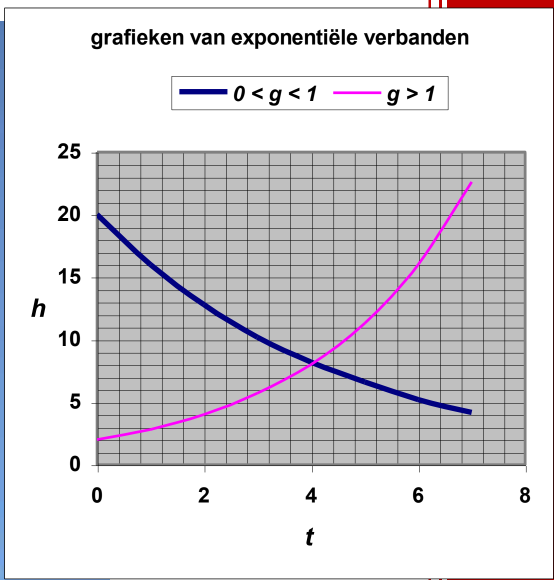
NAAM:

KLAS:

SaLVO!

10 Exponentiële verbanden



INFORMATIEKUNDE
NATUURKUNDE
WISKUNDE

KLAS 3 HV

SaLVO!

Dit lesmateriaal is een onderdeel van het samenwerkingsproject SaLVO! dat als doel heeft om meer samenhangend onderwijs te ontwikkelen in de bètavakken.

Overzicht projectmateriaal

De leerlijn SaLVO! rond verhoudingen, verbanden, formules en grafieken is opgebouwd uit een aantal delen bij verschillende vakken:

biologie = B, economie = E, informatiekunde = I, natuurkunde = N, scheikunde = S en wiskunde = W.

deel	titel	vak(ken)	leerjaar
1	Verhoudingen en evenredigheden	W	2 HV
2	Een verband tussen massa en volume	N	2 HV
3	Vergroten en verkleinen	N, W	2HV
4	Omgekeerd evenredig verband	W	2/3 HV
5	Planeten en Leven	B, N, S, W	2/3 HV
6	Economie en procenten	E, W	3 HV
7	Verhoudingen bij scheikundige reacties	S	3 HV
8	Formules en evenredigheden	N	3HV
9	Vergelijkingen in de economie	E, W	3 HV
10	Exponentiële verbanden	I, N, W	3 HV
11	Evenredigheden en machten	W	4 HV
12	Verbanden beschrijven	N	4 HV
13	Exponentiële functies	B, N, S, W	5 V
14	Periodieke functies	N, W	5 V

Colofon

Project SaLVO! (Samenhangend Leren Voortgezet Onderwijs)

Auteur Wim Sonneveld

Versie augustus 2013

M.m.v. St. Bonifatiuscollege, Utrecht

Geref. Scholengemeenschap Randstad, Rotterdam

Freudenthal Inst. for Science and Mathematics Education, Universiteit Utrecht

Copyright

Op de onderwijsmaterialen in deze reeks rust copyright. Het materiaal mag worden gebruikt voor niet-commerciële toepassingen. Het is niet toegestaan het materiaal, of delen daarvan, zonder toestemming op een of andere wijze openbaar te maken.

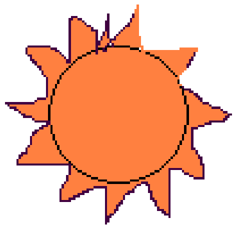
Voor zover wij gebruik maken van extern materiaal proberen wij toestemming te verkrijgen van eventuele rechthebbenden. Mocht u desondanks van mening zijn dat u rechten kunt laten gelden op materiaal dat in deze reeks is gebruikt dan verzoeken wij u contact met ons op te nemen: science.salvo@uu.nl

Voorwoord

Inleiding

Dit deel gaat over exponentiële groei, formules, grafieken en toepassingen in de praktijk. Daarbij kun je denken aan grote en kleine afmetingen, binaire getallen, groei van een virus, rente, inflatie, radioactiviteit en een condensator. We gaan exponentiele groei in de praktijk onderzoeken en sluiten af met een klein zelfstandig onderzoek. De eindopdrachten (E) zijn in de docentenhandleiding opgenomen.

Inhoudsopgave



Exponentiële verbanden - A Machten

§1 Grote en kleine getallen

De afstand van de aarde tot de zon is 150.000.000.000 meter, dat is wel 150 miljoen kilometer. Dat is echt ontzettend ver.

Tegenwoordig hoor je nogal eens over nanotechnologie. Dat gaat over afmetingen van ongeveer 0,000.000.001 m. Dat is heel erg klein.

Paragraafvraag	**Hoe schrijf je grote en kleine getallen zonder al die nullen?**

Instap Zo'n grote afstand, dat leest lastig en het is vaak ook niet eenvoudig om zo'n groot getal goed uit te spreken. Bij getallen met veel nullen maak je gemakkelijk fouten. Op sommige rekenmachines past zo'n groot getal niet eens!

In de wetenschap wordt voor dit soort getallen vaak een andere manier van schrijven gebruikt, de zogenaamde *wetenschappelijke notatie*.

Daarbij gebruik je machten van 10. Het werkt als volgt:

de afstand van de aarde tot de zon is 150.000.000.000 meter = $1{,}5 \times 10^{11}$ m, dus anderhalf keer 10 tot de elfde macht meter.

10^{11} betekent $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$, dat is 100 000 000 000, een 1 met 11 nullen erachter.

1 Vul in:

10^1	= 10	= 10	is een "1" met	1 "nul"
3×10^2	= $3 \times 10 \times 10$	= 300	is een "3" met	...... "nullen"
7×10^3	=	=	is een "7" met	...... "nullen"
1×10^{11}	=		is een "1" met	...... "nullen".
$1{,}5 \times 10^{11}$	= ....(**pas op**)		is een "1,5" met nog	...... "nullen".

Bij de laatste kun je ook zeggen dat de komma 11 plaatsen naar *rechts* moet.

Onthoud: $10^p = 10 \times 10 \times 10 \times \ldots\ldots \times 10$ (p keer)

De wetenschappelijke notatie werkt ook voor heel kleine getallen, voor heel kleine afmetingen, zoals de grootte van moleculen of van een lichaamscel.

Je gebruikt dan een *negatieve* macht van tien, dat betekent dat je deelt door een macht van tien.

Bijvoorbeeld: $2{,}0 \times 10^{-6}$ is gelijk aan $2{,}0 / 10^6 = 0{,}0000020$

2 Vul in:

$1 \times 10^{-1} = 1 / 10$	$= 0{,}1$	een “1” op de 1e	plaats achter de komma
$3 \times 10^{-2} = 3 / (10 \times 10)$	$= 0{,}03$	een ..... op de	plaats achter de komma
$6 \times 10^{-3} =$	=	een ..... op de	plaats achter de komma
$5 \times 10^{-6} =$	= 0,..........	een .... op de	plaats achter de komma.

Bij de laatste kun je ook zeggen dat de komma 6 plaatsen naar *links* moet.

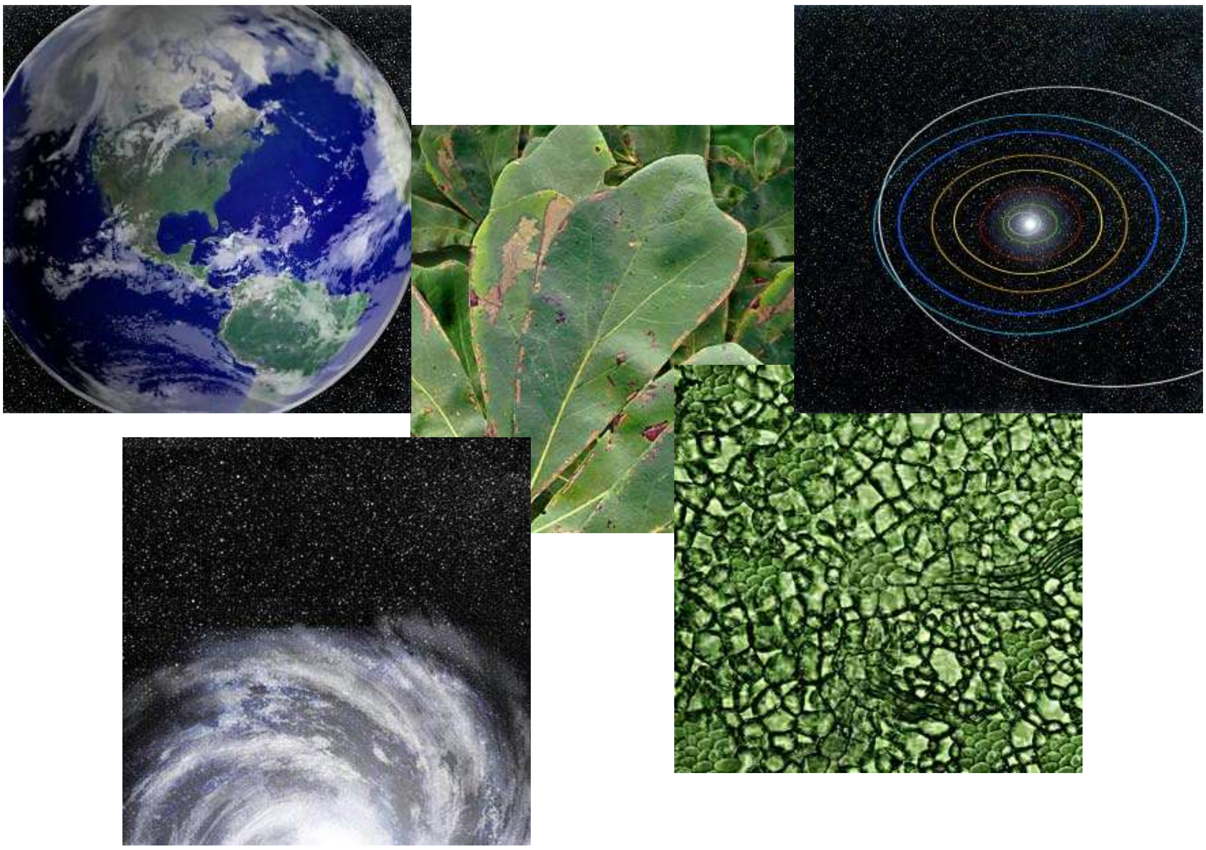
Algemeen: 10^{-p} is het omgekeerde van 10^{p} : $10^{-p} = 1 / 10^{p}$

From the Milky Way to the DNA:
http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/scienceopticsu/powersof10/index.htm

3 Bekijk de applet uit het kader hiernaast. Die geeft een beeld over heel grote en heel kleine afstanden. Heb je nu een idee van de maat van, bijvoorbeeld 10^{7} meter? Kijk o.a. naar de foto’s hieronder en vul in:

10^{-4} meter	is ongeveer de maat van ....
10^{-1} meter	is ongeveer de maat van een ....
10^{0} meter	is ongeveer de maat van ....
10^{2} meter	is ongeveer de maat van een zeer hoge ....
10^{7} meter	is ongeveer de maat van de diameter van ....
10^{13} meter	is ongeveer de maat van ons ....
10^{21} meter	is ongeveer de maat van ons ...., de ....

Een bijzondere macht van 10:
$10^{0} = 1$



4 Bij het invullen van de vorige opgave, ben je ook de waarde 10^0 tegengekomen, uitgesproken als: 10 tot de macht nul. Welk getal stelt dit voor?

5 Vul de ontbrekende waarden in onderstaande tabel over de afstanden van de planeten tot de zon en de grootte van iets van je lichaam.

naam	afstand of grootte (m)	afstand of grootte (m) wetenschappelijke notatie
Mercurius	57 900 000 000	
Aarde	150 000 000 000	$1{,}5 \times 10^{11}$
Mars		$2{,}28 \times 10^{11}$
Pluto	5910 000 000 000	
waterstofatoom		$2{,}4 \times 10^{-10}$
eiwitmolecuul	0,000 05	
haardikte		$9{,}0 \times 10^{-5}$
duimnagel	0,023	

De rekenmachine

Op rekenmachines zit een speciale toets om machten in te voeren. Dat is de EXP- of de EE-toets.
Het getal **$2{,}28 \times 10^{11}$** kun je als volgt invoeren: **2.28 EXP 11** of **2.28 EE 11**.
Bij andere rekenmachines kan het ook met **2.28 × 10^11.**

Het grondtal 10 wordt op de meeste rekenmachines weggelaten. **Maak niet de fout een extra 10 in te tikken!** Als je de uitkomst opschrijft moet je die 10 wel noteren!
Als je in het bovenstaande voorbeeld 2.28 × 10 EXP 11 intoetst dan heb je $2{,}28 \times 10 \times 10^{11}$ ingevoerd. Dat is een factor 10 te groot!

Een getal als 10^8 moet je als volgt intikken: 1 EXP 8. Als je hiervoor 10 EXP 8 intikt, kom je weer een factor 10 te hoog uit. Je moet beslist niet de ×-toets en de 10 gebruiken! Als je de EXP-, de EE- of de ^-toets gebruikt betekent dat al dat je × 10 tot de macht … wilt doen.

Er zijn ook rekenmachines waar een knopje (-) op zit.
Dan doe je dus 9.0 EE (-) 5

De dikte van een haar $9{,}0 \times 10^{-5}$ (m) voer je als volgt in: 9.0 EXP +/- 5 of 9.0 EE +/- 5. In het display staat dan: 9. $^{-05}$ of 9. 10^{-05}

6 De planeet Pluto staat gemiddeld 5910 000 000 000 m van de zon af.
a. Probeer dit getal eens in te voeren in je rekenmachine. Wat gebeurt er? In wat oudere rekenmachines past dit niet!

b. Schrijf dit getal met een macht van 10. Zie ook opdracht 5.

c. Toets dat getal nu in op je rekenmachine. Wat staat er in het display?

