Tekenprogramma's als CABRI kunnen met punten, lijnen en cirkels werken, maar ook met kegelsneden. Daarmee komen allerlei fraaie stellingen uit de projectieve meetkunde letterlijk binnen handbereik, en dat roept weer de vraag op naar gemakkelijk toegankelijke bewijzen. **Jan van de Craats** geeft zo'n bewijs voor de beroemde *stelling van Pascal*.

Pascal via de parabool

Inleiding

In het algemeen definiëren vijf verschillende punten, geen drie op één lijn, een niet-ontaarde *kegelsnede*, dat wil zeggen een hyperbool, een parabool of een ellips. Het tekenprogramma CABRI heeft naast de gebruikelijke tekenfaciliteiten ook de mogelijkheid om de kegelsnede door vijf gegeven punten op het scherm te tekenen. Bij het verslepen van de punten transformeert de kegelsnede mee. Op die manier kun je met kegelsneden experimenteren, stellingen controleren en zelf nieuwe eigenschappen ontdekken.

De stelling van Pascal

Een fundamentele stelling over kegelsneden die op zo'n manier kan worden geïllustreerd, werd in 1640 door de toen zestienjarige (!) Blaise Pascal gevonden en bewezen: *Stelling van Pascal: Als een zeshoek in een kegelsnede is ingeschreven, snijden de drie paren overstaande zijden elkaar in collineaire punten.*

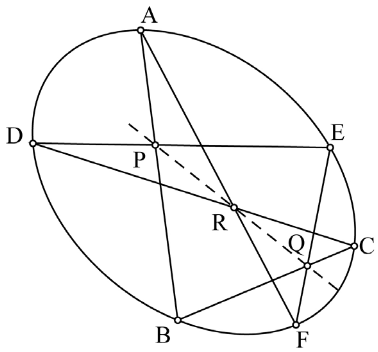

fig. 1 De stelling van Pascal

In figuur 1 is $ABCDEF$ de zeshoek, en de stelling zegt dus dat de punten $P = AB \times DE$, $Q = BC \times EF$ en $R = CD \times FA$ op één lijn liggen. De wat vreemde volgorde van de punten op de ellips is gekozen om ervoor te zorgen dat de snijpunten binnen de ellips vallen; de stelling geldt echter algemeen voor iedere keuze van de zes punten en iedere volgorde.

Zelf doen

We nodigen de lezer die deze stelling nog nooit gezien heeft uit om een oude kegelsnedenmal uit de kast te halen en de stelling zelf voor een aantal gevallen te controleren. Nog eenvoudiger is het om gewoon een cirkel te nemen. Dat is immers ook een kegelsnede en ook daarvoor moet de stelling dus waar zijn. Kies zes punten op de cirkel, noem ze (in een willekeurige volgorde) A, B, C, D, E en F, en controleer dat de snijpunten $P = AB \times DE$, $Q = BC \times EF$ en $R = CD \times FA$ op één lijn liggen.
Met CABRI wordt het allemaal nog veel spectaculairder. Je hoeft je dan ook niet tot cirkels te beperken: kies vijf willekeurige punten in het vlak, laat CABRI er de kegelsnede door tekenen, kies een zesde punt op die kegelsnede en controleer de stelling van Pascal voor deze keuze (waarbij je opnieuw de volledige vrijheid hebt om een volgorde van de zes punten vast te leggen).
In CABRI kun je de oorspronkelijke punten verslepen, en daarmee de vorm van de kegelsnede veranderen. Steeds blijven P, Q en R op één lijn liggen. Als je het voor het eerst ziet geloof je je ogen niet!

Pascals bewijs

Pascals bewijs van de stelling voor het geval dat de kegelsnede een cirkel is, is door G.W. Leibniz (1646-1716) nog gezien en geprezen toen hij Parijs bezocht, maar daarna is het verloren gegaan (Coxeter[1], pp. 85-86). Al wat rest op dit gebied is Pascals korte overzichtsschets *Essay pour les coniques* uit 1640 (integraal gereproduceerd in Kindt[2], pp. 273-276). Daarin formuleert hij de stelling eerst voor het geval van een cirkel, maar zonder een bewijs te geven. Vervolgens laat hij zien hoe daaruit dan de algemene stelling kan worden afgeleid, namelijk door de cirkel vanuit een punt buiten het vlak van de cirkel op een willekeurig ander vlak te projecteren.
Bij zo'n centrale projectie gaan lijnen in lijnen en snijpunten van lijnen in de snijpunten van de geprojecteerde lijnen over. Als de stelling dus voor iedere zeshoek in een cirkel geldig is, moet ze ook voor iedere projectie ervan gelden. En de projectie van een cirkel is een ellips, een

