
Samenvatting

1 Onderzoeksvragen

Het project ‘Algebra leren in een computeralgebra omgeving’¹ waarover we hier rapporteren, maakt deel uit van onderzoek naar de integratie van informatie- en communicatietechnologie (ICT) in het onderwijs in het algemeen en naar de invloed daarvan op het leren van wiskunde in het bijzonder. In deze studie richten we ons op twee kwesties die op dit moment actueel zijn voor het wiskundeonderwijs: het algebraonderwijs en de integratie van technologie – in het bijzonder computeralgebra – daarin. Algebra is sinds jaar en dag een belangrijk onderwerp in de schoolwiskunde, dat een struikelblok is voor veel leerlingen. De moeilijkheden van het leren van algebra zijn gelegen in het formele en algoritmische karakter, het abstracte niveau waarop problemen worden benaderd, het object karakter dat algebraïsche expressies en formules hebben en de compacte algebraïsche taal met haar specifieke conventies en symbolen. Door deze moeilijkheden ervaren leerlingen algebra vaak niet als een natuurlijk en betekenisvol middel om problemen mee op te lossen (Bednarz et al., 1996; Chick et al., 2001).

Integratie van ICT is een van de manieren waarop de moeilijkheden met het leren van algebra zouden kunnen worden aangepakt. Het gebruik van ICT kan naar verwachting bijdragen aan visualisatie van begrippen en kan de leerling het uitvoeren van bewerkingen met de hand besparen. Daarmee kan hij/zij zich concentreren op begripsontwikkeling en probleemaanpak. Op deze manier zou het gebruik van ICT het traditionele algebra-curriculum kunnen verlichten. Tegelijkertijd leidt de integratie van ICT tot vragen met betrekking tot de doelen van het algebraonderwijs en de relevantie van pen-en-papier methoden, nu die immers kunnen worden overgelaten aan het technologisch gereedschap. Wat betreft algebraïsche vaardigheden is het gebruik van een computeralgebra systeem (CAS) bijzonder interessant, omdat het een compleet repertoire aan algebraïsche procedures en operaties biedt (Heid, 1988; O’Callaghan, 1998).

De mogelijke integratie van computeralgebra in het algebraonderwijs leidt tot de volgende centrale onderzoeksvraag van deze studie:

Hoe kan het gebruik van computeralgebra het inzicht bevorderen in algebraïsche concepten en operaties?

Deze vraag moet nader worden gespecificeerd. Omdat algebra als geheel een te veelomvattend onderwerp is, beperken we ons hier tot het parameterbegrip. Parameters komen op natuurlijke wijze naar voren in concrete probleemsituaties en zijn tevens middelen voor generalisatie en abstractie. Daarom kan het onderwerp parameter de

1. Dit onderzoek is mogelijk gemaakt door de Nederlandse organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek NWO, projectnummer 575-36-003E.

leerling uitnodigen om de ‘algebraïsche wereld van formules, expressies en algemene oplossingen’ binnen te gaan. Verder omvat het parameterbegrip ook de verschillende rollen die bij ‘gewone’ variabelen een rol spelen en die de leerlingen eerder hebben leren kennen. Het gebruik van parameters kan het inzicht van de leerlingen in de betekenis en de structuur van algebraïsche formules en expressies verbeteren (Bills, 2000; Furinghetti & Paola, 1994). Om deze redenen is de onderzoeksvraag gespecificeerd in de volgende deelvraag:

1. *Hoe kan het gebruik van computeralgebra bijdragen aan een hoger niveau van inzicht in het parameterbegrip?*

Eerder onderzoek naar de integratie van computeralgebra in het wiskundeonderwijs toont aan dat het idee dat technologie de elementaire bewerkingen uitvoert zodat de leerling zich kan concentreren op begripsontwikkeling te simplistisch is (Artigue, 1997; Drijvers, 2000; Guin & Trouche, 1999; Lagrange, 2000; Trouche, 2000). De technische vaardigheden die de leerling nodig heeft om procedures in de CAS omgeving uit te voeren vereisen conceptueel inzicht en tegelijkertijd beïnvloeden ze dat inzicht. Het tweede aandachtspunt in dit onderzoek is dan ook de verweven ontwikkeling van technieken in de computeralgebra omgeving en wiskundig inzicht in termen van mentale schema’s die de leerlingen ontwikkelen. Deze zogeheten instrumentele benadering van ICT-gebruik, die betrekking heeft op het instrumentatieproces waarin de duale relatie tussen begripsontwikkeling en techniek in de ICT-omgeving zich ontwikkelt, is het onderwerp van de tweede onderzoeksdeelvraag:

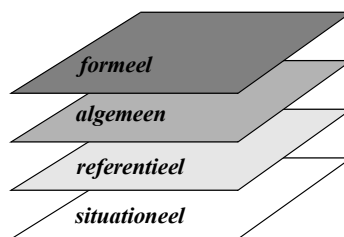
2. *Wat is de relatie tussen geïnstrumenteerde technieken in de computeralgebra omgeving en wiskundige begrippen, zoals die tot stand komt in het instrumentatieproces?*

2 Theoretisch kader

Bij het formuleren van de onderzoeksvragen vroegen we ons af welke theoretische invalshoeken van pas zouden komen bij het onderzoeken van deze kwesties. Een kant-en-klaar theoretisch kader voor een onderzoek naar het leren van algebra in een computeralgebra omgeving was niet beschikbaar. Daarom hebben we die theoretische elementen uit onderzoek naar het leren van algebra en wiskunde in het algemeen geselecteerd die kansrijk leken voor toepassing op het onderwerp van deze studie. Dat betekende dat deze elementen uit hun gebruikelijke context zijn gehaald en zijn aangepast aan het doel van dit onderzoek. Deze eclectische benadering van theorie is theorie-geleide bricolage genoemd (Gravemeijer, 1994). De volgende elementen zijn opgenomen in het theoretisch kader:

- *De domein-specifieke instructietheorie van Realistisch Wiskundeonderwijs*
Kernbegrippen in de domein-specifieke instructietheorie van Realistisch Wis-

kundeonderwijs zijn geleide heruitvinding, progressief mathematiseren, horizontaal en verticaal mathematiseren, didactische fenomenologie en zich ontwikkelende modellen (Freudenthal, 1983; Gravemeijer, 1994; de Lange, 1987; Treffers, 1987a, 1987b). Geleide heruitvinding, progressief mathematiseren en didactische fenomenologie zouden naar verwachting bruikbaar zijn bij het ontwikkelen van een hypothetisch leertraject voor het parameterbegrip en van onderwijsactiviteiten. Het onderscheid horizontaal-verticaal mathematiseren zou de verhouding duidelijk kunnen maken tussen contexten en de abstracte micro-wereld van de computeralgebra omgeving, die een top-down karakter heeft (Drijvers, 2000). Het idee van zich ontwikkelende modellen zou bruikbaar kunnen zijn voor het onderscheiden van niveaus van activiteiten. Zoals aangegeven in Fig. 1 onderscheidt Gravemeijer (1994, 1999) vier niveaus van wiskundige activiteit. Het idee van zich ontwikkelende modellen is dat modellen die in eerste instantie verwijzen naar een concrete context met betekenis voor de leerlingen, zich geleidelijk aan ontwikkelen tot algemene modellen voor redeneren binnen een wiskundig kader.



