16 uur de uitreiking van de Wiskunde Scholen Prijs plaats. Deze prijs is een nieuw initiatief van wiskundig Nederland en onderdeel van het WisKids-project. De prijs is ingesteld om scholen te stimuleren met hun sterke punten op het gebied van wiskundeonderwijs naar buiten te treden.
In het najaar van 2001 zijn alle scholen voor voortgezet onderwijs geïnformeerd over de mogelijkheid om mee te dingen naar de prijs, inzenden was mogelijk tot 1 maart j.l.
Er worden drie categorieën onderscheiden: basisvorming (klas 1 en 2), bovenbouw VMBO (klas 3 en 4), HAVO/VWO (de klassen 3 t/m 6). Er is een hoofdprijs van 2000 euro en daarnaast is er voor elke categorie een eerste prijs van 1000 euro te winnen.
Professor F. van der Blij zal op feestelijke wijze de prijzen uitreiken en een toelichting geven op het juryrapport. Verder zullen enkele winnaars in korte, flitsende presentaties van tien minuten hun winnende inzending toelichten. Aansluitend is er een borrel.

Deelname aan de prijsuitreiking is gratis, maar aanmelding vooraf wordt ten zeerste op prijs gesteld. Dit kan telefonisch (030 2635501, Nathalie Kuijpers, Freudenthal Instituut) of per e-mail (wiskids@fi.uu.nl).

*www.fi.uu.nl/wiskids*

*WisKids is een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap (WG), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskundeonderwijs (NVORWO). Uitvoerders zijn Ratio (KUN) STW/NWO/NVvW, Stichting Vierkant voor Wiskunde, Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade, Pythagoras (wiskundetijdschrift voor jongeren) en Freudenthal Instituut. Wiskids werkt samen met APS en SLO. Wiskids is financieel mogelijk gemaakt door OC&W, Axis en de Stichting Arbeidsmarkt en Opleiding Metalektro. De Wiskunde Scholen Prijs wordt mede gesponsord door NOCW en NVvW.*