7 Toets het getal $1{,}61 \times 10^{-27}$ in op je rekenmachine.
a. Noteer wat er in het display staat.

b. Wat krijg je als je de +/- -toets indrukt vóór de EXP- of EE-toets?

Niet doen dus!

Exponentiële verbanden - A Machten

§2 Rekenen met machten van 10

Nu je weet hoe je grote en kleine getallen met machten van 10 kunt schrijven is het ook wel handig om te weten hoe je met die machten kunt rekenen. Je moet namelijk nogal eens vermenigvuldigen of delen als je die grote of kleine getallen in een formule hebt ingevuld.

Paragraafvraag	**Wat zijn de rekenregels voor vermenigvuldigen en delen met 10-machten?**

Instap Probeer de rekenregel voor *vermenigvuldigen* te vinden door de volgende sommen uit te schrijven:

$10^2 \times 10^3 = (10 \times 10) \times (\ldots \times \ldots \times \ldots) = 100000 = 10^5 = 10^{(2+\ldots)}$

$10^1 \times 10^2 = (\ldots\ldots) \times (\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots = 10^{\ldots} = 10^{(\ldots+\ldots)}$

$10^0 \times 10^4 = (\ldots\ldots) \times (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots = 10^{\ldots\ldots} = 10^{(\ldots+\ldots)}$

$10^2 \times 10^{-3} = (\ldots\ldots\ldots) \times 1/(\ldots\times\ldots\times\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots = 10^{\ldots\ldots} = 10^{(\ldots.+\ldots.)}$

8 Wat is de algemene rekenregel voor het vermenigvuldigen van machten?

Vul in: $10^a \times 10^b = 10^{\ldots\ldots\ldots}$

Instap Probeer de rekenregel voor *delen* te vinden door de volgende sommen uit te schrijven:

$10^5 / 10^2 = (\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots) / (\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots = 10^{\ldots.} = 10^{(\ldots-\ldots)}$

$10^2 / 10^3 = (\ldots\ldots\ldots\ldots) / (\ldots \times \ldots \times \ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots = 10^{\ldots.} = 10^{(\ldots-\ldots)}$

9 Wat is de algemene rekenregel voor het delen van machten?

Vul in: $10^a / 10^b = 10^{\ldots\ldots\ldots}$

Als je ook getallen voor de macht van tien hebt, dan moet je die apart vermenigvuldigen of delen.
Een voorbeeld: $8 \times 10^3 \times 2 \times 10^4 = 8 \times 2 \times 10^3 \times 10^4 = 16 \times 10^7 = 1{,}6 \times 10^8$

10 Om $3{,}7 \times 10^4 : (8{,}3 \times 10^{-9})$ met je rekenmachine te berekenen tik je het volgende in:

3.7 EXP 4 : 8.3 EXP +/- 9 =

Als je dit goed hebt gedaan krijg je als uitkomst in het display van je rekenmachine 4,457831325 ^{12}. Dit betekent $4{,}457831325 \times 10^{12}$.

Even terug naar het begin van §1: De afstand van de aarde tot de zon is wel 150.000.000 kilometer. Dat mag je dus schrijven als $1{,}5 \times 10^8$ km. Nu je hebt leren werken met de rekenmachine met machten van 10 lukt het vast wel beter/sneller om deze opgave te maken:

11 Hoeveel uur zou je met een auto die 100 km per uur rijdt onderweg zijn naar de zon? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie!

12 Geef het antwoord van de volgende sommen in machten van 10:

a. $10^5 \times 10^2 =$

b. $10^9 : 10^4 =$

c. $8{,}7 \times 10^8 \times 5{,}23 \times 10^{-4} =$

d. $9{,}48 \times 10^{-4} : (3{,}16 \times 10^{-2}) =$

Bij de vakken **economie**, **natuurkunde** en **scheikunde** in de tweede fase werk je wel eens met berekeningen waar heel grote of heel kleine getallen ingevuld moeten worden. (Tip: je kunt gebruik maken van een **verhoudingstabel**)

Voorbeeld 1

Het bruto nationaal product (BNP) is in Nederland 534 miljard Euro. In Nederland wonen 16,45 miljoen mensen.
Bereken hoeveel Euro het BNP is per hoofd van de bevolking.

Uitwerking/Je doet op je rekenmachine het volgende:

Euro	534×10^9	?
mensen	$16{,}45 \times 10^6$	1

534 EXP 9 **:** 16,45 EXP 6 = ... Vul nu zelf het antwoord in!

Voorbeeld 2

Het licht heeft een snelheid van $2{,}9979 \times 10^8$ m/s. De afstand van de zon tot de planeet Pluto is $5{,}91 \times 10^{12}$ m.
Bereken hoelang het zonlicht erover doet om van de zon op Pluto aan te komen. Gebruik de verhoudingstabel.

Uitwerking/Je doet op je rekenmachine het volgende:

afst. (m)	$2{,}9979 \times 10^8$	$5{,}91 \times 10^{12}$
tijd (s)	1	?

5,91 EXP 12 **:** 2,9979 EXP 8 = ... Vul nu zelf het antwoord in!

Voorbeeld 3

In 1 mol water (18 g) zitten $6{,}02 \times 10^{23}$ moleculen. Bereken de massa (in gram) van één watermolecuul. Gebruik de verhoudingstabel.

Uitwerking/Je doet op je rekenmachine het volgende:

massa (g)	18	?
aantal	$6{,}02 \times 10^{23}$	1

18 **:** 6,02 EXP 23 = ... Vul nu zelf het antwoord in!

Samengevat:

Bij vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten op:

$$10^a \times 10^b = 10^{a+b}$$

Bij delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af:

$$10^a / 10^b = 10^{a-b}$$

Een bijzondere macht van 10: $10^0 = 1$

Met een negatieve exponent: $10^{-a} = 1/10^a$

Exponentiële verbanden - A Machten

§3 Rekenen met andere grondtallen

In de voorgaande paragraaf heb je geleerd te rekenen met 10-machten. Je gaat nu vermenigvuldigen en delen met machten met een ander *grondtal* dan 10.

Paragraafvraag	**Hoe gaat het rekenen met een ander grondtal dan 10?**

Instap Het rekenen met andere grondtallen verschilt in wezen niet van het rekenen met machten van 10:

Net zoals $10^3 = 10 \times 10 \times 10$, zo is ook $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ en $7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7$

13 Schrijf de betekenis op van èn bereken:

a. $2^5 = \ \times \ \times \ \times \ \times \ =$ b. $3^4 =$

c. $5^3 =$ d. $0{,}5^3 =$

14 Het kan ook andersom: $9 = 3^2$ en $125 = 5^3$

a. Leg uit dat je 8^2 ook kunt schrijven als 2^6.

b. Schrijf 81^2 als macht van 3.

Net zoals $10^2 \times 10^3 = 10^5$, zo is ook $2^2 \times 2^3 = 2^{(2+3)} = 2^5$

15 Maak nu de volgende opgaven:

a. $2^5 \times 2^2 =$ b. $3^9 \times 3^4 =$

c. $5^8 \times 5^4 =$ d. $9^9 \times 9^2 =$

16 Geef kort antwoord:

a. Leg uit dat $2^3 \times 3^2$ niet als één macht geschreven kan worden.

b. Bereken $2^3 \times 3^2$

Net zoals $10^5 / 10^3 = 10^2$, zo is ook $2^5 / 2^3 = 2^{(5-3)} = 2^2$

17 Maak nu de volgende opgaven:

a. $2^{16} / 2^{10} =$

b. $3^8 / 3^3 =$

c. $5^{14} / 5^{11} =$

d. $0{,}5^3 / 0{,}5^2 =$

18 a. Leg uit dat $4^3 / 2^2$ wel als één macht geschreven kan worden.

b. Bereken $4^3 / 2^2$

c. Schrijf als macht van 3: $3^2 / 3^2 = 3^{..}$
Dit kun je ook schrijven als: $9 / 9 =$
Conclusie:

Een bijzondere macht van a:
$a^0 = 1$, mits $a \neq 0$

Je hebt zojuist een nieuwe eigenschap van het machtsverheffen gevonden:
$a^0 = 1$. Dat geldt voor alle waarden van a, behalve voor $a = 0$.

19 a. Bereken 4^0 , 1^0 en 123456^0

Nu kun je ook *vergelijkingen* met *x* in de exponent oplossen.
Bijvoorbeeld: $2^{x+3} = 1$. De macht $(x + 3)$ moet wel 0 zijn, want alleen $2^0 = 1$. De eerste stap is dus $x + 3 = 0$; de oplossing is dan $x = -3$.

b. Los op: $3^{2x-6} = 1$

c. Los op: $5^{x^3-} = 1$

We kunnen het machtsverheffen voor de verschillende grondtallen ook uitbreiden voor negatieve exponenten.
Net zoals $10^{-3} = 1 / 10^3$, zo is ook $2^{-3} = 1 / 2^3 = 1 / (2\times2\times2) = 1 / 8$.

20 Schrijf met een negatieve exponent:

a. $1 / 2^6 =$

b. $1 / g^5 =$

c. $3^4 / 3^8 =$

d. $5 / 5^{11} =$

21 Een paar gemengde opgaven.

a. $2^0 / 2^8 = 2^{...}$

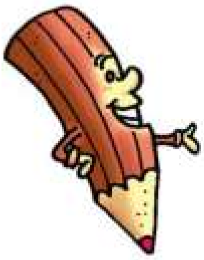
b. $7^{-5} \times 7^{-6} = 7^{...}$

c. $3^{-4} / 3^3 = 3^{...}$

d. $a^{14} / a^{-11} = a^{...}$

e. Los op: $x^3 = 64$

f. Los op: $3^{2x} = 81$



Samengevat:

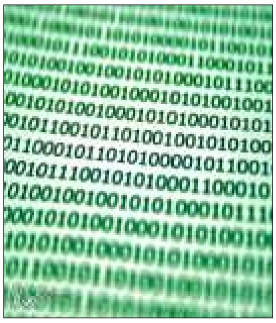
Een machtsverheffing heeft de vorm: a^p
Hierin is a het grondtal en p de exponent. Als p een positief geheel getal is geldt: $a^p = a \times a \times a \times .... \times a$ (p keer)

***Eigenschappen* van machtsverheffen:**

- **Bij vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten op:** $a^p \times a^q = a^{p+q}$
- **Bij delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af:** $a^p / a^q = a^{p-q}$
- **Elk getal ($\neq$ 0) tot de macht 0 is 1:** **$a^0 = 1$, mits $a \neq 0$**
- **a^{-p} is het omgekeerde van a^p :** **$a^{-p} = 1 / a^p$, mits $a \neq 0$**

Exponentiële verbanden - A Machten

§4.1 Rekenen met machten van twee (=extra stof havo)



Computers, rekenmachines, veel elektronische schakelingen en automatische systemen kunnen alleen maar twee soorten elektrische signalen verwerken, *geen* en *wel* spanning, of *laag* en *hoog*. Je zou kunnen zeggen dat ze maar **twee** cijfers kennen, alleen **0** en **1.** Dit noemen we binair.
De naam *binair* komt van het woord "bi" dat dubbel betekent. Binair betekent letterlijk ***tweetallig***, tweedelig. Er komen in binaire getallen dan ook maar twee cijfers voor: **0** en **1**.

Bijvoorbeeld de computer kan alleen maar binaire elektrische signalen verwerken: alleen **0** en **1**. Deze ééntjes en nulletjes heten *bits* (binary digit), en een computer kan maar een beperkt aantal bits achter elkaar verwerken. Vroeger konden de computers bijvoorbeeld maar met 8 bits tegelijkertijd werken, en tegenwoordig zijn er al computers die met 64 bits tegelijk kunnen werken. Zo'n combinatie van 8 bits wordt een *byte* (by eight) genoemd. Een *kilobyte* is dan 2^{10} (=1024) bytes.

Paragraafvragen	**1 Hoe gaat het tellen in het tweetallig stelsel?** **2 Hoe reken je om van decimaal naar binair en andersom?**

Instap

In deze paragraaf ga je leren om binair te rekenen. Om dit goed te begrijpen kijken we eerst naar hoe we gewend zijn om te rekenen in het *decimale* of *tientallig stelsel*.

tientallig	**tweetallig**
0	0
1	1
2	10
3	11
4	...
5	...
6	...
7	...
8	...
9	1001
10	...
11	...
12	...
13	...
14	...
15	...
16	
17	
18	
19	
20	

Het decimale stelsel bestaat uit de volgende tien symbolen (*cijfers*): **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8** en **9**. Omdat we nu eenmaal graag verder willen tellen dan tien, hebben we bedacht dat we deze getallen *achter elkaar* kunnen zetten. In ons decimale stelsel bepaalt de *positie* van een cijfer in het getal met welke macht van 10 moet worden vermenigvuldigd.

Voorbeeld: het decimale getal **6357**.

$$\begin{array}{llrr}
\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow & & & \\
\downarrow\downarrow\downarrow \mathbf{7}\times 1 & = \mathbf{7}\times 10^0 & = & \mathbf{7} \\
\downarrow\downarrow \mathbf{5}\times 10 & = \mathbf{5}\times 10^1 & = & \mathbf{50} \\
\downarrow \mathbf{3}\times 100 & = \mathbf{3}\times 10^2 & = & \mathbf{300} \\
\mathbf{6}\times 1000 & = \mathbf{6}\times 10^3 & = & \mathbf{6000}
\end{array}$$

Zie je nu dat de *positie* van het cijfer bepaalt wat de waarde is? Voor ons is het heel normaal om met dit decimale stelsel te werken, misschien wel omdat we tien vingers hebben?