Figuur 1 Vier niveaus van wiskundige activiteit (Gravemeijer, 1994, 1999)

- *Niveautheorieën*
In de eerste onderzoeksdeelvraag is sprake van 'een hoger niveau van inzicht in het parameterbegrip'. Verschillende perspectieven kunnen duidelijk maken wat hieronder wordt verstaan. Ten eerste onderscheidt de niveautheorie van Van Hiele een nulde, eerste en tweede niveau van inzicht (Van Hiele, 1973, 1986). Dit onderscheid zou bruikbaar kunnen zijn om niveaus van inzicht in het parameterbegrip te definiëren. Een tweede benadering van niveaus is het hierboven beschreven idee van zich ontwikkelende modellen en niveaus van activiteit (zie Fig. 1). In wezen is het streven in dit onderzoek gericht op de overgang van het referentiële naar het generieke of algemene niveau.
- *Theorieën over 'symbol sense' en symboliseren*
De notie van symbol sense behelst het 'gevoel' voor algebraïsche entiteiten in het algemeen en het inzicht in formules in het bijzonder (Arcavi, 1994). In dit onderzoek is symbol sense gedefinieerd als het inzicht in de betekenis en de structuur van algebraïsche expressies en formules. Het werken met

parametrische formules in een computeralgebra omgeving vereist naar verwachting symbol sense, maar bevordert het ook.

Hoe wordt symbol sense verworven? Theorieën over symboliseren benadrukken de parallelle ontwikkeling van symbolen en betekenis door een significatieproces (Gravemeijer et al., 2000). Omdat het geven van betekenis aan algebraïsche technieken, formules en expressies zoals ze naar voren komen in de computeralgebra omgeving naar verwachting een belangrijk aspect van de instrumentatie is, leek het symboliseren een relevant perspectief voor dit onderzoek.

- *De proces-object dualiteit*

De proces-object dualiteit betreft het idee dat een wiskundig begrip als proces en als object beschouwd kan worden. Vaak ervaren leerlingen eerst de proceskant; op basis daarvan kunnen ze de objectkant ontwikkelen, die verdere conceptuele ontwikkeling vereist. Deze ontwikkeling heet reïficatie (Sfard, 1991) of inkapseling (Dubinsky, 1991) en resulteert in ‘proceptueel’ inzicht (Tall & Thomas, 1991). Deze theoretische inzichten hebben betrekking op het leren van wiskunde in het algemeen, maar kunnen worden toegepast op het leren van algebra.

In dit onderzoek was de reïficatie van expressies en formules van belang omdat het bij het ontwikkelen van het parameterbegrip nodig is om formules en expressies als objecten te beschouwen. Verder zou het werk in de computeralgebra omgeving de verhouding tussen proces en object kunnen beïnvloeden. De reïficatie van expressies en formules veronderstelt dat leerlingen het zogenaamde ‘lack of closure’ obstakel overwinnen. Dit obstakel houdt in dat leerlingen niet in staat zijn om expressies en formules als resultaat te beschouwen zolang deze nog operatoren bevatten; leerlingen willen dan bijvoorbeeld in $a+b$ of $x+3$ de optelling uitvoeren die wordt gesymboliseerd door de $+$ (Collis, 1975; Küchemann, 1981; Tall & Thomas, 1991). Reïficatie van formules en expressies betekent niet vanzelf reïficatie van functies; dat laatste is veelomvattender.

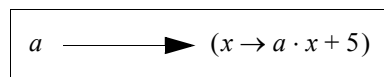
Een belangrijk theoretisch element in dit onderzoek is de instrumentele benadering van ICT-gebruik. Dit punt komt aan de orde in sectie 4.

3 Conceptuele analyse van het parameterbegrip

De conceptuele analyse van het parameterbegrip omvatte allereerst een onderzoek naar de historische ontwikkeling ervan. Essentieel in deze ontwikkeling was de overgang van syncopische naar symbolische algebra, die gekarakteriseerd wordt door het werk van Diophantus en Viète (Boyer, 1968; Harper, 1987). Waar Diophantus (rond het jaar 250) letters gebruikte om onbekenden aan te duiden, maar niet voor parameters, beschreef Viète (1540 - 1603) algemene, geparametriseerde oplossin-

gen. Viète onderscheidde onbekenden en parameters door het gebruik van klinkers en medeklinkers. Hij accepteerde expressies als oplossingen van algemene, parametrische vergelijkingen en beschouwde die als objecten. In dit onderzoek streefden we naar deze ‘sprong van Diophantus naar Viète’ ofwel van het verwijzende naar het algemene niveau (zie Fig. 1). Dat deze ontwikkeling veel tijd kostte in de geschiedenis kan als waarschuwing voor de complexiteit van deze stap worden opgevat.

De conceptuele analyse van het parameterbegrip leidde tot het beeld van de parametrische functie als een functie van de tweede orde. De korte pijl in Fig. 2 bijvoorbeeld geeft aan dat $x \rightarrow a \cdot x + 5$ voor een vaste waarde van de parameter a een (lineaire) functie in x is. Wanneer echter de waarde van a verandert, dan geeft de lange pijl in Fig. 2 een tweede orde functie aan, met de parameter als argument en de lineaire uitdrukking als functiewaarde (Bloedy-Vinner, 2001).



Figuur 2 De parameter als argument van een functie van de tweede orde

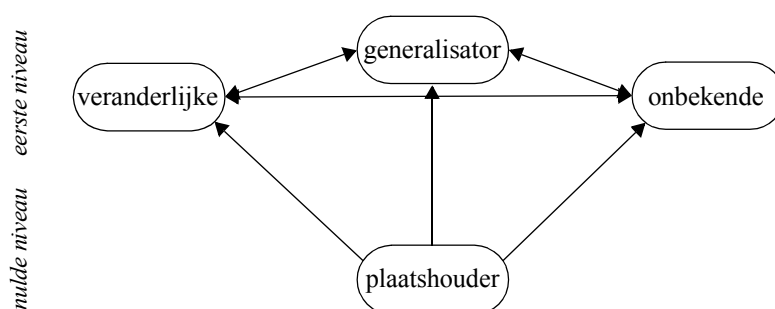
Als moeilijke aspecten van het parameterbegrip identificeerden we ten eerste deze hiërarchische relatie met ‘gewone’ variabelen, zoals weergegeven in Fig. 2 en in de uitdrukking ‘veranderlijke constante’. Een tweede moeilijkheid is het onderscheiden van de verschillende rollen die de parameter kan spelen, die bovendien kunnen veranderen tijdens het oplossingsproces.

De conceptuele analyse leidde tot het onderscheiden van vier parameterrollen, die vergelijkbaar zijn met overeenkomstige rollen van de gewone variabele:

- De parameter als *plaatshouder* staat voor een positie, een lege plaats, waar een numerieke waarde kan worden ingevuld of uitgehaald. De waarde in de ‘lege doos’ is vast – bekend of onbekend – en verandert niet. Dit beschouwen we als het nulde niveau van het parameterbegrip.
- Bij de parameter als *veranderlijke* wordt de parameterwaarde systematisch gevarieerd. De parameter krijgt het dynamische karakter van een ‘schuifparameter’ die vloeiend een referentieverzameling doorloopt (Van de Giessen, 2002). Deze variatie beïnvloedt de hele situatie, de formule als object en de globale grafiek, terwijl variatie van de gewone variabele slechts lokaal doorwerkt.
- De parameter als *generalisator* generaliseert over een klasse van situaties. Daardoor verenigt deze ‘familieparameter’ (Van de Giessen, 2002) zo’n klasse en representeert die. Deze generieke representatie maakt het mogelijk om ‘het algemene in het bijzondere’ te zien en om categorieën van problemen op een generiek niveau te formuleren en op te lossen. Deze algemene oplossing van alle concrete gevallen ineens door middel van een parameter veronderstelt de reïficatie van de expressies en formules die in het generieke oplossingsproces voorkomen.

- De parameter speelt de rol van *onbekende* wanneer de vraag is om specifieke gevallen uit de algemene parametrische representatie te selecteren op basis van een extra conditie of criterium. Dit veronderstelt vaak een wisseling van rol en hiërarchie (Bills, 2001).