parabool of een hyperbool. Om precies te zijn: het is een ellips, een parabool of een hyperbool al naar gelang het verdwijnvlak (het vlak door het projectiecentrum dat evenwijdig is aan het vlak waarop je projecteert) de cirkel in 0, 1 of 2 punten snijdt.
Strikt genomen zou je om de algemene stelling van Pascal op deze manier te bewijzen eigenlijk de omgekeerde weg moeten bewandelen, en moeten laten zien dat je iedere niet-ontaarde kegelsnede tot een cirkel terug kunt projecteren. Tegen het einde van dit artikel komen we op deze kwestie nog terug.

Elementaire bewijzen

Intussen kun je je afvragen hoe Pascals bewijs voor de cirkel eruit moet hebben gezien. Coxeter geeft in zijn boek de reconstructie van zo'n bewijs als een oefenopgave, met achterin een mogelijke oplossing (zie Coxeter[1], p. 86, 145-146), en ook tal van anderen hebben aannemelijke suggesties gedaan. De meeste oplossingen maken gebruik van omtrekshoeken en al dan niet expliciet als zodanig gedefinieerde dubbelverhoudingen.
Vrijwel alle boeken over projectieve meetkunde geven van de stelling van Pascal echter een synthetisch bewijs via een keten van projectiviteiten (zie bijvoorbeeld Kindt[2], p. 115), of een analytisch bewijs met behulp van projectieve coördinaten. In beide gevallen moet daarvoor dan eerst het nodige projectieve gereedschap ontwikkeld worden.
Het blijft niettemin aantrekkelijk om te zoeken naar een meer elementair bewijs. Zoals gezegd lukt dat zeker via de cirkel, maar hier zullen we een variant presenteren die voor beginners misschien nog geschikter is, omdat die geen gebruik maakt van omtrekshoeken en dubbelverhoudingen. Het basisprincipe van Pascal zelf laten we intact: we geven een bewijs van de stelling in een bijzonder eenvoudig geval, en merken op dat je door projectie het algemene geval hierop terug kunt voeren.

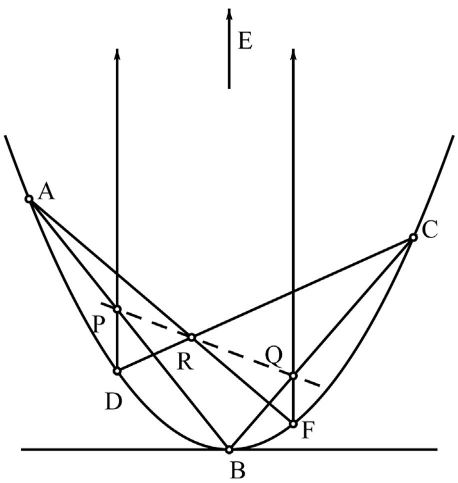

fig. 2 De stelling van Pascal voor een parabool met een bijzondere ligging van de punten B en E. Het punt B is de top en E is het 'punt op oneindig' van de parabool.

Geen cirkel maar een parabool

Het idee is nu om niet de cirkel als bijzondere kegelsnede te nemen, maar de parabool. Zoals blijken zal kunnen we de zaak nog verder vereenvoudigen door te veronderstellen dat twee hoekpunten van Pascals zeshoek *ABCDEF*, namelijk *B* en *E*, bijzondere punten van de parabool zijn: *B* is de top en *E* is het punt op oneindig. Wat we met dat 'punt op oneindig' bedoelen is in figuur 2 te zien. Neem eerst even aan dat *E* heel ver weg op de parabool ligt. Je ziet dan (reken het zo nodig na voor de parabool $y = x^2$) dat de richting van lijnen *DE* en *EF* vrijwel samenvalt met de as-richting van de parabool. In de getekende limietsituatie, waarin *E* het punt op oneindig van de parabool is, zijn *DE* en *EF* dus evenwijdig met de as.

Een bewijs voor de parabool

Voor het bewijs van de stelling van Pascal in het bijzondere geval van de parabool van figuur 2 kunnen we zonder beperking van de algemeenheid aannemen dat die parabool gegeven wordt door de standaardvergelijking $y = x^2$. We maken gebruik van twee lemma's. Het eerste kun je naar keuze bewijzen met elementaire meetkunde of met elementair rekenwerk, het tweede is er een direct gevolg van.
Lemma 1: De lijn door de punten (a,a^2) en (b,b^2) snijdt de y-as in $(0,-ab)$.
(Zie figuur 3, waarin *a* negatief en *b* positief is gekozen.)