Op deze manier kunnen we ook een zestallig (zo telden de Chinezen vroeger), en een tweetallig stelsel maken. En dit laatste, het *tweetallig stelsel*, wordt ook wel het *binaire stelsel* genoemd.

In het binaire stelsel zijn er alleen maar de cijfers 0 en 1. Een binair getal bestaat uit nullen (0) en enen (1) vermenigvuldigd met machten van 2.

Voorbeeld: het decimale getal **9**
schrijf je als $\mathbf{1}\times 2^3 + \mathbf{0}\times 2^2 + \mathbf{0}\times 2^1 + \mathbf{1}\times 2^0 = \mathbf{1001}$ (binair)

22 Vul in de tabel de eerste zestien getallen van het tweetallig stelsel in. Zie je het systeem? Alsof je maar twee vingers hebt!

Voor bijvoorbeeld 37 kun je het waarschijnlijk niet meer uit je hoofd. Een methode om dit snel te kunnen doen maakt gebruik van een zogenaamde *conversietabel*. Daarin staan alleen de getallen van het binaire stelsel die met een **1** beginnen en verder alleen maar nullen hebben. Dat zijn alle machten van 2. Kijk maar in de tabel: $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, enzovoorts.

23 Je gaat nu eerst zelf deze *conversietabel* tot en met 2^8 maken.

decimaal	…	…	…	…	…	8	4	2	1
als macht van 2	…	…	…	…	…	2^3	2^2	2^1	2^0
binair	…	…	…	…	…	1000	100	10	1

24 Begrijp je waarom de kleinste rechts staat? Probeer dat eens uit te leggen.

Van decimaal naar binair

Het omrekenen van bijvoorbeeld 37 van decimaal naar binair gaat zo:
Je zoekt naar de **grootste** macht van 2 die nog in het getal 37 past, dat is 32.
Dan hou je nog 37 - 32 = 5 over. Dan zijn 16 en 8 te groot, die doen niet mee!
Met de 4 ga je verder. Het resultaat kun je in de onderstaande tabel aflezen.
Conclusie: 37 (decimaal) = 100101 (binair).

decimaal	32	16	8	4	2	1
2-macht	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
binair	1	0	0	1	0	1

25 Maak gebruik van de conversietabel en reken de volgende decimale getallen om in binaire getallen:

a. 23 = b. 58 =
c. 93 = d. 187 =
e. 255 =

Van binair naar decimaal

Als je een binair getal wilt omzetten naar een decimaal getal, gaat dat in principe identiek.
Het binaire getal 110011 kan je opsplitsen in de bijbehorende 2-machten:

32	16	8	4	2	1
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	0	0	1	1

Daarna is het een kwestie van de getallen (allemaal 2 machten!) die 'meedoen' bij elkaar optellen dus: 32 + 16 + 2 + 1 = 51
Conclusie: 110011 (binair) = 51 (decimaal).

26 Maak gebruik van de conversietabel en reken de volgende binaire getallen om in decimale getallen:

a. 101 = b. 11001 =
c. 0011110 = d. 1001111 =

Exponentiële verbanden - A Machten

§4.2 Optellen en aftrekken in het binaire stelsel (=extra stof vwo)

Een van de eerste dingen die je als kind hebt geleerd bij rekenen op de basisschool was optellen en aftrekken. In het tientallige stelsel ben je daar al jaren aan gewend, maar ook in het tweetallig of binair stelsel is het echt niet moeilijk!

Paragraafvraag	**Hoe gaat eenvoudig rekenen in het binaire stelsel?**

Optellen
We beginnen met het optellen van binaire getallen. Dit werkt bijna net zo als bij gewoon optellen, alleen hebben we alleen ééntjes en nulletjes. De binaire getallen 110 en 101 kunnen we als volgt *optellen*:

dec	binair
6	110
5	101
11	1011

Je begint ***rechts***, zoals dat in het decimale stelsel ook de gewoonte is:
0 + 1 = 1, en dan 1 + 0 = 1. Maar dan 1 + 1 = ...2 ?? Omdat we geen **2** kunnen opschrijven maken we er dus **10** (de binaire schrijfwijze voor 2) van. Ter controle staat de decimale optelling er links naast!

27 Tel de volgende binaire getallen op:

1	1011	1100	1100100
1	100	1010	0110100

28 Controleer de tweede optelling door (links) naast de binaire getallen de decimale getallen te zetten. Klopt jouw optelling?

Aftrekken
Het *aftrekken* van getallen is iets moeilijker, we beginnen met een voorbeeld:

dec	binair
5	101
2	10
3	11

We gaan ook dit voorbeeld van ***rechts naar links*** doorlopen. We beginnen dus met 1 - 0 wat 1 oplevert. Daarna krijgen we 0 - 1, hiervoor maken we gebruik van de overgebleven 1. Dat wordt dus 10 - 1 = 1. Dat klopt, denk maar aan de bijbehorende decimale getallen: 2 - 1 = 1
Ter controle staat de decimale manier er links naast!

29 Trek de volgende binaire getallen van elkaar af:

1	1011	1100	1100100
1	100	1010	0110100

30 Controleer de derde opgave door (links) naast de binaire getallen de decimale getallen te zetten. Klopt jouw antwoord?

Exponentiële verbanden - B Groei

§1 Exponentiële groei in een oud verhaal

Het schaakbord van koning Shirham

De Indiase koning Shirham wilde, volgens een oud verhaal, zijn trouwe onderdaan Sissa Ben Dahir belonen voor een uitzonderlijke prestatie, namelijk de uitvinding van het schaakspel. De koning sprak: “Zeg mij wat u als beloning wenst te ontvangen en ik zal het u geven.”

Sissa antwoordde: “Majesteit, mijn wens is de volgende. Vul mijn schaakbord met graan. En wel als volgt: leg 2 graankorrels op het eerste vakje, 4 op het tweede vakje, 8 op het derde, 16 op het vierde en zo vervolgens steeds het dubbele aantal op het volgende vakje totdat alle 64 vakjes van het bord zijn gevuld.” “Beste vriend”, zo sprak de koning, “uw wens is bescheiden, een hand vol graankorrels, maar u krijgt wat u vraagt.” De Koning riep zijn schatbewaarder en gaf opdracht om de wens van Sissa tot uitvoering te brengen.

Enkele dagen later kwam de schatbewaarder terug bij de koning en sprak onthutst: “Majesteit, zoveel graan als u hem heeft beloofd bezit u helemaal niet, dit is meer dan wat in 10 jaar kan groeien in heel uw koninkrijk!”

Paragraafvraag	**Wat is het verschil tussen exponentiële en lineaire groei?**

Instap De majesteit had dus geen idee van *exponentiële* groei. Om een idee te krijgen hoeveel graan de koning aan Sissa had beloofd, ‘leggen’ jullie alleen op de eerste rij van het schaakbord graankorrels. Begin in het eerste vakje met *twee* korrels en ‘leg’ in het vakje ernaast steeds *dubbel* zo veel korrels.

31 Vul de aantallen korrels in de **2e rij** van onderstaande tabel in.

vakje	1	2	3	4	5	6	7	8	***n***
opdr. 31: aantal korrels	2	4	8	16	...	...	...	...	***A***
opdr. 32	2^1	2^2	2^3	$2^{..}$	$2^{..}$	$2^{..}$	$2^{..}$	$2^{..}$	$\mathbf{2^{..}}$
opdr. 34: de toename	2	4	...	...	...	...	...	...	ΔA

32 Vul de **3e rij** van de tabel in op de volgende manier:

In vakje 1 is het aantal korrels $2 = 2^1$;

in vakje 2 is het aantal korrels $4 = 2^2$;

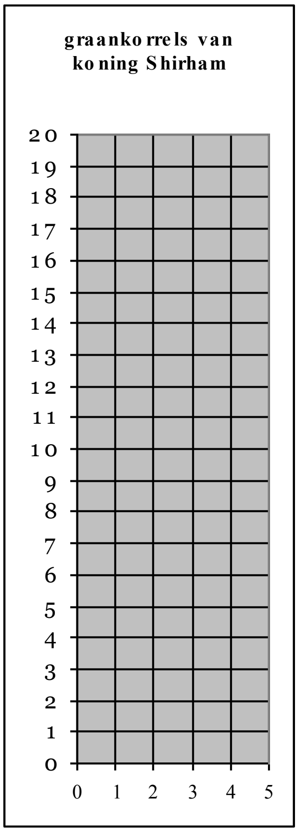
in vakje 3 is het aantal korrels $8 = 2^3$; enzovoorts!

Het nummer van het vakje noem je ***n*** en het aantal korrels ***A***.

Bedenk een formule die het aantal korrels geeft per vakje:

***A* = ...**

Dit noemen we een *exponentieel* verband, waarin de *groeifactor* 2 is.



33 a. Teken de grafiek van de exponentiële groei van het aantal graankorrels.

b. Streep (2 maal) door wat niet van toepassing is:

De grafiek is *toenemend/afnemend stijgend/dalend*.

34 Je kunt de tabel ook nog op een andere manier bekijken. Hoeveel korrels moet je méér leggen in het **volgende** vakje? Met andere woorden: wat is de *toename van A* (=Δ*A*).

Van vakje 1 naar vakje 2 is de toename: 2;

van vakje 2 naar vakje 3 is de toename: 4; maak de **4ᵉ rij** in de tabel af!

Vergelijk rij 2 en 4. Conclusie:

De toename Δ*A* is .... evenredig met het aantal *A*.

In formulevorm: $\mathbf{\Delta A = \ldots \cdot A}$

35 Bereken hoeveel korrels er op het 64ste vakje komen te liggen.
Bij steeds verdubbelen liggen er op vakje 64:

A = = korrels.

36 Stel dat er nu in het eerste vakje 6 graankorrels liggen en in elk volgend vakje 2 maal zo veel. Wat wordt dan de formule? Omcirkel de goede formule.
Bedenk dat de beginhoeveelheid in vakje met n = 1 ligt!

$A = 6 \times 2^n$ $A = 3 \times 2^n$ $A = 2 \times 3^n$ $A = 2 \times 6^n$

Ook hier geldt voor de toename Δ*A* t.o.v. het vorige vakje: $\mathbf{\Delta A = \ldots\ldots}$

Vervolgopdracht Ter vergelijking vullen we de vakjes op de eerste rij van het schaakbord nu op een andere manier. Bij elk nieuw vakje 'leggen' we er 2 korrels *extra* op in vergelijking met het vakje ervoor (dus niet verdubbelen).

37 Vul dit in de **2ᵉ rij** van de tabel in (de bijlegmethode).

38 Vul de **3ᵉ rij** van de tabel in op de volgende manier:
In vakje 1 is het aantal korrels 2 = 2 × 1;

in vakje 2 is het aantal korrels 4 = 2 × 2; enzovoorts!

Het nummer van het vakje noem je ***n*** en het aantal korrels ***A***.

Bedenk een formule die het aantal korrels geeft per vakje: ***A* =**

vakje	1	2	3	4	5	6	7	8	***n***
opdr. 37: aantal korrels	2	4	...	...	...	...	...	...	***A***
opdr. 38	2 × 1	2 × 2	2 × ..	2 × ..	2 × ..	2 × ..	2 × ..	2 × ..	**2 × ..**
opdr. 40: de toename	2	...	...	...	...	...	...	...	**Δ*A***

39 Teken ook nu de grafiek. Doe dat in het diagram op de vorige bladzijde.

40 Je kunt de tabel ook nog op een ander manier bekijken. Hoeveel korrels moet je méér leggen in het **volgende** vakje? Met ander woorden: wat is steeds de *toename van A*? Vul aan:

Van vakje 1 naar vakje 2 is de toename: 2

Van vakje 2 naar vakje 3 is de toename: .. Maak de **4e rij** in de tabel af!

Vergelijk rij 2 en 4. Conclusie:

De toename ΔA is .... In formulevorm: $\boldsymbol{\Delta A}$ **= ...**

41 Bereken hoeveel korrels er op het 64ste vakje komt te liggen.
Bij steeds optellen liggen er op vakje 64:

A = = korrels.

42 Als er nu in het eerste vakje **6** graankorrels liggen en in elk volgend vakje steeds 2 erbij. Het nummer van het vakje is weer ***n***. Wat wordt dan de formule?
Bedenk dat de beginhoeveelheid in vakje met n = 1 ligt!

A = .. + 2 × ..

Opmerking: vaak wordt het × -teken vervangen door de vermenigvuldigpunt ·

Dit verband komt je vast bekend voor. Zo'n verband heet een

.... verband.

Samengevat:

Bij de verdubbelmethode neemt het aantal *exponentieel* toe.

De formule luidt: $A = b \times 2^n$

met ***b*** is de **beginhoeveelheid** en **2** is de **groeifactor**

De toename is: $\Delta A = 1 \times A$ **(ΔA is rechtevenredig met A)**

De grafiek van A is **toenemend stijgend**.

Bij de bijlegmethode neemt het aantal *lineair* toe.

De formule luidt: $A = b + 2 \cdot n$ **(b is de beginwaarde)**

De toename is: ΔA **= constant** (ΔA is in dit geval 2)

De grafiek van A is **constant stijgend**.

Exponentiële verbanden - B Groei

§2 Groei in de tijd

Mensen, dieren en planten groeien vanaf hun ontstaan. Dat kost vaak een lange tijd. Bacteriën en virussen groeien vaak heel snel.