De conceptuele analyse en het theoretisch kader leverden een manier om het hoger niveau van inzicht in het parameterbegrip te definiëren. Fig. 3 visualiseert deze niveaustructuur.



Figuur 3 Niveaus van inzicht in het parameterbegrip

In termen van de Van Hiele niveaus beschouwen we de plaatshouder als het nulde niveau van het parameter inzicht, dat de basis vormt voor het eerste niveau. De drie rollen van veranderlijke, generalisator en onbekende hebben als gemeenschappelijk kenmerk dat de formules die de parameter bevatten beschouwd moeten worden als objecten. Daarom zijn die onderdeel van het inzicht het eerste niveau. De belangrijkste van deze drie ‘hogere’ parameterrollen is de generalisator, aangezien generaliseren een kernactiviteit is in de algebra. Het beoogde hoger niveau van inzicht in het parameterbegrip bestaat dus uit de sprong van de plaatshouder naar de andere parameterrollen, ‘van Diophantus naar Viète’ of, in termen van het vierlagen model (Fig. 1) de overgang van het referentiële naar het algemene niveau. Het inzicht in de hogere parameterrollen vereist naar verwachting de reïficatie van parametrische expressies en formules (Gravemeijer et al., 2000).

4 De instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebra

De vraag is nu hoe het gebruik van computeralgebra kan bijdragen aan het verwerven van dit hogere niveau van inzicht in het parameterbegrip.

Om verschillende redenen veronderstelden we dat een computeralgebra omgeving kansen biedt voor het algebraonderwijs. In vergelijking met ander ICT-gereedschap voegt computeralgebra een compleet repertoire aan algebraïsche procedures en representaties toe. Doordat leerlingen bevrijd worden van algebraïsche berekeningen,

zou computeralgebra concentratie op begripsontwikkeling en probleemoplossen mogelijk maken. Het gebruik van een CAS zou leerlingen kunnen helpen concepten en vaardigheden te onderscheiden (Monaghan, 1993) en om de balans tussen die twee opnieuw vast te stellen (Heid, 1988; O'Callaghan, 1998).

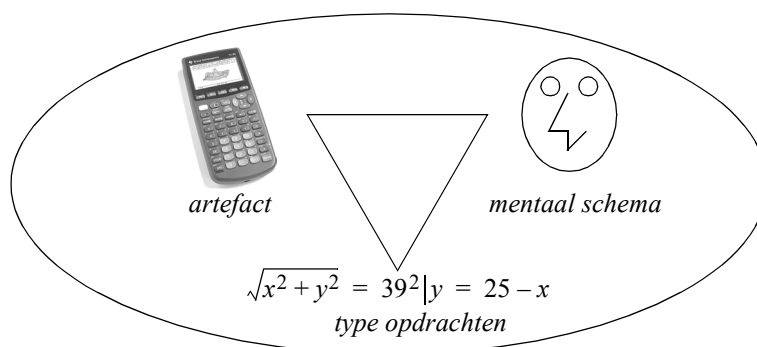
De integratie van computeralgebra in het algebraonderwijs zou ook risico's met zich mee kunnen brengen. Omdat het CAS 'alle algebra al bevat' zou het een wat abstract en formeel 'top-down' karakter kunnen hebben en mogelijk inflexibel zijn bij het hanteren van informele notatie en syntax. Verder zou het CAS voor leerlingen een 'black box' kunnen lijken, omdat het complexe procedures uitvoert op een manier die voor hen ondoorzichtig is. Een laatste risico is dat de computeralgebra omgeving een microwereld voor de leerlingen schijnt, die niet is verbonden met de wereld van realistische problemen of van wiskunde met pen-en-papier en het hoofd (Drijvers, 2000).

Met het oog op het inzicht in het parameterbegrip zijn de volgende mogelijkheden van computeralgebra onderkend. Ten eerste verwachtten we dat het gebruik van computeralgebra de reïficatie van algebraïsche expressies en formules bevordert, doordat expressies optreden als oplossingen van parametrische vergelijkingen die vervolgens gesubstitueerd worden. Ten tweede veronderstelden we dat het genereren van voorbeelden door algebraïsche exploratie aanleiding zou zijn voor generalisatie over de situatie om zo een opening te bieden voor de parameter als generalisator. Ten derde zou de flexibiliteit van computeralgebra ten aanzien van lettersymbolen en hun rollen van pas kunnen komen bij de blikwisseling die optreedt bij de parameter als onbekende. Als laatste punt, hoewel niet exclusief voor computeralgebra omgevingen, werd verondersteld dat de beschikbaarheid van een schuifbalk het inzicht in de parameter als veranderlijke zou ondersteunen.

Voor de uitvoering van de onderwijsexperimenten moest een specifieke computeralgebra omgeving worden gekozen. Om praktische redenen hebben we de 'hand-held' TI-89 symbolische rekenmachine gekozen. Dit apparaat zouden de leerlingen permanent – zowel op school als thuis – ter beschikking hebben en zou niet nopen tot verandering van de organisatie van de lessen. De beperkte schermresolutie zou kunnen worden ondervangen door enkele lessen in het computerlokaal te houden, waarbij het softwarepakket TI-Interactive gebruikt zou kunnen worden. We hoopten dat het individuele karakter van de rekenmachine de samenwerking tussen leerlingen niet zou verhinderen en dachten dat te ondervangen door de leerlingen in tweetallen te laten werken.

Zoals al aangekondigd in de beschrijving van het theoretisch kader, functioneerde de instrumentele benadering van het gebruik van computeralgebra als kader voor het begrijpen en interpreteren van de interactie tussen leerling en machine. De kerngedachte van instrumentele benadering van het gebruik van ICT-gereedschap is dat een 'kaal' stuk gereedschap, een artefact, niet vanzelf een bruikbaar instrument is. Bij het hanteren van zulk gereedschap ontwikkelt de gebruiker mentale schema's, sche-

ma's van geïnstrumenteerde actie, of kortweg instrumentatieschema's (Artigue, 1997, 2002; Guin & Trouche, 1999, 2002; Lagrange, 2000; Trouche, 2000). Een instrument, in deze optiek, bestaat uit (een deel van) het artefact, het mentale schema en het type taken waar de schema's betrekking op hebben (Fig. 4).



Figuur 4 Het instrument als driehoek artefact - mentaal schema - taak

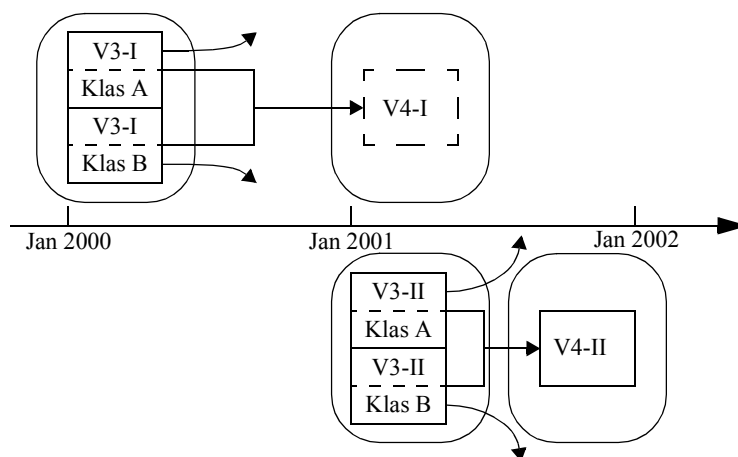
In deze instrumentatieschema's zijn technische vaardigheden en conceptuele inzichten geïntegreerd; moeilijkheden met het ontwikkelen van zulke schema's, de zogenaamde instrumentele genese, hebben vaak betrekking op beide aspecten. Omdat we niet 'in de hoofden van leerlingen kunnen kijken' om de mentale schema's te observeren, hebben we ons gericht op de technieken die we beschouwen als de observeerbare kant van de instrumentatieschema's: de collectie procedures in de computer-algebra omgeving die de leerling gebruikt om een bepaald type problemen op te lossen.