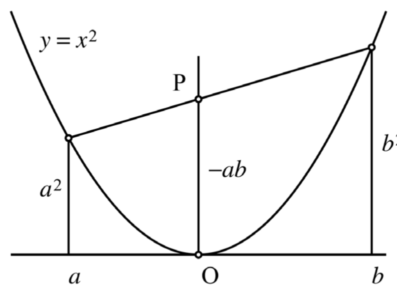

fig. 3 $OP = -ab$

Lemma 2: In de situatie van figuur 4 geldt, onafhankelijk van de keuze van c, dat $VU : VW = b : a$.

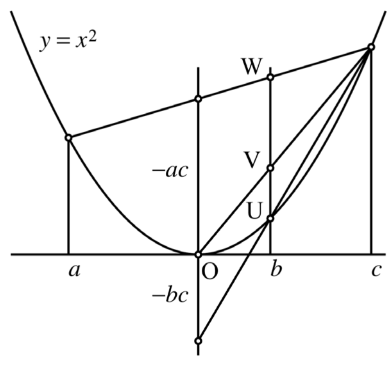

fig. 4 $VU : VW = b : a$

Let hierbij op: we werken met gerichte lijnstukken *VU* en *VW*, en dus ook met van teken voorziene lengtes. In figuur 4 zijn *VU* en *VW* tegengesteld gericht, in overeenstemming met het feit dat *a* en *b* daar verschillend teken hebben. Het lemma is echter met deze tekenafspraken voor iedere keuze van *a* en *b* geldig.
Het bewijs van de stelling van Pascal voor de situatie van figuur 2 is nu een dubbele toepassing van Lemma 2 (zie figuur 5):

$$PD : PU = d : f = QV : QF$$

en omdat *DU* en *FV* evenwijdig zijn, volgt hieruit dat *R* op de lijn *PQ* ligt.

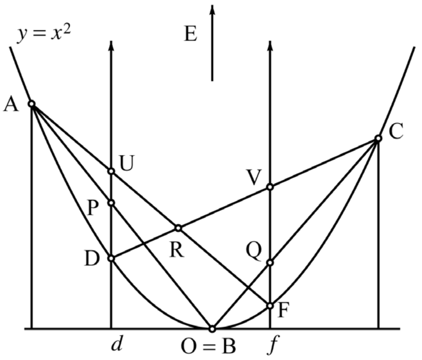

fig. 5 Nogmaals de Stelling van Pascal, nu met twee hulppunten U en V.

Omdat we zorgvuldig met gerichte lijnstukken en van teken voorziene lengtes gewerkt hebben, is dit bewijs algemeen geldig, hoe de punten *A*, *C*, *D* en *F* verder ook op de parabool liggen. Daarmee is Pascals stelling voor dit geval bewezen.

Een kegelsnede tot parabool projecteren

Nu zullen we laten zien dat we iedere instantie van de stelling van Pascal via projectie kunnen overvoeren in de situatie van figuur 2, en dat we dus in feite ook voor het algemene geval de stelling bewezen hebben. We willen dus bewijzen:
Lemma 3: Iedere niet-ontaarde kegelsnede met daarop twee willekeurig gekozen punten B en E kan men via een centrale projectie in een parabool overvoeren met het beeld van B als top en het beeld van E als punt op oneindig.
We voeren eerst enige meetkundige verkenningen uit aan de hand van figuur 6. Het vlak van de kegelsnede heet daar α en het vlak waarop we projecteren β. We hebben voor het gemak α en β loodrecht op elkaar genomen, maar dat is niet wezenlijk. Wel wezenlijk is dat β evenwijdig is aan de raaklijn in *E* aan de kegelsnede. Verder speelt het snijpunt *S* van de raaklijnen in *E* en *B* een cruciale rol bij de keuze van het projectiecentrum *O*. Dat kiezen we namelijk zo dat vlak *EOS* evenwijdig is aan β en hoek *EOS* een rechte hoek is.
Met deze keuze van β en *O* zal de projectie van de kegelsnede vanuit *O* op β een parabool zijn, waarbij de projectie van *E* op β het punt op oneindig is, en de projectie *T* van *B* op β de top van de parabool.
Waarom? In de eerste plaats heeft het verdwijnvlak *EOS*, het vlak door *O* evenwijdig aan β, slechts één punt met de kegelsnede gemeen, namelijk *E*, want *ES* is een raaklijn aan de kegelsnede. De projectie van de kegelsnede op β is dus een kegelsnede met één punt op oneindig, dat wil zeggen dat het een parabool is, en wel een parabool met een asrichting die evenwijdig is aan *OE*.
Als *K* het snijpunt met β is van de raaklijn *SB*, snijdt het vlak *OSB* het vlak β volgens een lijn door *K* die evenwijdig is aan *OS*, en die dus loodrecht staat op *OE*, en daarmee ook loodrecht op de as van de parabool. Deze lijn *KT* is de projectie van de raaklijn *SK* aan *B*, en daarmee is *KT* de raaklijn in *T* aan de parabool. Omdat die loodrecht staat op de as, is *T* de top van de parabool, zoals we wilden aantonen.

