

Wiskunde D-dag 2016

Vrijeschool Zutphen VO

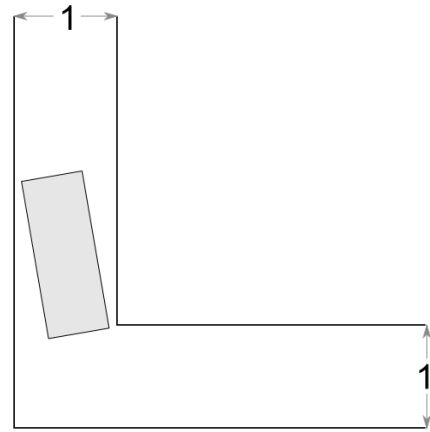
donderdag 18 februari, 12:30u – 16:30u

Aan de gang



Verkenning 1 – piano

Je moet een zware piano verschuiven door een 1 meter brede gang met een rechte hoek er in. In de figuur hiernaast zie je de situatie van bovenaf bekeken. Kun je de piano (1,54m lang en 0,60m breed) de hoek om krijgen? Onderzoek dit met bijvoorbeeld een berekening, een tekening of een experiment.



Verkenning 2 – bankstel

Een bankstel is van bovenaf gezien een rechthoek van 1,36m lang en 0,78m breed. Kun je het bankstel de hoek om krijgen?

Toelichting

Dit waren twee voorbeelden van rechthoeken waarbij je nu al gezien hebt dat het soms wel, en soms niet lukt om ze door de gang te krijgen, zelfs als ze dezelfde omtrek hebben.

Vandaag ga je het door de gang verplaatsen van objecten nader onderzoeken. De grote vraag is steeds of bepaalde objecten door een 1 meter brede gang met een rechte hoek er in verplaatst kunnen worden. Je kijkt dus in de opgaven van vandaag naar een probleem **in het platte vlak**; je gaat onderzoeken welke tweedimensionale meetkundige vormen (lijnstuk, rechthoek, cirkel, ...) door de gang verplaatst kunnen worden. **De hoogte van de objecten laten we dus buiten beschouwing.** Vanaf nu zeggen we dat de breedte van de gang 1 is (zonder eenheid). Je mag aannemen dat objecten met breedte 1 precies door het rechte deel van de gang passen. Een vierkant met zijde 1 en een cirkel met diameter 1 kunnen dus door de gang worden verplaatst.

Informatie over de Wiskunde D-dag - belangrijk!

Structuur van de dag

Deze opdracht bestaat uit **verkenningen** en (onderzoeks) **opgaven**.

Het **intermezzo** (opdracht 1 op blz. 3) mag je doen, maar het hoeft niet. Opdracht 7 en 8 zijn bedoeld als extra opgaven, het is niet erg als je daar niet aan toe komt (maar natuurlijk wel leuk als wel...)

Wat lever je in?

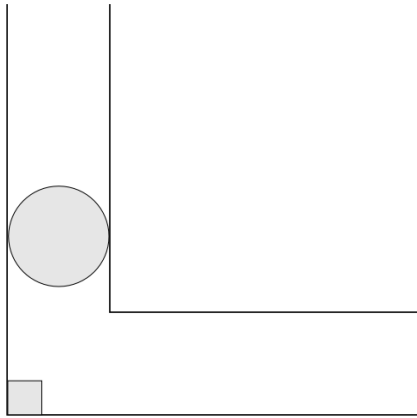
Aan het eind van deze dag lever je een verslag in. Daarin beschrijf je de resultaten die je bij de **opgaven** 2 tot en met 6 hebt gevonden, plus natuurlijk uitleg (in tekst en plaatjes) hoe je tot je antwoorden bent gekomen. Van de **verkenningen** neem je alleen (kort) de antwoorden op in je verslag. Uiteraard gebruik je belangrijke toelichtende figuren als illustraties. **Wees begrijpelijk!**

Het kan nuttig zijn om meteen al te beginnen met het uitschrijven van de opgaven en de antwoorden die je gevonden hebt.

Informatie op Internet

Je zult zien dat er op Internet het een en ander aan informatie te vinden is over dit probleem (bijvoorbeeld <https://nl.wikipedia.org/wiki/Sofaprobleem>). In de opdracht van vandaag ga je echter naar andere vormen dan deze 'sofa' kijken.