In dit onderzoek is de instrumentele benadering gebruikt als kader om de interactie tussen leerling en computer-algebra omgeving te onderzoeken. Door de combinatie van technische en conceptuele aspecten binnen het instrumentatieschema leek deze theorie veelbelovend, omdat ze uitstijgt boven het wat naïeve idee van 'vaardigheden terugdringen, begripvorming benadrukken' en omdat ze de moeilijkheden van de instrumentele genese serieus neemt.

5 Methodologie

In dit onderzoek is de methode van ontwikkelingsonderzoek gebruikt. Ontwikkelingsonderzoek richt zich op het ontwikkelen van theorieën over en empirisch onderbouwd inzicht in 'hoe leren werkt' (Research Advisory Committee, 1996). Het belangrijkste doel is het begrijpen van het leren van de leerling. Dit komt overeen met het karakter van onze onderzoeksvragen, die immers beginnen met 'Hoe kan...' en niet met 'Kan...'. Een karakteristiek van ontwikkelingsonderzoek is het belang dat wordt gehecht aan het ontwerpen van onderwijsactiviteiten, dat gezien

wordt als betekenisvol onderdeel van de onderzoeksmethode omdat het de onderzoeker dwingt zijn keuzes, hypothesen en verwachtingen te expliciteren (Edelson, 2002). Een tweede belangrijk kenmerk van ontwikkelingsonderzoek is het bijstellen van het leertraject in de loop van het onderzoek. Op basis van eerdere ervaringen worden de onderwijssequentie en de experimentele condities aangepast. Dit maakt ontwikkelingsonderzoek bijzonder geschikt voor dit project, aangezien een volledig theoretisch kader nog niet beschikbaar was en hypothesen ontwikkeld dienden te worden. Het aanpassen van de experimentele situatie is mogelijk door het cyclische karakter van ontwikkelingsonderzoek. Een macrocyclus bestaat uit een voorbereidende fase, die in dit onderzoek de ontwikkeling van een hypothetisch leertraject omvat en het ontwerp van onderwijsactiviteiten), een onderwijsexperiment en een retrospectieve fase waarin de data-analyse plaatsvindt en die leidt tot 'feed-forward' voor de volgende onderzoekscyclus (Gravemeijer, 1994).



Figuur 5 Arrangement van onderzoekscycli en onderwijsexperimenten

In dit onderzoek zijn drie onderzoekscycli uitgevoerd, aangegeven met V3-I, V3-II en V4-II, en een tussencyclus, V4-I. De onderwijsexperimenten van de V3-cycli vonden plaats in vwo-3 klassen en die van de V4-cycli in vwo-4. De I en II slaan op de cohorten leerlingen die in de cyclus betrokken waren. De V4-I populatie was (op een enkele uitzondering na) een deelverzameling van de V3-I populatie en hetzelfde gold voor het tweede cohort leerlingen (zie Fig. 5).

We lichten nu kort de verschillende fasen binnen een onderzoekscyclus toe. In de *voorbereidende fase* werd een hypothetisch leertraject (HLT) ontwikkeld (Simon, 1995). Dit houdt in dat het aanvangsniveau werd vastgesteld, dat het einddoel werd geformuleerd en dat een sequentie van mentale stappen die tot dat doel leiden is onderscheiden, samen met onderwijsactiviteiten die naar verwachting die stappen te-

weeg brengen. Hierbij is beschreven waarom deze activiteiten geacht worden te werken en welk soort mentale ontwikkeling daarmee wordt beoogd. Vanwege de nadruk op mentale ontwikkeling en op het motiveren van de verwachte effecten door de onderzoeker was het HLT een bruikbaar instrument om de ontwikkeling van hypothese bij te houden en het denken van de onderzoeker in kaart te brengen.

De ontwikkeling van een HLT was nauw verweven met het ontwerp van onderwijsactiviteiten, dat plaatsvond aan de hand van ontwerpheuristischeken zoals geleide heruitvinding, didactische fenomenologie en bemiddelende modellen. Daarbij zijn kernopgaven geselecteerd, die zouden kunnen dienen als ijkpunten voor de mentale ontwikkeling van de leerlingen in relatie tot het HLT; ook zijn vragen opgesteld om leerlingen te stellen bij deze ijkpuntopgaven en is een a priori coderingssysteem voor observatie ontwikkeld.

De tweede fase van een cyclus in het ontwikkelingsonderzoek is die van het *onderwijsexperiment* (Steffe, 1983; Steffe & Thompson, 2000). Tijdens de onderwijsexperimenten lag de nadruk op data die het leerproces weergeven en inzicht konden geven in het denken van de leerlingen. De belangrijkste bronnen daarvoor waren observaties van leerlingengedrag en korte interviews met leerlingen. De meeste lessen zijn geobserveerd door twee observatoren die aantekeningen maakten op observatieformulieren. De ijkpuntopgaven werden onderzocht door middel van ‘mini-interviews’ met een deel van de leerlingen; videoregistraties zijn gemaakt van klassengesprekken en van enkele geselecteerde tweetallen leerlingen terwijl ze aan het werk waren. Schriftelijk materiaal (schriften, voortoets en natoets) is verzameld van alle leerlingen. In totaal zijn 110 leerlingen bij de onderwijsexperimenten betrokken geweest en zijn meer dan 100 lessen geobserveerd.

Een onderzoekscyclus eindigt met de *retrospectieve* fase. Een eerste stap hierin was de selectie en analyse van de gegevens. De aanvankelijke analysemethode was geïnspireerd op de constante comparatieve methode (Glaser & Strauss, 1967; Strauss, 1987; Strauss & Corbin, 1998). De eerste bevindingen hieruit leidden tot aanpassing van het a priori ontworpen coderingssysteem. Vervolgens werden de gegevens gecodeerd. Dit gebeurde voor een deel door twee onderzoekers, om zo een intersubjectieve overeenstemming te bereiken. De conclusies van de data-analyse werden vertaald in feed-forward voor de volgende onderzoekscyclus. Deze feed-forward betrof aanpassingen van het HLT, van de onderwijsactiviteiten of veranderende aandachtspunten voor het volgende onderwijsexperiment.

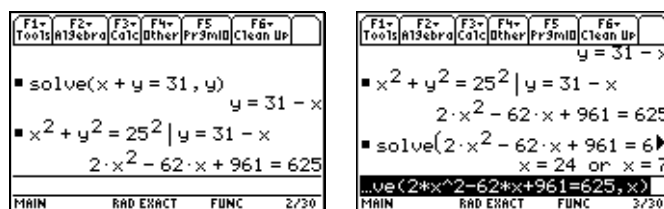
6 De drie onderzoekscycli

Fig. 5 geeft het arrangement van de onderzoekscycli weer. Deze sectie beschrijft kort elk van de cycli en de onderwijsexperimenten daarbinnen in het bijzonder. Deze onderwijsexperimenten vonden plaats op een school in Bilthoven.

De eerste onderzoekscyclus, V3-I, omvatte een onderwijsexperiment in twee vwo-3 klassen met leerlingen van 14-15 jaar oud. De experimenten duurden vijf weken met

vier lessen wiskunde per week. In het HLT voor deze experimenten kwamen de parameterrollen voor in de volgorde plaatshouder-generalisator-veranderlijke-onbekende. De onderwijsactiviteiten waren beschreven in twee pakketten, ‘Introductie TI-89’ dat beoogde de leerlingen vertrouwd te maken met de TI-89 symbolische rekenmachine en ‘Veranderlijke algebra’ dat gericht was op de ontwikkeling van inzicht in het parameterbegrip.