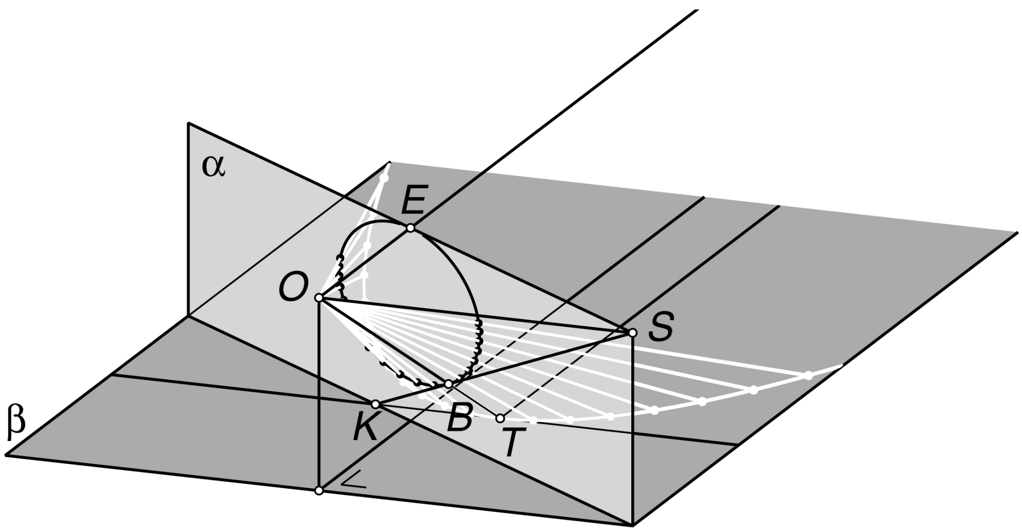

fig. 6 Projectie van een kegelsnede tot een parabool. Daarbij gaat B over in de top T van de parabool en E in het punt op oneindig.

Nogmaals het punt op oneindig

Figuur 6 laat goed zien waarom de projectie van E op β het 'punt op oneindig' van de parabool genoemd wordt: loopt een punt P op de kegelsnede in α linksom of rechtsom naar E toe, dan loopt de projectie P' op de parabool links of rechts naar oneindig. De verbindingslijn $P'T$ met de top nadert daarbij steeds meer tot de as van de parabool, want die as is de projectie van de lijn BE in α.
En nu we het toch over punten op oneindig hebben, kunnen we gelijk opmerken dat figuur 6 enigszins moet worden aangepast in het geval dat de raaklijnen in E en B evenwijdig zijn. Dan wordt S namelijk het 'oneindig verre snijpunt' van die raaklijnen. De lijn OS wordt dan de lijn door O met diezelfde richting, dus de lijn door O evenwijdig aan die beide raaklijnen. Het projectiecentrum O moeten we in dat geval dus zo kiezen dat de lijn OE evenwijdig is aan β en loodrecht staat op de raaklijn aan de kegelsnede in E.

De analytische aanpak

De bovenstaande meetkundige beschouwing over het projecteren van een willekeurige kegelsnede tot een parabool bevat nog één lacune, een lacune die overigens in een iets andere vorm ook het bewijs van Pascal ontsiert, namelijk de stilzwijgende veronderstelling dat de projectie van een niet-ontaarde kegelsnede weer een kegelsnede is.
Het valt niet eens mee om dat gat met klassieke, 'euclidische' middelen netjes te dichten – wie het niet gelooft, moet het maar proberen. Veel eenvoudiger is het om Lemma 3 analytisch te bewijzen, waarbij we toch de bij figuur 6 passende meetkundige opzet als uitgangspunt nemen.