Paragraafvraag	**Hoe beschrijf je de exponentiële groei van bacteriën?**

Instap Als voorbeeld gaan we uit van een bacterie die *elk uur* door celdeling *verviervoudigd*. We starten de tijd op 0 uur met 1 bacterie.

43 Vul de **2e rij** van de tabel in.

tijdseenheid (uur)	0	1	2	3	4	5	***t***
opdr. 43: aantal bacteriën	1	4	16	...	...	...	***A***
opdr. 44	...	4^1	4^2	...	...	...	$\mathbf{4^{..}}$
opdr. 45: de toename	3	...	...	...	...	...	$\mathbf{\Delta A}$

44 Vul de **3e rij** van de tabel aan op de volgende manier:
Op 0 uur is het aantal: .. = $4^{..}$. Goed onthouden!

$4^0 = 1$

Na 1 uur is het aantal bacteriën $4 = 4^1$; na 2 uur is het aantal bacteriën $16 = 4^2$; enzovoorts!
Het symbool voor de tijdseenheid is ***t*** en het aantal is ***A***.
Bedenk een formule die het aantal bacteriën geeft per uur: ***A*** =
Ook dit is een exponentieel verband, met groeifactor 4.

45 Je kunt de tabel ook nog op een ander manier bekijken. Hoeveel bacteriën zijn er meer aan het begin van het **volgende** uur? Met andere woorden: Hoeveel zijn er dat uur bijgekomen, wat is de toename van A (=ΔA). Vul aan:

In het 1e uur is de toename: 3
In het 2e uur is de toename: .. Maak de **4e rij** in de tabel af!

Vergelijk rij 2 en 4. Conclusie:

De toename ΔA is ***rechtevenredig*** met het aantal A.
In formulevorm: $\mathbf{\Delta A = \ldots \cdot A}$

In het hierboven besproken geval zeg je: de groeifactor is 4. Dat betekent dat elke tijdseenheid (hier 1 uur) het aantal bacteriën vier keer zo groot wordt.

Samengevat:

Bij *exponentiële* groei luidt de formule: $\mathbf{A = b \times g^t}$
met ***b*** is de **beginhoeveelheid**, ***g*** is de **groeifactor** en ***t*** is de **tijdseenheid**
De toename is: $\mathbf{\Delta A = constante \cdot A}$ **(Δ*A* is rechtevenredig met *A*)**

Exponentiële verbanden - B Groei

§3 Exponentiële afname

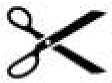
Exponentieel hoeft niet te betekenen dat er altijd alleen maar toename is. Als je bijvoorbeeld kijkt naar de schuimkraag op een biertje dan neemt de dikte van die schuimkraag geleidelijk af, maar zeker niet lineair.

De wiskundige beschrijving van zo'n proces blijkt in dezelfde algemene formule te vatten die we in §2 hebben geleerd.

Behalve dat er exponentiële toename is, zoals in de vorige paragrafen besproken, is er ook exponentiële afname

Paragraafvraag	**Hoe beschrijf je exponentiële afname?**

46 Je hebt een papierstrook van 20,0 cm. Knip twee stroken van ieder 10,0 cm. Plak één van die stroken verticaal, zo veel mogelijk links, in het vak op de volgende bladzijde.



Knip de andere strook precies doormidden en plak één helft direct naast de eerste strook op de onderrand.

Knip de overgebleven helft weer doormidden en plak ook daarvan één helft ernaast.

Herhaal dit tot de strookjes zo klein zijn dat je niet meer kunt knippen en plakken.

47 Schrijf in de 2e rij de lengte van de stroken.

strook nr	1	2	3	4	5	6	7	***n***
opdr. 47: lengte (cm)	10,0	5,0						***l***
opdr. 48	$20\times(0,5)^{..}$	$20 \times (0,5)^{..}$	$20 \times (0,5)^{..}$	$20 \times (0,5)^{..}$	$20 \times (0,5)^{..}$	$20 \times (0,5)^{..}$	$20 \times (0,5)^{..}$	$\boldsymbol{l} = .. \times ..$
opdr. 49: de groeifactor		0,50						***g* = ...**
opdr. 51: Δ *l* (cm)	5,0							**Δ*l* =**

48 Vul de **3e rij** van de tabel in op de volgende manier:

Strookje 1 heeft een lengte van $10 = 20 \times (0,5)^{..}$;

strookje 2 heeft een lengte van $5,0 = 20 \times (0,5)^{..}$; enzovoorts!

Het nummer van het strookje noem je ***n*** en de lengte ***l***.

Bedenk een formule die de lengte van het strookje geeft.:

l =

49 Noteer in de **4e rij** de groeifactor voor elke strook.

$$g = \frac{nieuwe\,lengte}{oude\,lengte}$$

50 Teken de ‘grafiek’ door de rechterbovenhoeken van de strookjes met een zo vloeiend mogelijke lijn met elkaar te verbinden.

Streep door wat niet van toepassing is:

De grafiek is *toenemend/afnemend stijgend/dalend*.

51 Hoeveel knip je van de lengte om het **volgende** strookje te krijgen? Met andere woorden: wat is steeds de afname van l, dat is $\mathbf{\Delta} \boldsymbol{l}$. Noteer in de **5e rij**!

Vul aan:

De afname Δl is .... met de lengte l.

In formulevorm: $\mathbf{\Delta} \boldsymbol{l} = \ldots \cdot \boldsymbol{l}$

*Nabespreking en opgaven **A** + **B***

Formules en grafieken

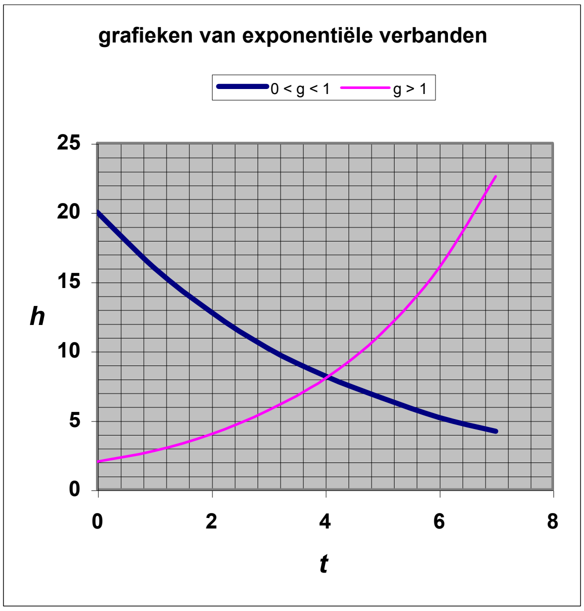
Let op:

Je hebt in dit deel gezien dat ***t*** wel eens vervangen wordt door ***n*** (= nummer) en ***h*** door ***A*** (= aantal). Dat gebeurt als de formule een proces beschrijft dat in stappen exponentieel verloopt zoals de graankorrels in de genummerde vakjes.

De formule is dan:

$A = b \times g^n$

Een *exponentieel* verband kun je weergeven met de formule: $h = b \times g^t$
In deze formule is
h de hoeveelheid,
b is de beginhoeveelheid op $t = 0$,
g heet de groeifactor per tijdseenheid en
t is het aantal malen een bepaalde tijdseenheid.
(NB ***t*** hoeft niet een geheel getal te zijn, ***n*** wel).



Voor $g > 1$ hoort hierbij een (toenemend) stijgende grafiek.
Voor $0 < g < 1$ is de grafiek (afnemend) dalend.

Opgaven

De opgaven 52 – 54 horen vooral bij **wiskunde A** en de opgaven 55 – 58 meer bij **wiskunde B**.

A Bij **wiskunde A** moet je vooral kunnen rekenen met procenten in praktische situaties, zoals bij *rente* en *inflatie*. Een rente van 4 % per jaar op een spaarrekening betekent dat het spaarbedrag één jaar later 4 % hoger is. Dan is de groeifactor 1,04 (je had 100 % en daar is 4 % bijgekomen). Een inflatie van 5 % betekent dat je voor dezelfde spullen één jaar later 5 % duurder uit bent.

52 Hind kocht voor € 824 een fiets. In het jaar daarna was de inflatie 3,2 %.

a. Hoeveel kost de fiets één jaar later?

Bij ***p***% rente is de groeifactor ***g***:
$g = 1 + p/100$

b. Zij heeft na de aankoop van de fiets nog € 527,23 op haar spaarrekening. De bank geeft 2,4% rente. Hoeveel heeft zij één jaar later op haar spaarrekening?

53 Op de spaarrekening van Wilma staat € 435,03 en ze krijgt 4,8% rente per jaar.

a. Bereken welk bedrag 6 jaar later op haar spaarrekening staat.

b. Bereken na hoeveel jaar zij € 1000,- op haar spaarrekening zal hebben.

54 Frank koopt een motor van € 6 500,- . Hij schrijft elk jaar 20 % af.

a. Bereken de waarde van de motor na 2 jaar.

b. Geef de formule waarmee je de waarde W van de motor in euro's na een tijd van t jaar kunt berekenen.

c. Na hoeveel jaar is de waarde van de motor onder de € 1000,- gedaald?

B Bij **wiskunde B** werk je vooral met de formules, zoals gegeven op de vorige bladzijde. De voorbeelden komen soms uit de economie of uit de natuurkunde.

$g = \frac{nieuwe waarde}{oude waarde}$

55 Bekijk eerst de stijgende grafiek op de vorige bladzijde.

a. Lees de waarden zo nauwkeurig mogelijk af en zet die in de tabel. Bereken dan steeds de groeifactor en vul die ook in. Wat wordt de formule?

$h = ...\times (...)^t$

b. Valt je iets op aan de groeifactor ?

Klassikaal bespreken!

Bepaal uit de dalende grafiek de bijbehorende formule op dezelfde manier.

$h = ...\times (...)^t$

t	0	1	2	3	4	5	6	7
h (vraag 55a.)	2							
g (vraag 55a.)								
h (vraag 55b.)	20							
g (vraag 55b.)								

56 In Zimbabwe daalde door de politiek van Mugabe het aantal blanken vanaf 1981 jaren achtereen met 12 % per jaar.

a. Wat is de groeifactor per jaar?

b. In 1981 was het aantal blanken nog 200.000. Bereken hoeveel het er in 1985 waren.

Als de groeifactor per jaar gelijk aan g is, dan is de groeifactor per 5 jaar gelijk aan g^5

c. Bepaal de groeifactor per 5 jaar en per 25 jaar. Rond af op 3 decimalen.

57 In 2004 telde Botswana 1,7 miljoen inwoners. Dat is 78 % meer dan in 1981.

a. Wat is de groeifactor over de hele periode van 23 jaar?

b. Bereken de groeifactor per jaar in 4 decimalen.

58 Gegeven is de formule $k = 25 \cdot (1,3)^t$

a. Bereken met je rekenmachine de uitkomst bij $t = 6$ en bij $t = 11$.

b. Bereken de kleinste gehele waarde van t waarbij de uitkomst groter is dan 1000.

Exponentiële verbanden - B Groei

§4 De driehoek van Pascal (alleen voor vwo)

Een andere bijzondere manier om *exponentiële* toename te begrijpen is de driehoek van Pascal. Deze kan worden gebruikt om te tellen op hoeveel manieren je vanuit een willekeurig roosterpunt zonder omwegen naar een ander roosterpunt kunt gaan. Het toppunt van de driehoek (voorgesteld door het grijze vakje met "s" van start erin) noemen we de nul-rij. De rij eronder is de eerste rij en de volgende de tweede rij enzovoort. Je mag in deze driehoek *alleen* maar naar beneden lopen. Je hebt dus eigenlijk in elk roosterpunt (= grijs vakje) de keuze of je links of rechts naar beneden gaat. Op de eerste rij heb je dus vanaf start voor beide punten 1 manier om er rechtstreeks te komen.

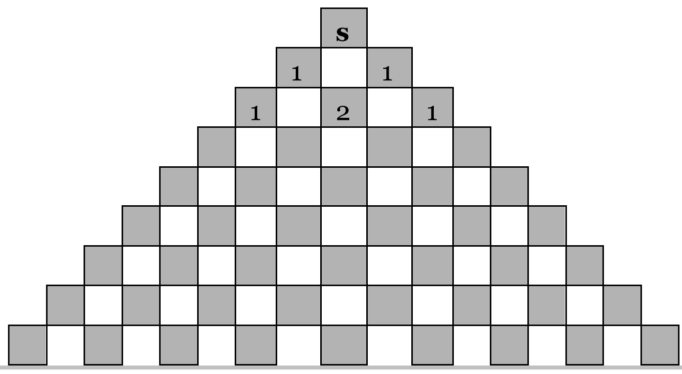
Paragraafvraag	Hoe bepaal je de formule voor exponentiële groei?

In de driehoek is al voorgerekend op hoeveel manieren je elk van de grijze vakjes op de 2e rij kunt bereiken.

59 Het totale aantal manieren om van start op de 2e rij te komen kun je berekenen door de som van de aantallen op de 2e rij te nemen.

a. Zet die som in de tabel rechts.
b. Op hoeveel manieren kun je (vanaf start **s** gerekend) elk van de grijze vakjes op de 3e rij bereiken? Vul dat in de driehoek in.
c. Wat is de som van de aantallen op de 3e rij (dit is het totale aantal manieren om van start op de 3e rij te komen)? Zet dat ook in de tabel.
d. Eigenlijk is elk getal op de rij een optelsom van 2 andere getallen, welke?

e. Vul onderstaande tabel verder in.



rij-nr.	som
0	1
1	2
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Deze driehoek is door de Fransman Blaise Pascal voor de kansberekening bedacht en 3 jaar na zijn dood in 1665 gepubliceerd.