De resultaten toonden aan dat generalisatie werd gehinderd door instrumentatieproblemen, in het bijzonder bij het schema voor het oplossen van stelsels vergelijkingen. Fig. 6 toont dit schema van isoleren-substitueren-oplossen, afgekort tot ISO, voor het stelsel $x + y = 31$, $x^2 + y^2 = 25^2$.



Figuur 6 Het schema isoleren-substitueren-oplossen op de TI-89

In sommige gevallen hadden de leerlingen geen behoefte aan generalisatie, of had de generalisatie het oppervlakkige karakter van patroonherkenning zonder intrinsieke betekenis. De parameter als veranderlijke werd beter begrepen, hoewel een optie voor het visualiseren van de dynamiek op de TI-89 werd gemist. Aan de parameter als onbekende is niet veel aandacht besteed. De rolwisseling die dit vroeg was moeilijk voor de leerlingen. Het substitueren van expressies en het voorkomen van expressies als oplossingen van geparametriseerde vergelijkingen bevorderde de reïficatie van expressies en het overwinnen van het ‘lack of closure’ obstakel. De resultaten van de eindtoets bevestigden dat de generalisatie en het toepassen van het ISO-schema de twee grootste hindernissen waren voor de leerlingen.

De feed-forward van de V3-I onderzoekscyclus hield onder meer een herordening in van de globale leerlijn door de parameterrollen; die werd gewijzigd in de volgorde plaatshouder-veranderlijke-generalisator-onbekende, om de generalisatie uit te stellen tot een dynamische en hiërarchische kijk op het parameterbegrip was ontwikkeld. Daarom is ook gezocht naar een betere manier om de dynamiek van de schuifparameter op het scherm van de TI-89 in beeld te brengen. Om de instrumentatieproblemen te beperken, zijn in het lesmateriaal meer oefeningen met elementaire schema’s voor oplossen en substitueren opgenomen door deze te integreren in het samengestelde ISO-schema.

Het onderwijsexperiment van de tweede onderzoekscyclus, V3-II, is uitgevoerd in het tweede cohort van twee vwo-3 klassen. De opzet was vergelijkbaar met die van

V3-I. Het experiment duurde vijf weken van vier lessen per week. Het HLT volgde de lijn die uit de feed-forward van V3-I naar voren was gekomen. Het beeld van de parameter als veranderlijke werd ondersteund door twee TI-89 programma's die voor dit doel ontwikkeld waren, SCHIET en SCHUIF. De leerlingentekst bestond weer uit een deel gericht op de kennismaking met de TI-89 en een deel gericht op het inzicht in het parameterbegrip.

De resultaten toonden aan dat het begrip van de parameter als veranderlijke inderdaad werd bevorderd door de programma's SCHIET en SCHUIF, hoewel sommige leerlingen de parameter beschouwden als lopend door gehele waarden. De nieuwe volgorde in het leertraject, waarin de parameter als veranderlijke eerder aan de orde komt, was een verbetering ten opzichte van de lijn van V3-I. Voor wat betreft generalisatie kwamen vergelijkbare moeilijkheden aan het licht als in V3-I, zij het in mindere mate. Ondanks de aandacht besteed aan elementaire instrumentatieschema's voor oplossen en substitueren veroorzaakte het samengestelde ISO-schema nog steeds moeilijkheden. Ook hadden de leerlingen regelmatig geen behoefte aan generalisatie, misschien vanwege de abstracte en complexe probleemsituaties. De parameter als onbekende is meer aan de orde geweest dan in V3-I, maar de complexiteit van de probleemsituaties maakte dat de leerlingen niet in staat waren de grote lijn van de oplossingsstrategie te doorzien en de veranderende rol van de parameter daarin.

De resultaten van de eindtoets bevestigden deze bevindingen, hoewel de uitvoering van het ISO-schema en de generalisaties met parameters iets verbeterd waren ten opzichte van de resultaten van V3-I. Na de eindtoets zijn eindinterviews gehouden met negentien leerlingen. De resultaten van deze interviews, waarbij de leerlingen geen technologie gebruikten, suggereerden transfer van substitutie van expressies als computeralgebra techniek naar substitutie als pen-en-papier techniek en een verbeterde reïficatie van expressies. De leerlingen waren bijvoorbeeld in staat om $y = a - x$ met de hand in $x^2 + y^2 = 10$ te substitueren. Een van hen gebruikte daarbij de TI-89 notatie voor substitutie (Fig. 7).

$$\begin{array}{l} y = a - x \\ \hline x^2 + y^2 = 10 \end{array} \Big| y = a - x$$

Figuur 7 Transfer van notatie

Als feed-forward van de V3-II onderzoekscyclus concludeerden we dat het globale HLT langs de lijn plaatshouder-veranderlijke-generalisator-onbekende adequaat was en geen verdere wijziging behoefde. Voor de parameter als veranderlijke zou het gebruik van een continue schuifbalk wellicht het idee van een discrete referentieverzameling kunnen vermijden. De bevindingen suggereerden dat de parameter als gene-

ralisator beter aan de orde kan komen zonder de complicatie van het ISO-schema. Dat betekende dat probleemsituaties gezocht moesten worden die met één vergelijking in plaats van een stelsel van twee vergelijkingen konden worden opgelost. Verder richtten de probleemsituaties in V3-II zich te direct op het generale niveau. Het gebruik van realistische contexten, waarin de parameter op het referentiële niveau betekenis heeft voor de leerlingen, zou wellicht kunnen leiden tot eenvoudiger en meer betekenisvolle generalisaties. Grafieken zouden ook als context kunnen functioneren en zouden bruikbaar kunnen zijn bij de overgang van de parameter als veranderlijke naar de generalisator. Het gebruik van realistische contexten zou de parameter als onbekende ook op een meer natuurlijke manier kunnen benaderen.

In de V4-I tussencyclus vond een kort onderwijsexperiment van vijf lessen plaats in vwo-4 wiskunde B. Alle leerlingen op één na hadden ook deelgenomen in V3-I. Vanwege een gebrek aan lestijd en een te vol regulier programma was deze tussencyclus eerder een vingeroefening voor V4-II dan een volledige onderzoekscyclus. De bevindingen waren dat de leerlingen de TI-89 vaardigheden die ze een jaar tevoren hadden geleerd snel weer oppakten. Eens te meer werd duidelijk dat een schuifbalk voor de parameter als veranderlijke te prefereren zou zijn boven het vervangen van parameterwaarden door substitutie.

In de derde en laatste volledige onderzoekscyclus, V4-II, vond een onderwijsexperiment plaats van vijftien lessen in vwo-4 wiskunde B. Alle leerlingen met uitzondering van twee doubleurs hadden ook aan het V3-II onderwijsexperiment deelgenomen.

Overeenkomstig de feed-forward van V3-II is in V4-II de globale leerlijn van plaatshouder-veranderlijke-generalisator-onbekende aangehouden. Voor de parameter als veranderlijke is de continue schuifbalk van het softwarepakket TI-Interactive gebruikt. Meer dan in voorgaande experimenten kwamen realistische contexten aan de orde waarin parameters en formules betekenis hadden en die op een meer natuurlijke manier tot generalisatie uitnodigden. De verwachting was dat dit ook het inzicht in de parameter als onbekende ten goede zou komen.

De resultaten toonden aan dat het gebruik van de continue schuifbalk inderdaad het beeld van de parameter als veranderlijke door een continuüm verbeterde. Contexten waarin de parameter een evidente betekenis had in de grafiek maakten generalisaties betekenisvol. Realistische contexten leidden ook tot een beter inzicht in de betekenis en structuur van formules en expressies. Toch was het invoeren van gebroken expressies en uitdrukkingen met exponenten moeilijk, evenals het herkennen van equivalente expressies. Doordat de probleemsituaties leidden tot één in plaats van twee vergelijkingen werden de moeilijkheden met het ISO-instrumentatieschema vermeden. Wellicht ook als gevolg van de betekenisvolle probleemsituaties kwam de parameter als onbekende met meer succes aan de orde dan in de voorafgaande experimenten, al leek de complexiteit van de formules hierbij een cruciale factor.