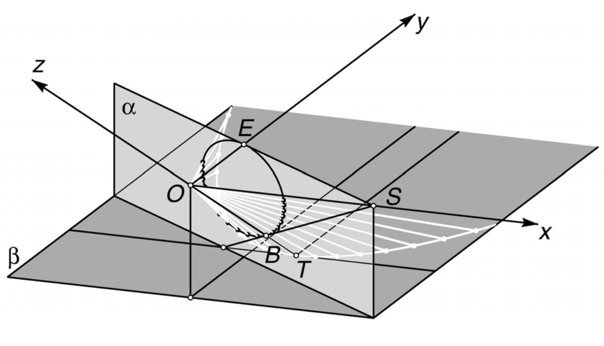

fig. 7 Het coördinatenstelsel bij het analytische bewijs van Lemma 3.

Kies daartoe een coördinatenstelsel met O als oorsprong en de lijnen OS, OE en OB als respectievelijk de x-as, de y-as en de z-as (zie figuur 7). De x-as en de y-as zijn onderling loodrecht, maar de z-as zal het xy-vlak in het algemeen niet loodrecht snijden. Dat is voor het vervolg echter geen bezwaar.
Door de punten van de kegelsnede in α met O te verbinden, ontstaat een kegel. In de figuren 6 en 7 is een aantal beschrijvende lijnen van die kegel wit getekend.
In het gekozen coördinatenstelsel wordt ieder kwadratisch oppervlak, en dus ook iedere kegel, gegeven door een tweedegraadsvergelijking in de variabelen x, y en z:

$$F(x, y, z) \equiv a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + d\,yz + e\,zx + f\,xy + g\,x + h\,y + k\,z + m = 0.$$

Omdat de oorsprong O op de kegel ligt, is $m = 0$. In de top O van de kegel is geen raakvlak gedefinieerd, hetgeen betekent dat $F_x\,(0,0,0) = F_y\,(0,0,0) = F_z\,(0,0,0) = 0$, en dus moeten ook g, h en k nul zijn.
Verder liggen de punten met coördinaten (0,1,0) en (0,0,1) op de kegel, hetgeen leidt tot respectievelijk $b = 0$ en $c = 0$. En ten slotte weten we nog dat de vlakken OES en OBS de raakvlakken aan de kegel zijn in respectievelijk (0,1,0) en (0,0,1). Hoe vertaalt zich dat in analytische termen?
In het algemeen wordt het raakvlak in (x_0,y_0,z_0) aan $F(x,y,z) = 0$ gegeven door de vergelijking:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Het vlak OES, dat als vergelijking $z = 0$ heeft, is het raakvlak in (0,1,0) aan de kegel. Daar geldt $F_x(0,1,0) = f$, $F_y(0,1,0) = 0$, $F_z(0,1,0) = d$, en dus moet $f = 0$ en $d \neq 0$ zijn. Het vlak OBS, dat als vergelijking $y = 0$ heeft, is het raakvlak in (0,0,1) aan de kegel, en daaruit volgt op dezelfde manier dat $e = 0$. De kegelvergelijking heeft dus de gedaante:

$$a\,x^2 + d\,yz = 0.$$

Zou $a = 0$ zijn, dan zou de kegel ontaarden in de vlakken $y = 0$ en $z = 0$, in tegenspraak met het feit dat we de kegelsnede in α niet-ontaard hebben verondersteld. Er geldt dus $a \neq 0$ en $d \neq 0$.
Snijden van de kegel met een vlak β met vergelijking $z = z_0$ levert de parabool $y = -(a/dz_0)\,x^2$. Omdat de x-as en de y-as loodrecht op elkaar staan, is $(0,0,z_0)$ de top, en de lijn $x = 0$, $z = z_0$ de as van de parabool, waarmee Lemma 3 bewezen is. In het bijzonder levert het vlak $z = -a/d$ de standaardparabool $y = x^2$.

Jan van de Craats, Koninklijke Militaire Academie, Postbus 90002, 4800 PA Breda
J.vd.Craats@mindef.nl

Literatuur

[1] Coxeter, H.S.M. (1974). *Projective Geometry, second edition*. Toronto: University of Toronto Press. ISBN 0-8020-2104-2
[2] Kindt, M. (1996). *Lessen in Projectieve Meetkunde, 2e druk*. Utrecht: Epsilon Uitgaven. Epsilon Uitgaven, 26. ISBN 90-5041-031-6