60 Vul aan:

In rij 1 is de som: $2 = 2^1$
In rij 2 is de som: $4 = 2^{..}$
In rij 3 is de som: $.. = 2^{..}$
In rij 8 is de som: $.. = 2^{..}$
En een heel bijzondere: In rij 0 is de som: $.. = 2^{..}$ Goed onthouden!

$2^0 = 1$

61 Welk verband is er tussen de som van een rij en het rij-nummer? Geef de formule die dit verband weergeeft. Neem voor het nummer van de rij ***n*** en voor de som ***S***.

Verband:

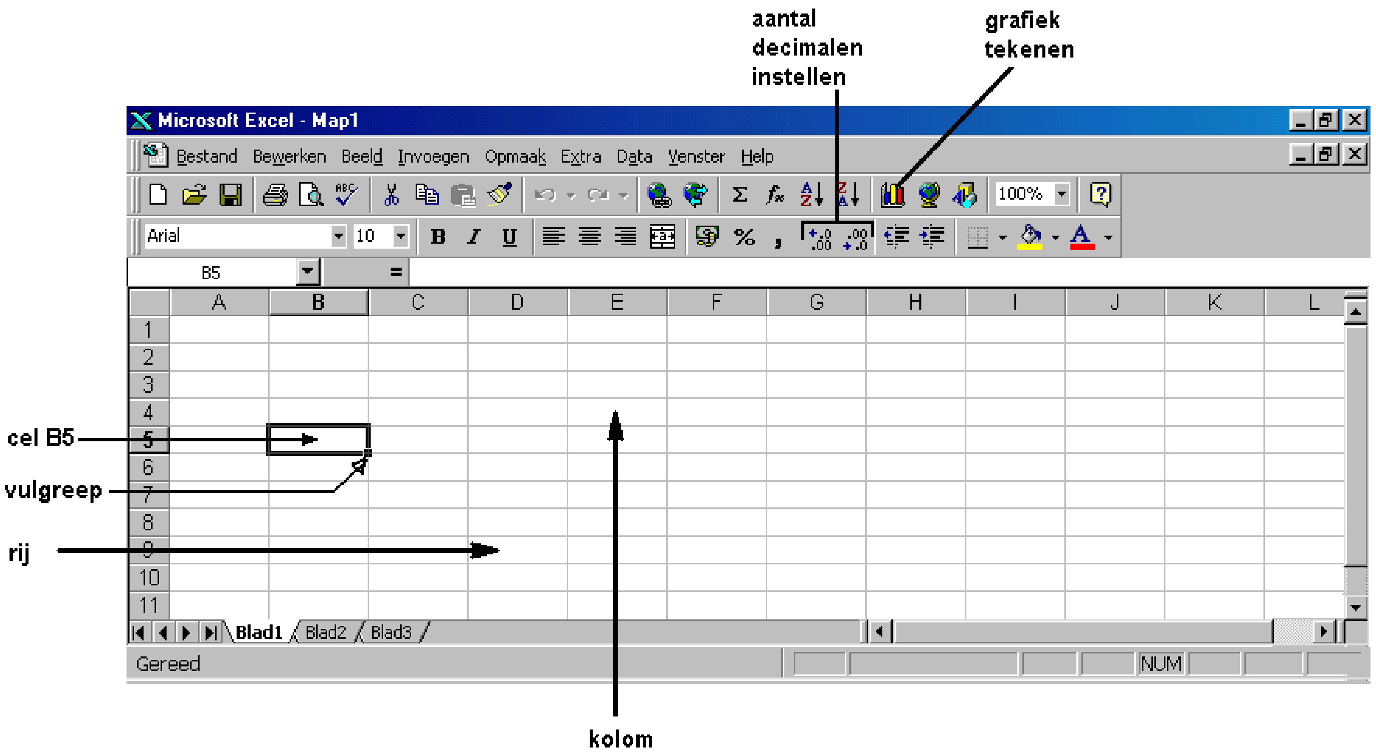
Formule:

Exponentiële verbanden - C Excel

Het programma Excel heeft allerlei mogelijkheden o.a. om te ordenen, te rekenen en grafieken te maken. Bij exponentiële verbanden kun je bijvoorbeeld de groeifactor zelf invoeren, maar ook laten berekenen. Door waarden van een experiment in te voeren kun je grafieken laten tekenen en eenvoudig uitzoeken of het verband exponentieel is.

Paragraafvraag	**Hoe zet je Excel handig in bij exponentiële verbanden?**

Instap Hier zie je een deel van het (oude) openingsscherm van Excel met wat toelichting.



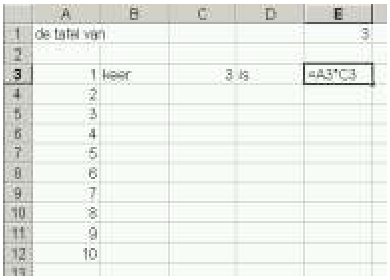
Let op: Opdrachten in Excel worden met ▪ aangegeven.

Gebruik in Excel vanaf nu blad 1.

62 Eerst ga je oefenen met een eenvoudige opdracht. Je maakt de tafel van 3.

- Zet in cel A1: **de tafel van** en in E1: **3** .
- Zet in A3 het getal **1** en in cel A4 het getal **2**.
- Selecteer de cellen A3 en A4.
- Pak met de muis (links) de vulgreep (rechtsonder) van cel A4 en trek deze naar beneden tot aan cel A12 en laat de muisknop weer los.
- Zet in cel B3: **keer** en in cel C3: **=E1** .

  (Dat '=' teken is belangrijk want dan herkent Excel dat je in deze cel een formule gaat plaatsen en niet gewoon een stukje tekst).



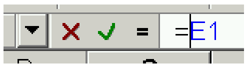
- Zet in cel D3: **is** en in cel E3: **=A3*C3**
- Selecteer de cellen B3, C3, D3 en E3.
- Pak met de muis de vulgreep die bij cel E3 staat en trek deze naar beneden tot aan cel E12 en laat de muisknop weer los.
  Helaas: niet de tafel van 3.

Als je cel C4 selecteert dan zie je in de formulebalk dat de inhoud er van automatisch: **=E2** is geworden, terwijl dat **=E1** had moeten blijven. Dat ga je nu iets anders aanpakken.

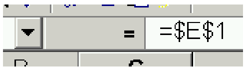
absoluut kopiëren in Excel

63 Vervolg van opdracht 62.

- Klik in cel C3 en vervolgens in de **formulebalk** vóór E1:



- Klik vervolgens op de **functietoets F4**.
  Er verschijnen dollartekens rondom E1:



- Druk daarna op Enter. De dollartekens zorgen ervoor dat bij het kopiëren (met de vulgreep) E1 niet verandert.
- Klik weer in cel C3. Trek met de vulgreep tot cel C12 en laat de muisknop weer los. Je ziet nu wel de tafel van 3 !

Bekijk de inhoud van cel C4 en bekijk de formule in de formulebalk. Wat valt je op in vergelijking met de vorige keer?

- Maak nu zelf de tafel van 8 door de inhoud van E1 te veranderen.

Zie je nu het voordeel van Excel: je kunt nu alle tafels maken!

Gebruik in Excel vanaf nu blad 2.

64 Je gaat nu formules leren maken in Excel. *Gebruik in Excel blad 2!*
Francien heeft 200 euro op haar spaarrekening. Ze krijgt 4% rente per jaar. Welk bedrag heeft zij na een jaar? Schrijf hieronder precies op hoe je dat berekent met een rekenmachine.

Misschien had je wat anders, maar je gaat aan de slag met 200 + 4%*200.

- Zet in cel A2: **percentage** en in cel C2: **4%**.
- Zet in cel A3: **beginbedrag** en in cel C3: **200**.
- Zet in cel A5: **jaar** en in A6: **saldo** .
- Zet in cel B5 het getal 0 en in cel C5 het getal 1, selecteer deze beide cellen en sleep de vulgreep van C5 naar L5.
- Zet in cel B6: **=C3** . en in cel C6: **=B6 + C2*B6** .
- Neem de vulgreep van C6 en sleep deze naar L6.

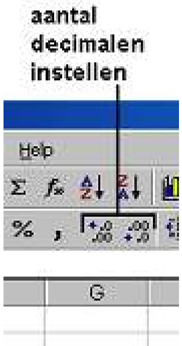
Wat heb je nu in rij 6?

Er is iets mis gegaan want het bedrag moet natuurlijk groeien. Bekijk nu de inhoud van cel E6 en je ziet dat er in deze cel gerekend wordt met D6 en E2. Maar in cel E2 staat niets. Dat moet weer het percentage zijn dat in C2 staat. Dus moet je C2 weer **absoluut kopiëren**!

Je gaat nu cel C6 zo veranderen dat je de inhoud absoluut kunt kopiëren.

- Klik in C6. Zet vervolgens de cursor in de formulebalk vóór C2.
- Vervolgens functietoets **F4** en Enter. Je krijgt: **=B6 + C2*B6**
- Selecteer C6 en sleep de vulgreep naar L6.

Wat heb je nu?



65 Nu ga je nog het *aantal decimalen instellen*.

- Selecteer B6 tot en met L6.
- Klik in de werkbalk twee keer op meer decimalen instellen.

Beschrijf kort de verandering in rij 6.

Wanneer je werkt met rente op rente zoals hier dan is er sprake van *exponentiële* groei.
Het getal waarmee je het saldo steeds moet vermenigvuldigen om het nieuwe bedrag van het jaar daarop te berekenen heet de *groeifactor*.

66 De groeifactor van opdracht 64 en 65 ga je nu eerst uitrekenen.

- Zet in cel A8: **groeifactor** .
- Zet in cel C8: = **C6/B6**.

$$\text{groeifactor} = \frac{\textit{nieuwewaarde}}{\textit{oudewaarde}}$$

Je rekent dan uit met welke factor je het beginbedrag moet vermenigvuldigen om het bedrag van een jaar later te krijgen.

- Neem de vulgreep van C8 en sleep deze naar L8.

Wat heb je nu in rij 8?

67 En nu komt het handige van Excel.

- Wijzig het rentepercentage (in cel C2) van 4 in 5 en kijk wat er gebeurt.
- Kies nog eens een ander percentage in cel C2.

Bij welk percentage heeft Francien na 10 jaar meer dan 1000 euro?

- Zet het percentage weer op 4 en zoek uit met welk beginbedrag Francien na 10 jaar 1000 euro op de rekening heeft staan.

Noteer dat beginbedrag hier.

Bij p% rente is de groeifactor g:
$g = 1 + p/100$

Er bestaat verband tussen het *percentage* en de *groeifactor*. Als voorbeeld nemen we weer 4% rente. Dat mag je ook schrijven als 4/100 = 0,04.
Als je bij het beginbedrag 4% moet optellen (1*B6 + 0,04*B6 = 1,04*B6), dan kun je dat dus doen door het beginbedrag met 1,04 te vermenigvuldigen. De *groeifactor* is dan 1,04.

68 De waarde van een bepaalde fiets wordt elk jaar 15% minder.
Welk percentage moet je nu in cel C2 invullen?
Met welk getal moet je dan de waarde elk jaar vermenigvuldigen?

. . . . , dat is dan de groeifactor!

- Zet het percentage nu in cel C2 en kijk in rij 8 of je het goed hebt.

69 Schrijf in de volgende gevallen de groeifactor per tijdseenheid op zonder gebruik te maken van Excel.

a De dagelijkse toename van een bacteriepopulatie is 30%.

b De afname van het aantal verkeersdoden is 12% per jaar.

c De economische groei in China is 8,3% per jaar.

d De waarde van die munteenheid is jaarlijks gehalveerd.

e Het aantal cellen verdubbelt zich ieder kwartier.

f De visstand in het Aralmeer neemt jaarlijks af met 14%.

g De druk in deze autoband neemt 1% per maand af.

70 Controleer je antwoorden van opdracht 69 met Excel (*blad 2*).

Exponentiële groei
$h = b \cdot g^t$
h is de waarde
b is beginwaarde
g is groeifactor
t is de tijdseenheid

Nu weer terug naar opdracht 64: Er staat 200 euro op de spaarrekening van Francien. Ze krijgt 4% rente per jaar. Je hebt als *groeifactor* 1,04 gevonden.
Nu kunnen we ook een wiskundige formule bedenken:
na 1 jaar is het bedrag 1,04 keer het beginbedrag,
na 2 jaar is het bedrag $1{,}04 \times 1{,}04 = 1{,}04^2$ keer het beginbedrag
en na t jaar is het dus $\mathbf{1{,}04}^t$ keer het beginbedrag.
De formule voor het bedrag dat na t jaar op de bank staat is:

$$\text{bedrag} = \text{beginbedrag} \times 1{,}04^t$$

71 We gaan nu in Excel aan de slag met de 200 euro van Francien en de 4% rente per jaar: **saldo = 200** × $\mathbf{1{,}04}^t$, waarbij t het aantal jaren is.
De 200 is hier het beginbedrag en 1,04 is de groeifactor.
De groeifactor 1,04 is te schrijven als 1 + 4/100 = 1 + 4%.