Verkenning 3 – cirkel

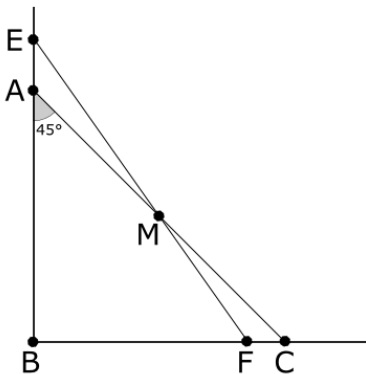


Een cirkel met een diameter van 1 kan door de gang verplaatst worden. Stel, er staat nu in de hoek een vierkant in de weg (zie figuur). Wat kan de afmeting van het vierkant maximaal zijn, zodat de cirkel er nog langs kan?

Intermezzo

Voordat je meer opgaven over het verplaatsen door de gang gaat beantwoorden, eerst twee opgaven die je later vandaag goed van pas kunnen komen.

Opgave 1 – driehoeksmeetkunde



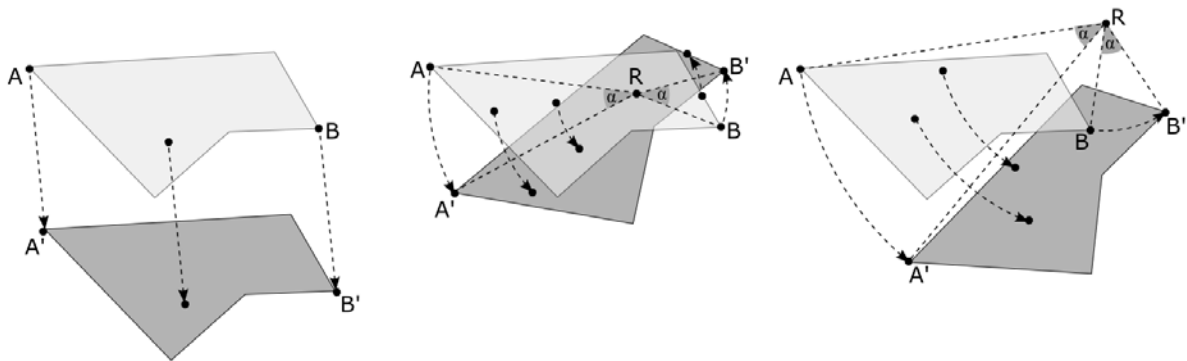
Gegeven is een gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC , waarbij M het midden is van AC . Verder is F een punt tussen B en C op de lijn BC en de lijn FM snijdt de lijn AB in het punt E .

Toon aan dat lijnstuk EF langer is dan lijnstuk AC .

Opmerking: Ook als het je niet lukt om het te bewijzen kun je het gegeven dat lijnstuk EF langer is dan lijnstuk AC in latere opgaven wel gebruiken.

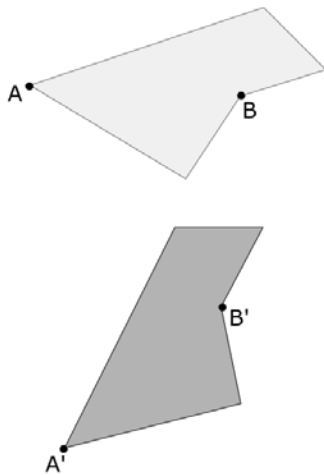
Opgave 2 – verplaatsingen

Je kunt objecten verplaatsen door ze parallel te verschuiven (zonder het object te draaien), of te draaien om een centrum (vanaf nu R genoemd). Hieronder zie je een voorbeeld van een parallelle verschuiving en twee voorbeelden van draaiingen. Bij de parallelle verschuiving geldt dat $AA' = BB'$ en dat AA' en BB' parallel zijn. Bij de draaiingen geldt dat $AR = A'R$, $BR = B'R$ en $\angle ARA' = \angle BRB'$.

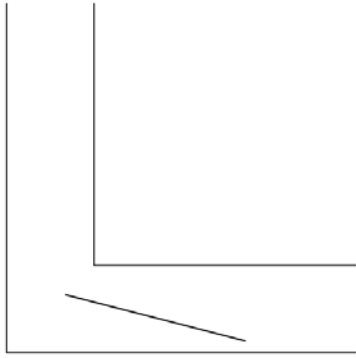


Merk op: om een parallelle verschuiving te kunnen uitvoeren in de gang met een hoek moeten alle lijntjes (zoals AA' en BB') binnen de gang vallen. Bij de draaiing moeten alle boogjes (zoals AA' en BB') binnen de gang vallen, maar **punt R hoeft niet per se binnen te gang te vallen**.

In de onderstaande figuur kun je ook van de lichte figuur naar de donkere komen via een draaibeweging. Laat zien hoe je het centrum R van de draaibeweging kunt bepalen.



Opgave 3 – Stokken



In deze opgave onderzoek je welke stokken je wel om de hoek kan krijgen, en welke niet. Beschouw een stok als een lijnstuk van vaste lengte.