De resultaten van de eindopdracht van V4-II waren positief. Veel goede generalisa-

ties werden gemaakt en de leerlingen konden in het algemeen goed overweg met (delen van) de complexe formules. De realistische probleemsituatie van de snelheid van een file hielp de leerlingen om betekenis aan de uitkomsten te geven.

7 Het gebruik van computeralgebra en het parameterbegrip

De eerste onderzoeksdeelvraag betreft de bijdrage van het gebruik van computeralgebra aan het hoger niveau van inzicht in het parameterbegrip. Dit hoger niveau van inzicht was gedefinieerd als inzicht in de hogere parameterrollen van veranderlijke, generalisator en onbekende. We vatten de resultaten op dit punt samen.

Zoals verwacht op basis van de conceptuele analyse, was het plaatshouder-beeld van de parameter voor vrijwel alle leerlingen het startniveau. De computeralgebra omgeving droeg bij aan het uitbreiden van het parameterbegrip met de rol van *veranderlijke* door de mogelijkheid om de parameter steeds een andere waarde te geven. Het onderzoeken van het dynamische effect van verandering van de ‘schuifparameter’ met behulp van een schuifbalk – niet exclusief voor computeralgebra – bleek echter meer effect te sorteren. Dit leidde tot het inzicht dat verandering van de parameterwaarde verandering van de grafiek als geheel tot gevolg had, een verandering ‘van de tweede orde’. Als de parameter voor de leerling een betekenis had in de context of als grafische eigenschap, dan nodigde het onderzoek van de dynamische grafiek uit tot algebraïsche verificatie en generalisatie. Het gevaar van oppervlakkige waarneming zonder reflectie of verificatie was echter aanwezig. Verder domineerde de parameter als veranderlijke het parameter-beeld van de leerlingen, zodat ze de andere parameterrollen soms leken te vergeten. Al met al was een hoger niveau van inzicht in de parameter als veranderlijke bereikt.

Het werk in de computeralgebra omgeving bevorderde de overgang naar de parameter als *generalisator* door herhaling van dezelfde procedure voor verschillende parameterwaarden mogelijk te maken. Dit genereerde voorbeelden die de basis vormden voor generalisatie en voor het oplossen van parametrische vergelijkingen.

Het feit dat de parametrische vergelijkingen leidden tot expressies in plaats van numerieke oplossingen, bevorderde de reïficatie van formules en expressies en het overwinnen van het ‘lack of closure’ obstakel. De dynamische grafieken die voortkwamen uit het werk met de schuifparameter leidde in sommige gevallen tot generalisaties, bijvoorbeeld in het geval van de grafiek van $y = (x - a)^2 + a$. Een tweetal leerlingen zag dat de top van de grafiek coördinaten (a, a) had voor alle waarden van a . Een van hen zei ‘de top is in a ’ en ‘ y - en x -coördinaat zijn hetzelfde als a ’. Later, in een klassengesprek, legde de andere leerling van het tweetal de generalisatie uit door naar een voorbeeldmatige parameterwaarde te verwijzen.

Maria: Ja volgens mij die top dat waren de x - en y -coördinaten, die waren zeg maar gelijk aan de a . De top was $(1, 1)$ en dan was a ook 1 .

Veel leerlingen bereikten het hoger niveau van inzicht in de parameter als generalisator slechts in beperkte mate. In sommige gevallen hadden de leerlingen geen behoefte aan generalisatie. In andere gevallen kwam generalisatie neer op fenomenologische patroonherkenning zonder intrinsiek begrip. De onderwijsactiviteiten waren te direct gericht op het algemene niveau en de formules waren in sommige opgaven te complex. Instrumentatieproblemen bemoeilijkten de generalisatie. De essentiële stap van het generaliseren van relaties, waarbij parameters gebruikt worden om een klasse van situaties te verenigen, bleek primair een mentale te zijn waaraan computeralgebra niet zo veel bijdroeg.

De mogelijkheid om in de computeralgebra omgeving vergelijkingen op te lossen naar elke onbekende, vergrootte de flexibiliteit van de leerlingen ten aanzien van de rollen van de lettervariabelen. De resultaten betreffende de parameter als *onbekende* waren wisselend: in eenvoudige gevallen werd deze parameterrol begrepen, terwijl de leerlingen in ingewikkelder gevallen de veranderende rollen en de betekenissen van variabelen en parameters niet meer uit elkaar konden houden. De verandering in hiërarchie tussen variabele en parameter was in complexe situaties moeilijker te doorzien.

Twee kwesties leken de ontwikkeling van een hoger niveau van inzicht in het parameterbegrip te beïnvloeden: het gebruik van realistische probleemsituaties en het inzicht in de betekenis en structuur van expressies en formules. Het belang van *realistische probleemsituaties* is al eerder genoemd. In tegenstelling tot onze oorspronkelijke ideeën maakte het gebruik van een computeralgebra omgeving referenties naar de werkelijkheid buiten die omgeving voor leerlingen van deze leeftijd en dit niveau niet overbodig. De directe gerichtheid op het generale niveau werkte niet, omdat de leerlingen nog geen adequaat wiskundig relatienet hadden ontwikkeld. In plaats daarvan hadden ze een realistische probleemsituatie nodig waaraan de parameters, expressies en formules betekenis ontleenden op een referentieel niveau. Deze realistische probleemsituaties stonden generalisatie en abstractie die uitsteeg boven de context niet in de weg.

Door de aanwezigheid van parameters waren de *expressies en formules* die de leerlingen in het lesmateriaal tegenkwamen complexer dan gewoonlijk. De CAS output, algebraïsch of grafisch, nodigde uit tot een nadere beschouwing van de formules en expressies die daarin voorkwamen, vooral als dit werd gesuggereerd door het lesmateriaal of door de docent. Het invoeren van complexe formules vereiste inzicht in de algebraïsche structuur. Daarom was inzicht in de betekenis en structuur van expressies en formules aan de ene kant een obstakel tijdens het werk met het CAS, maar werd het er aan de andere kant door bevorderd. Het werk in de computeralgebra omgeving ondersteunde de ontwikkeling van symbol sense, de reïficatie van formules en expressies en het overwinnen van het lack of closure obstakel.

De globale conclusie is dan ook dat het gebruik van computeralgebra inderdaad kan bijdragen aan het ontwikkelen van het hoger niveau van inzicht in het parameterbe-

grip. Voor de parameter als veranderlijke was deze bijdrage evidentier dan voor de parameter als generalisator en als onbekende. Verder werd de reïfificatie van expressies en formules bevorderd en waren realistische startpunten onmisbaar voor betekenisvol werk in de computeralgebra omgeving.

Verschillende factoren zouden het beoogde leerproces verder kunnen optimaliseren. Ten eerste suggereren de data dat het vruchtbaar zou kunnen zijn om de verschillende parameterrollen te integreren in plaats van ze sterk te scheiden, zodat de leerlingen een meer geïntegreerd beeld van de parameter ontwikkelen. Ten tweede is al opgemerkt dat modellen die verwijzen naar concrete probleemsituaties bij leerlingen van deze leeftijd en niveau tot betere resultaten leiden dan abstractere en algemenere modellen. Ten derde zou computeralgebra naar verwachting meer bijdragen aan de conceptuele ontwikkeling als het voor een langere periode wordt gebruikt, zodat instrumentatieproblemen minder dominant zijn. Ten slotte zouden naar verwachting klassengesprekken, geleid door de docent, de collectieve conceptuele ontwikkeling meer hebben kunnen bevorderen. De docenten beschouwden de cohorten in de onderwijsexperimenten als zwakke cohorten. Mogelijk zouden deze groepen gebaat zijn geweest bij meer sturing.