Nu ga je deze formule invoeren in Excel:

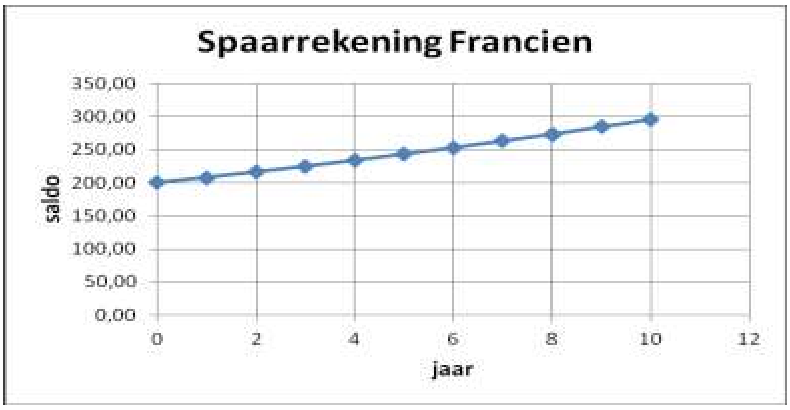
- Zet het percentage (C2) weer op **4%** , het beginbedrag (C3) weer op **200**.
- Kopieer rij 5 naar rij 10. (klik links op de 5, enz)

- Zet in A11: **saldo** en in A12: **groeifactor** .
- Zet in B12: = **1 + C2** ; NB verander nu bij *Celeigenschappen* de weergave van *Getal* van *percentage* in *standaard*.
- Zet in B11: = **C3*B12^B10** (startbedrag 200).
- Selecteer weer B11 en stel het aantal decimalen in op 2.
- Sleep de vulgreep van B11 naar L11.

Vergelijk de antwoorden met de antwoorden die je eerder hebt gekregen en wijzig weer eens het percentage (C2) en het beginbedrag (C3).

Grafieken in Excel

72
- Zet het percentage (C2) weer op 4% en het beginbedrag (C3) op 200.
- Selecteer de cellen B10 t/m L11.
- Kies bij Invoegen: Grafieken, Spreiding met vloeiende lijnen en markeringen.
- Kies bij Indeling: legenda: Geen.
  Grafiektitel; Boven grafiek: **spaarrekening Francien**
  Astitels: horizontaal, onder de as: **jaar** ; verticaal, gedraaid: **saldo**
  Rasterlijnen: beide **primair** aanvinken
- Eventueel de grootte aanpassen; resultaat:



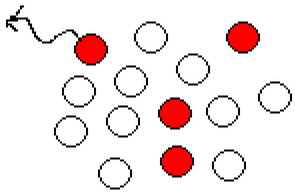
73 Vervolg van opgave 72.
- Selecteer cel C2.
- Verander het groeipercentage in kleine en grote **positieve** waarden en kijk wat er met de grafiek gebeurt.

Noem twee zaken die je zijn opgevallen.

- Verander het groeipercentage in kleine en grote **negatieve** waarden en kijk wat er met de grafiek gebeurt.

Noem twee zaken die je zijn opgevallen

Extra stof voor havo (74 t/m 79)



74 Radioactieve stoffen zijn niet stabiel, maar vervallen tot andere stoffen. Van een hoeveelheid Goud-192 is na 4 uur nog maar de helft over. Op een gegeven moment is 120 gram Goud-192 aanwezig.

a Neem als tijdseenheid 4 uur en geef de formule waarmee je de hoeveelheid Goud-192 *h* in gram na *t* tijdseenheden kunt berekenen.

b Bereken met je rekenmachine de groeifactor per dag.

c Na hoeveel uur is de hoeveelheid Goud-192 minder dan 1 gram?

- Contoleer je antwoorden met Excel, gewoon op blad 2.

75 Een tafeltennisballetje wordt op een hoogte van 100 cm losgelaten. De maximale hoogte na de stuit is 25% minder dan vóór de stuit.

- Wijzig de beginwaarde (C3) en het percentage (C2) en eventueel de woorden in de A-kolom. Gebruik nog steeds blad 2.

a Hoe hoog komt het balletje na drie keer stuiteren?

b Vul de onderstaande tabel in.

aantal keren stuiteren ***n***	0	1	2	3	6
maximale hoogte ***h*** in cm	100				

c Geef de bijbehorende formule.

h = ...

d Hoe hoog komt het balletje na 8 keer stuiteren?

Bij een hoogte van maar 0,15 cm, kun je het balletje niet meer zien stuiteren.

e Bepaal hoe vaak je het balletje kunt zien stuiteren.

f Schrijf ook op hoe je het antwoord van vraag **e** bepaalt in Excel.

Extra stof voor vwo (76 t/m 82)

76 De functie $N(t) = 1000 \cdot 5^t$ beschrijft het aantal Salmonellabacteriën in een laboratoriumkweek, *t* uur na de eerste meting.
De eerste meting is om 10.00 uur. Dus dan is *t* = 0.

Deze formule hoort bij exponentiële groei.

a Wat is hier de beginwaarde?

b Wat is de groeifactor?

c Hoeveel bacteriën zijn er op $t = 0$?

d Volgens het functievoorschrift is $N(0) = 1000 \cdot 5^0$. En dit is de beginwaarde, dus $1000 = 1000 \cdot 5^0$. Hoe groot is 5^0 blijkbaar?

77 **Terug in de tijd**

Vervolg van opdracht 76. Je mag ervan uitgaan dat het aantal bacteriën vóór de eerste meting ook al exponentieel groeide.

a Hoeveel bacteriën waren er een uur voor dat de meting begon?

$5^0 = 1$

$5^{-1} = \frac{1}{5}$

b Volgens het functievoorschrift is $N(-1) = 1000 \cdot 5^{-1}$. Volgens opdracht **a** is $N(-1) = 200$. Hoe groot is het getal 5^{-1} blijkbaar?

78 Je gaat de formule van opgave 76 nu weergeven in Excel.

- Gebruik in Excel vanaf nu blad 3. Dan heb je weer een schoon scherm.

Maak nu de onderstaande tabel in Excel.

t (uur)				0	1	2	3	4		
N(*t*)				1000	.....	.....	.....	.....		
groeifactor										

Dat gaat als volgt:

- Zet in A1: **groeifactor** en in B1 de waarde ervan.
- Zet in A2: **beginwaarde** en in B2: **1000**.
- Zet in A4: ***t* (uur)** ; in A5: ***N*(*t*)** ; in A6: **groeifactor** en in E4 een **0**.
- Zet in E5 de formule van $N(t)$: **=B2*B1^E4** .
  Pas op voor **Ê4** ipv **^E4**.
- Selecteer E4 en E5 en trek dan de vulgreep naar rechts tot en met K5.

a Leg de formule in E5 kort uit.

- De groeifactor (op rij 6) invullen doe je net als in opdracht 66.
  Zet in F6: **= F5/E5** en trek dan de vulgreep naar rechts t/m K6.

Stel dat je wilt weten hoeveel bacteriën er waren voordat je met meten begon.

b Wat verwacht je als groeifactor in de cellen C6, D6 en E6?

79 **Terug in de tijd, nu met Excel.** Als je wilt weten hoeveel bacteriën er waren 2 of 3 uur voor dat de meting begon, doe je het volgende:

- Selecteer de cellen F4, F5 en F6 en trek de vulgreep naar B6.

a Noteer de waarden op de tijden 2 en 3 uur voor de start van de meting:

N(- 2) = en volgens de formule $N(-2) = 1000 \cdot 5^{-2}$

N(- 3) = en volgens de formule $N(-3) = 1000 \cdot 5^{-3}$

b Hoe groot zijn de waarden van de getallen 5^{-2} en 5^{-3}. Dus met welk getal moet de je de beginwaarde (1000) vermenigvuldigen om de hoeveelheid van 2 of 3 uur eerder te krijgen? NB: niet afronden!! Zie kader blz 31.

5^{-2} = en 5^{-3} =

→ **HAVO tot hier**

80 De groeifactor per halfuur?

In de vorige opdrachten is steeds de groeifactor per *uur* 5.

De vraag is: hoe groot is de groeifactor *k* per *halfuur*?

Een methode om dat te doen is als volgt:

Benader in twee decimalen de groeifactor *k* per halfuur met behulp van N(0) en $N(\frac{1}{2})$. Schrijf kort op hoe je dat hebt gedaan.

$5^{-2} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2}$

$5^{-3} = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3}$

$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

81 Vervolg van opdracht 80. In Excel doe je het volgende:

- vervang in F4 het getal 1 door het getal 0,5. Denk eraan dat je een komma gebruikt en niet een punt.
- Selecteer de cellen E4, E5, F4 en F5.
- Trek de vulgreep naar rechts t/m K5. Je hebt nu de groei per half uur.

a Welk verband bestaat er tussen de groeifactor *k* per half uur en de groeifactor per uur?

b Leg uit waarom $1000 \cdot k^2 = 5000$.

c Laat zien dat $k = \sqrt{5}$. Conclusie: $5^{½} = \sqrt{5}$. Zie kader op deze bladzijde.

82 Je gaat nu een grafiek tekenen bij de bacteriegroei.

- Selecteer alle cellen op de rijen 4 en 5 van C t/m K.
- Kies bij Invoegen: Grafieken, enz.
- Verander de groeifactor in kleine en grote *positieve* waarden en kijk wat er met de grafiek gebeurt.

Noem twee zaken die je daarbij opvallen.

Exponentiële verbanden - D Leeglopers

§1 Het atoommodel

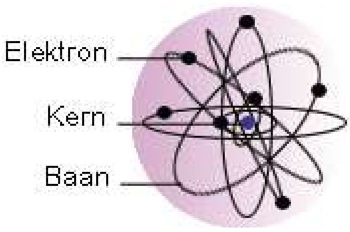
In de *voorloper* op dit deel (of in je gewone boek) heb je al heel wat geleerd over radioactiviteit en straling. In het kort herhalen we dat. En daarna gaan we dieper in op radioactief verval en halveringstijd.

Paragraafvraag	Hoe zit een atoom in elkaar?

Instap

Het atoommodel

Een atoom bestaat uit *kern* met daaromheen *elektronen* die met hoge snelheid als een soort planeten in banen rond de kern cirkelen. De kern is véél kleiner dan het hele atoom. Als het atoom voorgesteld wordt door een bal ter grootte van een lokaal, dan is de kern zo klein als een speldenknop! De elektronen zijn nog veel kleiner!



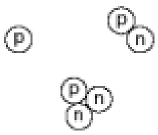
De atoomkern met daaromheen in banen de elektronen.

De kern bestaat uit twee soorten deeltjes: de *neutronen* en de *protonen*. Het aantal protonen in een atoomkern noemen we het *atoomnummer Z*. In de kern van een atoom waterstof (H) zit één proton. Waterstof heeft dus atoomnummer $Z = 1$. Het atoom koolstof (C) heeft 6 protonen in de kern en het atoomnummer is $Z = 6$.

Isotopen

Atomen van dezelfde soort kunnen verschillende massagetallen hebben. Dat kan alleen komen door een ander aantal neutronen in de kern. Het aantal protonen (Z) is hetzelfde, anders heb je een ander soort atomen!

Er zijn bijvoorbeeld koolstofatomen met massagetal 12 (6 protonen en 6 neutronen): C-12. Ook zijn er koolstofatomen met massagetal 14, die hebben dus elk 6 protonen en 8 neutronen in de kern: C-14.



3 isotopen van waterstof H
p = proton n = neutron

Atomen van hetzelfde element die verschillende aantallen neutronen in de kern hebben, noem je *isotopen*. In het voorbeeld hiervoor kun je dus zeggen: C-12 en C-14 zijn isotopen.

Samengevat:

- **Een *atoom* bestaat uit een kern met protonen en neutronen met daaromheen in banen de elektronen.**
- **Het *atoomnummer Z* is het aantal protonen in de kern.**
- ***Isotopen* zijn atomen van hetzelfde element met verschillend aantal neutronen.**

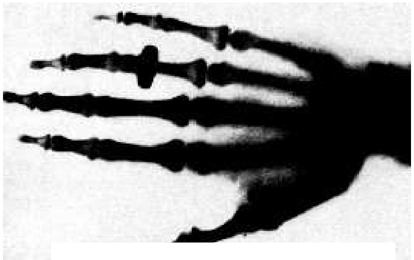
Exponentiële verbanden - D Leeglopers

§2 Röntgenstraling en kernstraling

Ruim een eeuw geleden werden er enkele grote ontdekkingen gedaan die zeer veel invloed op de wereld hebben gehad. Met Röntgenstraling zijn artsen eindelijk in staat dwars door een mens heen te kijken en met de ontdekking van radioactiviteit is de weg naar de kernbom en de kerncentrale open.

Paragraafvraag	**Welke eigenschappen hebben röntgen- en kernstraling?**

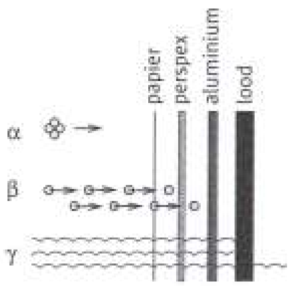
Instap



Röntgenfoto van hand met ring van de vrouw van W.C. Röntgen

In 1895 ontdekt de Duitse natuurkundige Wilhelm Conrad Röntgen dat zijn proefopstelling die op hoogspanning werkt, straling levert. Hij kan nog niet verklaren hoe deze straling ontstaat, maar hij ontdekt wel dat deze straling een gas geleidend kan maken. Het blijkt ook dat deze straling, die hij X-straling noemt, in verschillende materialen in verschillende mate kan doordringen. Hij maakt binnen enkele dagen gebruik van deze eigenschap door het nemen van de eerste röntgenfoto's. Korte tijd na de ontdekking wordt de straling ***röntgenstraling*** genoemd. Röntgen weet niet dat deze straling schadelijk is voor de gezondheid en maakt allerlei 'foto's' met deze straling. Beroemd wordt de foto van de hand van zijn vrouw waarop duidelijk de botten en de ring te zien zijn. Artsen zijn razend enthousiast: nu kunnen ze eindelijk dwars door een patiënt heen kijken! Maar er zijn ook mensen bang ongemerkt begluurd te worden. Er wordt zelfs 'X-ray proof ' ondergoed op de markt gebracht!