- Probeer experimenteel (met transparant papier of met een tekening) een idee te krijgen van welke stokken wel, en welke stokken niet de hoek om kunnen.
- Met behulp van opgave 1 kun je uitvinden welke stokken zeker niet de hoek om kunnen. Welke zijn dat? Wat is de lengte van de langste stok die nog om de hoek kan?
- Toon aan dat je de langste stok uit vraag b echt de hoek om kunt krijgen, en dat deze niet klem komt te zitten.

Opgave 4 – strategieën voor de langste stok

Er zijn verschillende manieren om de langste stok de gang door te krijgen.

- In opgave 2 heb je gekeken naar draaibewegingen. Je kunt de langste stok de hoek om krijgen door één enkele draaibeweging om een punt R . Hoe moet je het draaipunt R van deze draaibeweging kiezen opdat de langste stok op deze manier de hoek om gedraaid kan worden? Geef ook de uitgangspositie van waaruit je de draai kunt beginnen.
Tip: Ga uit van het moment waarbij de uiteinden van de stok de buitenmuren raken en de stok ook de binnenhoek van de muur raakt. Als dit een momentopname van een draaibeweging is, kun je de cirkel vinden die de uiteinden beschrijven.
- Maak een schets van het gebied dat bij vraag a door de stok wordt bestreken.
- Je kunt ook een beweging maken waarbij de uiteinden van de stok constant in contact blijven met de buitenmuur van de gang. Beschrijf het pad dat het midden van de stok op deze manier aflegt zo precies mogelijk.
- Maak ook een schets van het gebied dat bij vraag c door de stok wordt bestreken.

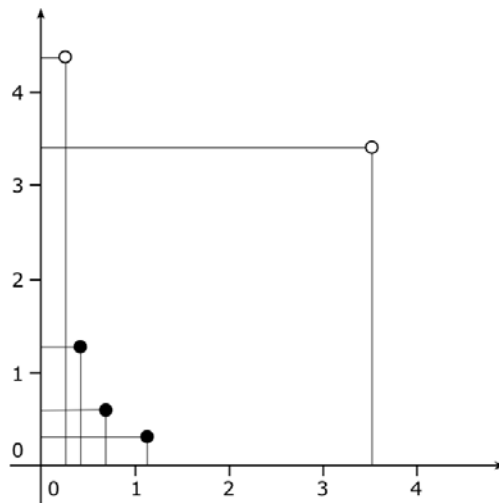
Opgave 5 – grootste rechthoek

Je hebt in de eerste twee verkenningen al gekeken naar rechthoeken. In deze opgave zoek je naar de qua oppervlakte grootste rechthoek die je door de gang kunt krijgen.

- Wat is de oppervlakte van de grootste rechthoek, waarbij de kortste zijde van de rechthoek 0,5 is, die nog door de gang verplaatst kan worden?
- Onderzoek de afmetingen van de rechthoek met de grootste oppervlakte die je door de gang kunt krijgen door middel van schuiven én draaien. De kortste zijde hoeft dus niet meer 0,5 te zijn.
- Toon aan dat de rechthoek die je bij vraag b gevonden hebt ook echt door de gang kan en niet klem komt te zitten.

Opgave 6 – alle rechthoeken

Je hebt zojuist al onderzoek gedaan naar de grootste rechthoek die door de gang verplaatst kan worden. Maar hoe zit het met alle andere rechthoeken? In de onderstaande figuur zie je een coördinatenstelsel. Daarin zijn vijf rechthoeken zo getekend dat ze met een zijde op de x-as en met een zijde op de y-as liggen. De rechterbovenhoeken van de rechthoeken zijn zwart als de bijbehorende rechthoek door de gang past en wit als dat niet lukt.

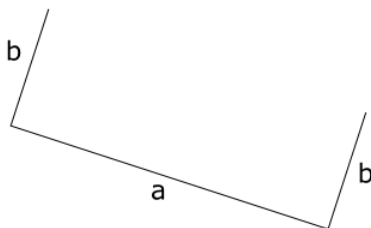


- Waar ligt de grens tussen zwarte en witte punten?
- Welke formules horen bij de grens tussen zwarte en witte punten?

=====

Opgave 7 – U-vorm

Aan de langste stok kun je op de uiteinden loodrecht twee extra rechte stukken vastmaken, zodat je een soort U-vorm krijgt. Onderzoek de grootste lengte van zo'n U-vormige stok (lengte $a+2b$ in de figuur) die nog door de gang verplaatst kan worden.



Opgave 8 – L-vorm

In deze opgave bekijk je een stok met één rechte knik erin (een L-vorm). Wat is de langste stok (lengte $a+b$ in de figuur) die nog door de gang verplaatst kan worden?