De moeilijkheden waar leerlingen bij het werken met het CAS tegenaan liepen suggereren dat het instrumentatieproces van belang is. Dat is het onderwerp van de volgende sectie.

8 De instrumentatie van computeralgebra

De tweede onderzoeksdeelvraag heeft betrekking op de instrumentatie van computeralgebra en op de relatie tussen computeralgebra technieken en conceptuele ontwikkeling. Deze sectie vat de resultaten op dit punt samen.

Als enkelvoudige instrumentatieschema's zijn het oplossingschema en het substitutieschema onderzocht. Voor beide schema's, die samenhangen met het parameterbegrip, hield de instrumentele genese een uitbreiding in van het inzicht. Voor het *oplossingschema* leidden de syntax en de toepassing op parametrische vergelijkingen ertoe dat leerlingen zich realiseerden dat een vergelijking altijd wordt opgelost naar een onbekende, dat het oplossen van een parametrische vergelijking betekent dat een variabele wordt uitgedrukt in de andere en dat de oplossing in dat geval een expressie is. Bij het *substitutieschema* leidde het substitueren van expressies in de computeralgebra omgeving ertoe dat leerlingen zich realiseerden dat alleen geïsoleerde vormen kunnen worden gesubstitueerd en dat expressies als 'dingen' kunnen worden beschouwd die 'in een variabele kunnen worden geplakt'. Overeenkomstig de ideeën van Sfard bevorderde de operatie op de expressies het objectkarakter (Sfard, 1991).

Hoewel de instrumentele genese van het oplossingschema en het substitutieschema vlot leek te verlopen, veroorzaakte het combineren van deze elementaire schema's in het samengestelde schema *isoleren-substitueren-oplossen* hardnekkige moeilijk-

heden. Dit geeft aan dat de integratie van enkelvoudige schema's in meeromvattende schema's een beheersing op hoog niveau van die elementaire schema's vraagt. De instrumentele genese had kennelijk meer tijd nodig dan de leerlingen gegeven werd. Een aantal obstakels stond de instrumentele genese in de weg, zoals de omgang van het CAS met numerieke benaderingen en exacte algebraïsche resultaten, de moeilijkheden met het invoeren van expressies die parameters, wortels en machten bevatten, en het interpreteren van de resultaten. Het herkennen van de equivalentie van CAS output en verwachte resultaten was een bijzonder lastige kwestie. Veel van deze obstakels hielden verband met een gebrek aan symbol sense, maar konden ook leiden tot de ontwikkeling daarvan. Door een gebrek aan inzicht in de structuur van expressies en formules maakten de leerlingen fouten bij het werk in de computeralgebra omgeving, maar deze problemen leidden ook tot een nadere blik op deze structuren. In die zin brachten de obstakels ook kansen voor het leren met zich mee, als de docent daar adequaat mee omging.

Sommige van de geobserveerde moeilijkheden met het invoeren van expressies en het interpreteren van algebraïsche uitkomsten hingen samen met het werken met pen-en-papier zoals leerlingen dat gewend waren. Incongruentie tussen computeralgebra techniek en pen-en-papier techniek verklaarde een deel van de instrumentatieproblemen. Wanneer de technieken in beide media wel congruent waren, vond transfer van notatie, strategie en techniek plaats. Een expliciete vergelijking van computeralgebra techniek en pen-en-papier techniek was effectief om leerlingen de mate van congruentie vast te laten stellen. Een tweede voorwaarde voor transfer was de transparantie van de computeralgebra technieken; als leerlingen konden begrijpen hoe het CAS aan de uitkomsten was gekomen en het niet als een 'black box' beschouwden, kon transfer naar het werk met pen-en-papier plaatsvinden. Uit de gegevens bleek verder dat leerlingen verschillende voorkeuren ontwikkelden ten aanzien van werk met pen-en-papier versus werk in de computeralgebra omgeving.

De docent speelde een belangrijke rol in de instrumentele genese. Verschillend gedrag van de docent leidde tot verschillende instrumentatietechnieken. Demonstraties in de klas en klassengesprekken bepaalden de collectieve instrumentatie; dit aspect van instrumentatie had meer aandacht verdiend in de onderwijsexperimenten. Verder moest een nieuw didactisch contract worden vastgesteld ten aanzien van de verhouding tussen werken met-de-hand en werken met de machine en ten aanzien van grafisch-numerieke methoden en algebraïsche methoden. Het feit dat de integratie van computeralgebra nieuw was voor de docenten – en ook van tijdelijke aard – maakte het moeilijk om zo'n nieuw didactisch contract vast te stellen en om een collectieve instrumentele genese te bewerkstelligen.

Al met al suggereren de resultaten van dit onderzoek een nauwe wederzijdse relatie tussen CAS techniek en conceptueel inzicht. Leerlingen moesten instrumentatieschema's opbouwen die technische en conceptuele aspecten combineerden. Deze instrumentele genese kostte tijd en moeite, waarbij obstakels overwonnen moesten wor-

den. Op het oog technische moeilijkheden bleken vaak samen te hangen met hiaten in het inzicht. Pen-en-papier methodes speelden hierin ook een rol. Voor het onderwijs is het dan ook aan te bevelen om een nieuw didactisch contract te ontwikkelen, om collectieve instrumentatie teweeg te brengen door middel van klassengesprekken en demonstraties en om congruentie en incongruentie tussen pen-en-papier en CAS techniek tot onderwerp van gesprek te maken.

9 Algebra leren en het gebruik van computeralgebra in het algemeen

In deze sectie bespreken we eerst de conclusies ten aanzien van de onderzoekshoofdvraag. Dan volgt een reflectie op het onderzoek en we besluiten met enkele aanbevelingen.

Conclusies

De centrale onderzoeksvraag van dit onderzoek betreft de bijdrage van het gebruik van computeralgebra aan het inzicht in algebraïsche concepten en operaties in het algemeen. Door de antwoorden op de onderzoeksdeelvragen te extrapoleren naar dit algemenere niveau zijn de volgende conclusies getrokken.

Ten eerste betreffen sommige bevindingen niet het inzicht in het parameterbegrip maar blijkt dat het gebruik van computeralgebra kan bijdragen aan het inzicht in algebraïsche begrippen en operaties in het algemeen. De leerlingen ontwikkelden symbol sense en inzicht in de structuur en betekenis van formules en expressies. Algebraïsche notaties werden uitgebreid. Computeralgebra bood mogelijkheden om verschillende representaties te combineren, procedures te herhalen als voorbereiding op generalisatie, en expressies als objecten te behandelen. Bepalend voor het effect van deze kansen waren de didactische inbedding en het gebruik van betekenisvolle formules die voortkwamen uit realistische probleemsituaties, in plaats van direct te verwijzen naar het algemene niveau.

Ten tweede is geconstateerd dat de instrumentele genese van CAS instrumentatieschema's, mits adequaat georkestreerd, ook conceptuele ontwikkeling met betrekking tot algebra in het algemeen met zich meebracht. De ontwikkeling van het oplossen substitutieschema leidde tot nieuwe inzichten in het oplossen en substitueren. Incomplete instrumentatie stond het leren in de weg, maar instrumentatieobstakels boden ook kansen voor het leren. Conditie die de instrumentatie bevorderden waren de congruentie tussen CAS techniek, mentaal beeld en pen-en-papier techniek en de transparantie van de CAS procedures. Dit bleken lastige voorwaarden te zijn, aangezien een aantal CAS procedures niet transparent was voor de leerlingen en omdat CAS notaties en syntax afweken van wat de leerlingen gewend waren vanuit hun pen-en-papier ervaring.