Net als bij röntgenstraling wordt bij radioactiviteit eerst het verschijnsel ontdekt. In 1896 ontdekt de Fransman Henri Becquerel dat een erts waar uranium in zit spontaan (= zonder invloed van buitenaf) straling kan uitzenden. Hij beweert dat deze ***kernstraling*** ontstaat bij veranderingen in de atoomkernen. Daarna worden de eigenschappen van de kernstraling uitgebreid onderzocht. Het beroemde echtpaar Pierre en Marie Curie ontdekt in 1898 twee nieuwe *radioactieve atoomsoorten* (radium en polonium). In die tijd wist men niet hoe gevaarlijk de straling was die ze onderzochten. Marie Curie bijvoorbeeld overleed waarschijnlijk aan de gevolgen van blootstelling aan straling. Al snel wordt uit onderzoek duidelijk dat er verschillende soorten kernstraling zijn. Die blijken bijvoorbeeld wat het *doordringende vermogen* betreft heel verschillend te zijn.



Het doordringende vermogen van de drie soorten kernstraling is verschillend.

De 3 verschillende soorten *kernstraling*:

- *α-straling* is alfastraling, dat wordt bijvoorbeeld uitgezonden door uranium-235. Deze straling dringt nauwelijks ergens in door, slechts een paar centimeter in lucht. Een velletje papier houdt het helemaal tegen.
- *β-straling* is bètastraling, dat wordt bijvoorbeeld uitgezonden door koolstof-14. β-straling gaat ongeveer een meter door de lucht. Een paar millimeter aluminium is genoeg om het volledig te absorberen.
- *γ-straling* is gammastraling, dat wordt bijvoorbeeld uitgezonden door bepaalde joodatomen die in ziekenhuizen worden gebruikt. Deze soort lijkt het meest op röntgenstraling. Het heeft een groot doordringend vermogen. Enkele centimeters lood of 1 meter beton absorbeert wel een heel groot deel van deze γ-straling, maar niet alles.

Ook alfa-, bèta- en gammastraling zijn (in verschillende mate) schadelijk voor de gezondheid.

Exponentiële verbanden - D Leeglopers

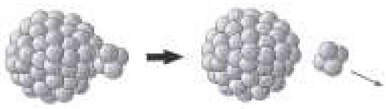
§3 Radioactief verval en halveringstijd

De meeste koolstofatomen hebben massagetal 12. Deze koolstofatomen hebben 6 protonen en 6 neutronen in de kern. De kern van deze koolstofatomen verandert *nooit*. Atoomkernen die nooit veranderen, heten *stabiel*. De meeste atoomkernen in de natuur zijn stabiel.

Paragraafvraag	Wat heeft radioactiviteit met exponentiële verbanden te maken?

Instap

In de natuur is naast koolstof-12 ook koolstof-14 te vinden. Daarvan zijn de atoomkernen *instabiel*. In de kern van een atoom koolstof-14 zitten ook 6 protonen, maar 8 neutronen! Dat zijn blijkbaar teveel neutronen. Die kernen zullen ooit spontaan veranderen. Daarbij ontstaat een nieuwe kern en er komt straling vrij. Een stof met instabiele atoomkernen heet *radioactief*. Radioactief betekent letterlijk 'stralingsactief'. Het veranderen van een atoomkern heet ***radioactief verval***.



De instabiele atoomkern van uranium-235 zendt bij verval α-straling uit.

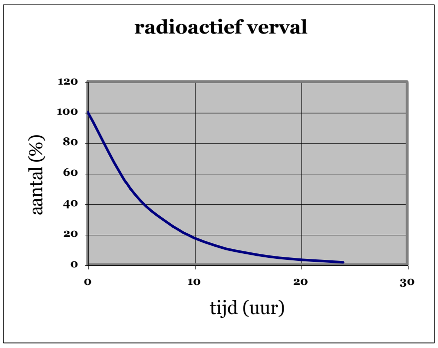
Bij kernenergie en bestraling van kankergezwellen wordt gebruik gemaakt van *instabiele* atoomkernen. De meeste atoomkernen in de natuur zijn *stabiel*. De straling komt van een zeer klein aantal instabiele atomen. De hoeveelheid straling in de natuur is hierdoor zeer klein. Soms *ontstaan* instabiele atoomkernen, bijvoorbeeld in een kerncentrale. Deze instabiele atoomkernen vormen radioactief afval. Hierom vinden sommige mensen kernenergie te gevaarlijk om toe te passen.

Controle op besmetting met radioactieve stoffen met een Geigerteller.

Activiteit en het meten van straling

In een radioactieve stof vervallen voortdurend atomen. Hoe meer atomen per seconde vervallen, hoe meer straling de stof uitzendt. Het aantal atomen dat per seconde vervalt, wordt de *activiteit* (A) van de stof genoemd. De activiteit wordt gemeten in *becquerel* (Bq).

Straling die door radioactieve stoffen wordt uitgezonden kun je niet zien, horen of voelen. Je hebt daarvoor instrumenten nodig. Bijvoorbeeld een fotografische film. Mensen die met radioactieve stoffen werken, bijvoorbeeld op de afdeling radiodiagnose in een ziekenhuis, dragen een badge waarin een stukje film zit. Elke week wordt die film uit de badge gehaald en ontwikkeld. Heeft een medewerker meer straling opgelopen dan zal die film zwarter zijn geworden. Een ander veelgebruikt instrument is de Geigerteller. Daar kun je ook de activiteit mee bepalen.



Het instabiele Au-192 heeft een halveringstijd van 4 uur.

Halveringstijd

De activiteit van een hoeveelheid radioactieve stof wordt steeds kleiner. Dat komt doordat er steeds minder atomen overblijven die nog moeten vervallen. Radioactief verval is een toevalsproces: het is niet te voorspellen wanneer een bepaalde instabiele kern vervalt. Bij een groot aantal instabiele kernen zie je toch een regelmaat: in een bepaalde tijdsduur vervalt de helft van de instabiele kernen en wordt de activiteit tweemaal zo klein.

De *halveringstijd* ($t_{½}$) van een stof is de tijd waarin helft van de instabiele atomen van die stof vervallen.

Anders gezegd: de *groeifactor* = ½ in één halveringstijd.

De activiteit A verloopt volgens een exponentieel verband:

$$A = b \cdot (0{,}5)^n,$$

met

b = de beginactiviteit

n = tijd in halveringstijden.

Radioactief verval is mooi te 'zien' met een applet. Op het moment dat de applet (http://www.walter-fendt.de/ph14nl/lawdecay_nl.htm) gestart wordt, beginnen de atoomkernen te "vervallen": kleurverandering van rood naar zwart.

Bij de tweede applet is de halveringstijd zelf in te stellen: (lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/applist/decay/decay.htm) .

Voorbeeldopgave: I-131 is een radioactieve isotoop van jood, die gebruikt wordt bij de behandeling van schildklierkanker. De halveringstijd van I-131 is 8,0 dagen. In een schildklier bevindt zich een hoeveelheid I-131 met een activiteit van 320 MBq (M = mega = 10^6). Bereken de activiteit na 40 dagen.

Doe dit ook met de bekende formule voor exponentiële verbanden: $\boldsymbol{A = b \cdot g^n}$

Uitwerking: 40 dagen = 5 × 8,0 dagen = 5 × de halveringstijd. Dat betekent dat de activiteit 5 keer *gehalveerd* is. Na 40 dagen is de activiteit dus nog:

$A = ½ \times ½ \times ½ \times ½ \times ½ \times 320$ MBq = 10 MBq.

Met de formule $\boldsymbol{A = b \cdot g^n}$, waarin b = de beginwaarde 320 MBq en g = de groeifactor 0,5 en n is het aantal halveringstijden 5 krijg je:

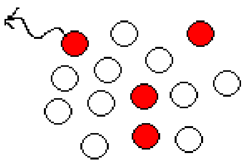
$\boldsymbol{A} = 320 \cdot (0{,}5)^5 = 10$ MBq

83 Een radioactieve stof heeft op zeker moment een activiteit van 300 kBq.

a. Bereken hoeveel instabiele atoomkernen per minuut vervallen.

Na drie dagen wordt de meting herhaald. De activiteit is nog 75 kBq.

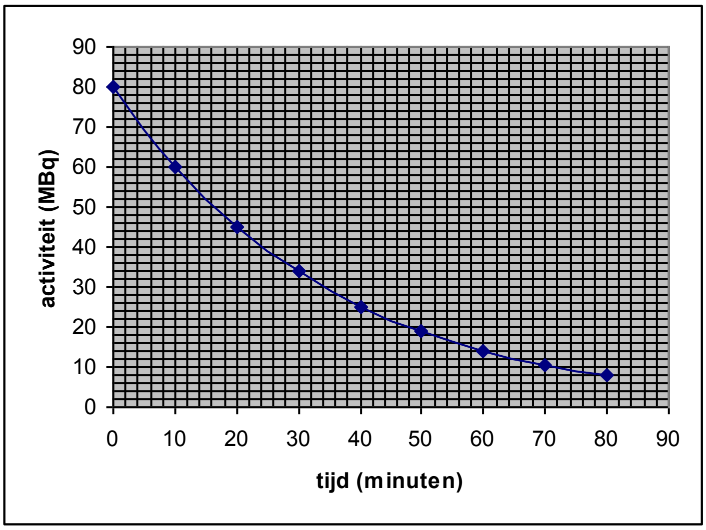
b. Bepaal de halveringstijd van deze stof in uren.



84 Barium heeft veel isotopen, bijvoorbeeld barium-133 en barium-144. Barium-133 heeft een halveringstijd van 11 jaar en voor barium-144 is de halveringstijd 12 s. Je hebt van beide soorten een gelijke hoeveelheid.

a Welk barium zendt in het begin de meeste straling uit? Leg uit.

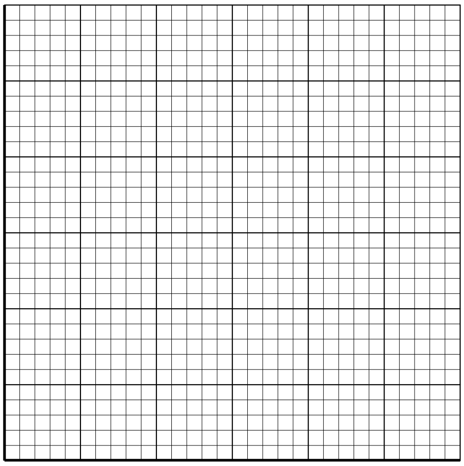
b Welk barium zendt na lange tijd de meeste straling uit? Leg uit.



85 In een laboratorium wordt de activiteit van een radioactieve bron om de 10 minuten gemeten. De meetresultaten zijn in de grafiek hiernaast weergegeven.
Bepaal met behulp van deze grafiek de *halveringstijd* van deze radioactieve bron.
Schrijf duidelijk op hoe je dit doet.

86 Een radioactieve stof heeft een activiteit A van 25 kBq en een halveringstijd van 6,0 uur.

a Teken in het diagram hiernaast de grafiek van de activiteit van 0 tot 30 uur. Denk eerst na over de schaalverdelingen.



b Na hoeveel tijd is de activiteit tot 20 % van de beginwaarde gedaald?

c Wat is de groeifactor per 6 uur?

Als de groeifactor per jaar gelijk aan g is, dan is de groeifactor per 5 jaar gelijk aan g^5

d Wat is de groeifactor per dag?

Samengevat:

▫ **Een *stabiele* atoomkern verandert nooit.**

▫ **Een *instabiele* atoomkern verandert ooit.**

▫ **Een *radioactieve stof* bevat instabiele atoomkernen.**

▫ **Radioactief *verval* is het veranderen van een instabiele atoomkern. Hierbij komt kernstraling vrij en ontstaan nieuwe kernen.**

▫ **Alfa-straling, bèta-straling en gamma-straling zijn de 3 soorten kernstraling.**

▫ **De *activiteit A* van een radioactieve stof in becquerel (Bq) is het aantal instabiele atoomkernen dat in één seconde vervalt.**

▫ **De *halveringstijd* $t_{½}$ is de tijd waarin de helft van de instabiele atoomkernen vervalt. De activiteit halveert dan ook.**

▫ **De activiteit A verloopt volgens een exponentieel verband:**

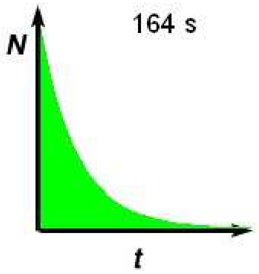
$$A = b \cdot (0{,}5)^n,$$

waarin b = de beginactiviteit en n = tijd in halveringstijden.

Exponentiële verbanden - D Leeglopers

§4 Meten aan straling

Meten aan straling 1



Na wat je hiervoor geleerd hebt over straling is het nu tijd om zelf proeven te gaan doen! Omdat we helaas niet met echte stralingsbronnen kunnen werken gaan we het radioactieve verval simuleren. Ga nu naar de volgende applet: lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/applist/decay/decay.htm

87 Je kunt zelf de halveringstijd (τ) instellen met het schuifje. Met '**START**' kun je starten en met '**RESET**' weer terug naar de begintoestand.
Onderzoek het verband tussen de halveringstijd en het tempo waarin de instabiele kernen vervallen.

Streep door wat niet van toepassing is:
Bij een grote halveringstijd vervallen de kernen *snel*/*langzaam*.

Streep door wat niet van toepassing is:
De activiteit bij een kleine halveringstijd is *groter*/*kleiner*.

Meten aan straling 2

Hiervoor moet je nu naar: www.walter-fendt.de/ph14nl/lawdecay_nl.htm

Op deze site staat een applet met een simulatie van het verval van kernen. Lees de tekst erboven. Sommige van de volgende vragen kun je met deze applet beantwoorden en voor andere moet je nadenken, meten en overleggen.

88 Waarom wordt er meestal geen practicum gedaan met radioactieve straling?

89 Je zou voor een stralingspracticum een radioactieve stralingsbron en een Geigerteller nodig hebben. Waarom blijft de bron niet altijd bruikbaar?

90 Noteer met hoeveel kernen de animatie begint: N_0 = ...

91 Druk op **start**.
Kijk hoe de "kernen vervallen" en zet de animatie op **pauze** op t = 1,00T.

a. Noteer hoeveel nog niet vervallen kernen er dan nog zijn:

b. Wat wordt in deze applet dus bedoeld met het symbool T ?

92 Eerst **reset**. Meet T zo nauwkeurig mogelijk met een stopwatch: T = ... s

93 In de grafiek onder de applet staat N/N_0 op de verticale as. Streep door wat niet van toepassing is:

N is het aantal *nog niet vervallen* / *vervallen* kernen

94 Eerst **reset**. Druk op **start** om het verval te laten beginnen. Zet het verval af en toe op **pauze** om de onderstaande tabel in te vullen. Als het niet helemaal lukt, begin je na **reset** gewoon opnieuw.

t	0	1,00 *T*	2,00 *T*	3,00 *T*	4,00 *T*	5,00 *T*	6,00 *T*	7,00 *T*
opdracht 94: ***N* (aantal actieve kernen)**	1000							
opdracht 96b								

95 De 'meetresultaten' uit de tabel ga je in het diagram op de volgende bladzijde intekenen. Zet eerst bij de assen de grootheden, de eenheden en de juiste schaalverdeling. Verbind de punten met een zo vloeiend mogelijke lijn.

96 a Hoe kun je controleren of je inderdaad een exponentieel verband hebt gekregen?

b Laat je antwoord op vraag a controleren (en verbeter het zo nodig). Voer nu die controle uit! Gebruik daarvoor de 3e rij van de tabel.

97 Stel de formule op voor *N*:

$N = \text{.........} \times \text{......}$

Exponentiële verbanden - D Leeglopers

§5 De condensator: een elektrische leegloper

Op toiletten zie je vaak elektrische handendrogers. Een keer op de knop drukken en je kunt bijvoorbeeld 1 minuut lang je handen drogen. Daar moet een soort tijdschakelaar inzitten. Tijdschakelaars komen veel voor: bij het regelen van de tijden bij verkeerslichten, bij het instellen van de bedenktijd bij een quiz, in de flitser van een fototoestel, in je wekkerradio, enzovoorts. In schakelingen waarin *tijd* een belangrijke rol speelt zit vaak een *condensator*.

Een condensator is een soort klein oplaadbaar elektrisch 'vat', iets waarin je *elektrische energie* kan *opslaan*. Dat doe je met een spanningsbron. Het snel of langzaam laten leeglopen van een condensator is te regelen met een weerstand, dat wil zeggen dat de leeglooptijd instelbaar is.

Paragraafvragen	**Wat voor exponentieel verband volgt een leeglopende condensator? Hoe regel je de leeglooptijd?**

Instap Een condensator is in veel opzichten te vergelijken met een (fiets)band:

- Met een luchtpomp doe je lucht in de band. Zo gaat het bij de condensator ook: met een spanningsbron (= een soort elektrische pomp!) lever je elektrische energie aan de condensator.
- Net zoals je met een drukmeter de druk in een band kunt meten kun je met een voltmeter de spanning over een condensator meten.
- Hoe hoger de druk in de band hoe meer lucht in die band. Zo is het met de condensator ook: Hoe hoger de elektrische spanning die je er op zet hoe meer elektrische energie er in kan.
- De druk in een band mag niet hoger worden dan een bepaalde maximale waarde, die per soort anders is. Zo staat er op de meeste condensatoren ook de maximale spanning die je er op mag zetten.
- Als je band lek is loopt ie sneller leeg bij een groot gat dan bij een klein gaatje. Zo is het met de condensator ook: hoe kleiner de *weerstand* waardoor ie leegloopt hoe sneller het gaat!
- Als een band leegloopt, gaat het eerst sneller dan later. Dat komt doordat de druk in de band afneemt. Zo ook bij een condensator: vol loopt ie harder leeg dan aan het eind als er bijna niks meer in zit.
- Net als bij banden zijn er verschillende formaten. In het geval van de condensator van heel erg klein tot heel erg groot.

P fffffffff

Het symbool voor de condensator is: 

98 Streep in de volgende zinnen door wat niet juist is:

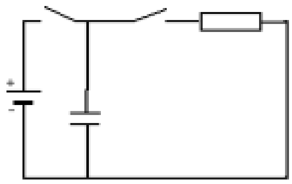
Als de spanning van de bron groot is zal er *veel/weinig* elektrische energie in de condensator worden opgeslagen.

Als de weerstand groot is zal de condensator *snel/langzaam* leeglopen.

Samengevat:

▫ In een **condensator** wordt elektrische energie opgeslagen.
▫ Bij het leeglopen is de **leeglooptijd** instelbaar met een weerstand.

Meten aan de condensator



Opladen

In de schakeling hiernaast zie je helemaal links de spanningsbron. Daarnaast staat in serie de condensator. Door de linker schakelaar korte tijd te sluiten laadt de condensator op. We gebruiken hiervoor de drukschakelaar.

Ontladen

In het rechterdeel van de schakeling staat de condensator in serie met een weerstand. Als je de rechter schakelaar sluit, begint de condensator leeg te lopen door de weerstand. Deze schakelaar heeft meer standen. Als die op stand **0** staat dan is er geen verbinding.

Leeglooptijd

Met de standenschakelaar kun je de condensator achtereenvolgens door 3 verschillende weerstanden laten leeglopen.

99 Opdracht

- Sluit de digitale voltmeter aan op de condensator (rood = +)
- Druk kort op de drukschakelaar. Nu is de condensator opgeladen.
- Nu moet je 2 dingen *gelijktijdig* doen:
    - Zet de standenschakelaar van de **0** in stand **3k9** door 'm een klein stukje met de klok mee te draaien.
    - Start de tijd op de stopwatch.
- Meet zo nauwkeurig mogelijk, om de 10 seconde, de spanning die op de condensator staat en noteer die in de tabel hieronder.
- Zet ten slotte de standenschakelaar op de *volgende* **0**.

	tijd (s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
3k9	**spanning *U* (Volt)**											
	opdr. 101: groeifactor	X										
5k6	**spanning *U* (Volt)**											
	opdr. 103: groeifactor	X										
8k2	**spanning *U* (Volt)**											
	opdr. 103: groeifactor	X										

100 Maak in Excel de grafiek van de spanning tegen de tijd.

$$\text{groeifactor} = \frac{\text{nieuwe waarde}}{\text{oude waarde}}$$

101 Bereken de groeifactor, bij voorkeur met Excel. Zet die ook in de tabel.

102 Geef de formule van het exponentiele verband tussen spanning *U* en tijd *t* (in aantallen maal 10 s):

U = ...(...)$^{...}$

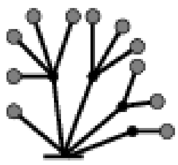
103 Herhaal de *hele* opdracht voor de twee andere weerstanden, die op het kastje worden aangegeven met **5k6** en **8k2**. Gebruik de tabel!

104 Wat is het verband tussen de groeifactor en de weerstand?

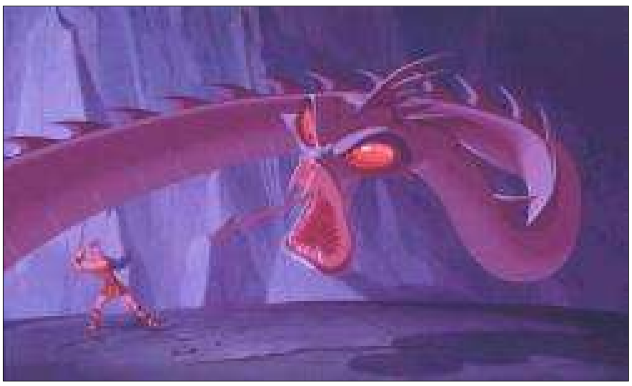
Exponentiële verbanden - H Hercules

In een van zijn vele avonturen moet de Griekse held Hercules het opnemen tegen de veelkoppige en zeer giftige zeeslang, Hydra genaamd, waarvan de adem alleen al genoeg is om een mens te vergiftigen. De enige manier waarop Hercules het monster kan doden is om met z'n zwaard één voor één alle koppen van het beest af te hakken. Maar er is wel een kleine complicatie. Zo gauw onze held een kop van Hydra afhakt groeien er spontaan nieuwe koppen aan. (Bron: Pythagoras, februari 2000, Dion Gijswijt)

We gaan nu kijken of er een manier is om de Hydra ook echt een kopje kleiner te maken. Daarvoor moeten we eerst het probleem verkennen.

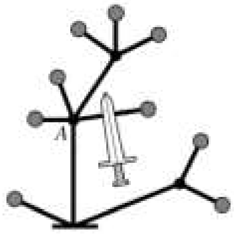


- We zullen Hydra schematisch voorstellen. Een simpel horizontaal streepje duidt het lichaam van Hydra aan. Uit het lichaam komen een aantal lange nekken (aangegeven met lijnstukjes), waarvan sommige zich splitsen in meerdere delen, waarvan sommige zich nog verder splitsen, enzovoort. Na de laatste splitsing zit aan het uiteinde van iedere nek een vervaarlijke kop (aangegeven met een bolletje).
- Als Hercules een kop van Hydra af heeft gehakt kunnen er 3 dingen gebeuren:
  1. Als de kop direct aan het lichaam vast zat, dan gebeurt er verder niets.
  2. Als de kop aan een ander knooppunt vastzat, noem dat punt A, dan groeit er vanuit het knooppunt net onder A een nieuwe tak die een ***kopie*** is van de tak waar A in zit.
  3. Mocht A een eindpunt zijn geworden omdat de laatste kop van A is afgehakt, dan veranderen A en het eindpunt van de nieuwe tak in een kop.

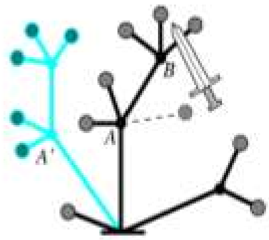


Voorbeeld:

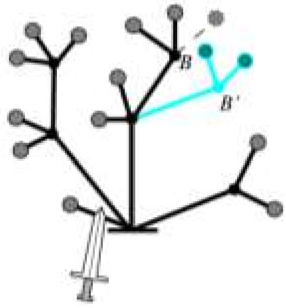
In figuur 1 zie rechts naast A de plaats waar het zwaard de kop afhakt. Figuur 1 wordt dan figuur 2 en na nog een 'hak' rechts van punt B krijg je de situatie van figuur 3.



figuur 1

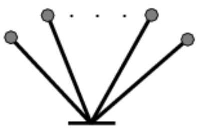


figuur 2



figuur 3

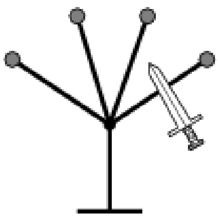
Hoeveel slagen heeft Hercules nodig?



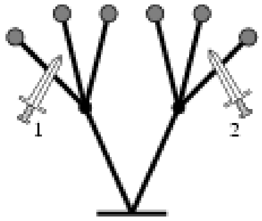
figuur 4

Om het *aantal* slagen te kunnen berekenen beginnen we met een eenvoudig voorbeeld. We noemen de afstand van de verste kop tot aan het lichaam de lengte van de hydra. Hydra's met ***lengte 1*** (zie figuur 4) hebben dus feitelijk alle koppen direct op het lichaam zitten en kunnen dus met evenveel slagen als koppen onthoofd worden.

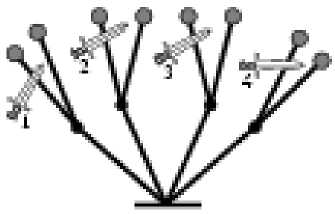
Dan bekijken we nu een hydra van lengte 2 met 4 koppen op 1 nek (figuur 5). Als je er 1 kop afslaat houd je 2 takken met elk 3 koppen over (figuur 6). Na nog eens 2 slagen hebben we 4 takken met elk 2 koppen (figuur 7).



figuur 5



figuur 6



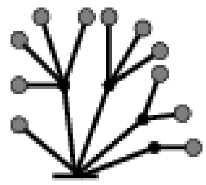
figuur 7

Als we dan nog 4 keer slaan hebben we 8 takken met elk 1 kop. Daarvoor hebben we 8 slagen nodig om tot een hydra te komen van lengte 1 met 16 koppen. Die heeft dan nog 16 slagen nodig om koploos te zijn. Het totaal is dus 1+2+4+8+16 = 31 slagen.

Opgaven

105 Hoeveel slagen heb je nodig om een hydra met lengte 4 met 1 kop een kopje kleiner te maken?

106 Hoeveel slagen heb je nodig om de volgende hydra een kopje kleiner te maken?



figuur 8

107 Hoeveel slagen heb je nodig om de hydra van figuur 1 een kopje kleiner te maken?