Als we deze bevindingen vergelijken met de aanvankelijke verwachtingen, blijkt dat de instrumentatiemoeilijkheden hardnekkiger waren dan verwacht en dat de rol van

de docent belangrijker was dan voorzien. Verder bleken onze ideeën om direct naar het algemene in plaats van het referentiële niveau te streven niet haalbaar en konden realistische probleemsituaties als beginpunt niet worden gemist. Wat leerlingen als realistisch ervaren is afhankelijk van hun leeftijd en niveau: we nemen dan ook aan dat de computeralgebra omgeving voor oudere leerlingen, die op een hoger niveau wiskunde leren, eerder als realistische omgeving op zichzelf wordt ervaren.

Reflectie

Wat kunnen we terugkijkend op dit onderzoek zeggen over de rol van theorie, over de gebruikte methodologie en over de generaliseerbaarheid van de resultaten? We lopen eerst de elementen van het theoretisch kader langs.

De *domein-specifieke onderwijstheorie van Realistisch Wiskundeonderwijs* hielp ons om te begrijpen waarom de leerlingen realistische probleemsituaties nodig hadden als startpunt: de leerlingen hadden nog geen geschikt wiskundig netwerk van algebraïsche objecten en procedures ontwikkeld. Het onderscheid tussen het referentiële en het algemene niveau (zie Fig. 1) verhelderde onze doelen en tevens de moeilijkheden die leerlingen hadden. De noties van horizontaal en verticaal mathematiseren maakten duidelijk waarom generalisatie en abstractie in veel gevallen niet uit de verf kwamen. Ten slotte kwam de RME van pas bij het begrijpen van het probleem van het ‘black box’ karakter van het gebruik van een CAS.

De *niveaustheorieën* fungeerden op de achtergrond bij het definiëren van het hoger niveau van inzicht in het parameterbegrip en hielpen bij het ontwerp van het leertraject en de onderwijsactiviteiten.

We hebben *symbol sense* gedefinieerd als inzicht in de structuur en betekenis van formules en expressies. In die interpretatie vormde symbol sense een manier om de omgang van leerlingen met formules en expressies in de computeralgebra omgeving te interpreteren: symbol sense was een voorwaarde voor productief gebruik van een CAS, maar kon zich ook van daaruit ontwikkelen. Wel zouden we willen suggereren dat het begrip symbol sense nauwkeuriger wordt gedefinieerd.

Theorieën over symboliseren maakten duidelijk dat het karakter van de computeralgebra omgeving en de aanvankelijke keuzes van dit onderzoek niet veel ruimte boden voor een ‘bottom-up’ significatieproces. Anderzijds leidde de instrumentatie van computeralgebra tot het ontwikkelen van betekenisvolle wiskundige objecten en een netwerk van wiskundige relaties dat verbonden was met de symbolen en expressies die de leerlingen in de computeralgebra omgeving tegenkwamen. De relatie tussen de instrumentele benadering en theorieën over symboliseren verdient nader onderzoek.

De *proces-object dualiteit* was nuttig voor het onderkennen van de invloed die het gebruik van computeralgebra had op de kijk van leerlingen op formules en expressies als objecten. Samen met symbol sense was reïficatie een referentiekader om de vooruitgang van het algebraïsch inzicht van de leerlingen te volgen.

De *theorie van instrumentatie* hielp bij het interpreteren van leerlingengedrag in de computeralgebra omgeving en bij het in kaart brengen van de relatie tussen technische en conceptuele aspecten binnen een instrumentatieschema. De instrumentele genese werd soms gehinderd door conceptuele obstakels, maar kon ook de conceptuele ontwikkeling bevorderen, zoals de theorie suggereert. In dit onderzoek is een aantal concrete instrumentatieschema's uitgewerkt en zijn de criteria van congruentie en transparantie benadrukt. Het verband tussen computeralgebra techniek en overeenkomstige pen-en-papier techniek verdient meer aandacht.

Samengevat zien we dat de elementen van het theoretisch kader aan het onderzoek hebben bijgedragen, ondanks het feit dat ze – met uitzondering van de instrumentele benadering – niet voor gebruik in deze context ontwikkeld zijn. Een belangrijke opbrengst van dit onderzoek voor het theoretisch kader is dan ook de waargenomen bijdrage van de theorieën, wat een bredere toepasbaarheid suggereert.

Hoe kijken we terug op de gevolgde *methodologie*? Het onderzoeksparadigma van ontwikkelingsonderzoek was geschikt voor het doel van dit onderzoek. Het cyclische karakter maakte het mogelijk om de experimentele omstandigheden aan te passen en het ontwerp van leertraject en onderwijsactiviteiten dwong ons tot explicitering van de intenties. In de voorbereidende fase was het hypothetisch leertraject een productief middel om de ontwikkeling van de hypotheses en verwachtingen vast te leggen. De vooraf geïdentificeerde ijkpuntopgaven en hun verwachte resultaten stuurden de observaties tijdens de onderwijsexperimenten en de data-analyse in de retrospectieve fase. De mini-interviews over deze ijkpuntopgaven leverden relevante gegevens op, hoewel deze methode van dataverzameling een goede afstemming met de docent vraagt en de mogelijkheden voor de observator om als 'assistent docent' op te treden verkleint. De video-opnames van klassikale delen van de lessen waren niet zo waardevol, aangezien de klassengesprekken niet altijd de ijkpuntopgaven of centrale concepten van het onderzoek betroffen. In de retrospectieve fase was de methode van data-analyse effectief, die codering volgens een vooraf opgezet coderingssysteem combineerde met een aanpak geïnspireerd op de constante comparatieve methode. De samenwerking met een tweede onderzoeker die de data onafhankelijk van de eerste codeerde, verbeterde de kwaliteit van de data-analyse en het coderingssysteem. Het formuleren van feed-forward voor de volgende onderzoekscyclus was bevorderlijk voor het vastleggen van de voortgang van het onderzoek.

Hoe generaliseerbaar zijn de bevindingen van dit onderzoek? Zijn de resultaten afhankelijk van de specifieke keuzes die zijn gemaakt, of kunnen ze worden generaliseerd naar andere situaties? Veel zaken die in dit onderzoek naar voren kwamen, zoals de reïficatie van formules en expressies en de ontwikkeling van symbol sense, zijn niet beperkt tot het parameterbegrip. We nemen dan ook aan dat deze bevindingen verder strekken en generaliseerd kunnen worden naar algebra leren in het algemeen. Voor wat betreft instrumentatie zijn we van mening dat de conclusies eveneens generaliseerd kunnen worden. Ondanks de verschillen tussen computeralge-

bra omgevingen op detailniveau, zijn deze systemen gebaseerd op vergelijkbare principes en zullen vergelijkbare instrumentatiekwesities een rol spelen. De vraag in hoeverre de instrumentele benadering ook van toepassing is op andere ICT omgevingen verdient nader onderzoek. De bevindingen kunnen ook worden gegeneraliseerd naar andere Nederlandse scholen, zolang rekening gehouden wordt met de specifieke educatieve omstandigheden. Bij generalisatie naar het gebruik van computeralgebra in andere klassen en op andere niveaus moet voorzichtigheid worden betracht. In lagere klassen zullen de instrumentatieproblemen naar verwachting groter zijn. In de derde en vierde klas is gebruik van computeralgebra voor een langere periode aan te raden. In hogere klassen verwachten we vergelijkbare instrumentatieproblemen en mogelijkheden, maar we nemen aan dat leerlingen dan meer wiskundige middelen hebben om de moeilijkheden te overwinnen en te profiteren van de mogelijkheden.

Aanbevelingen

De conclusies van dit onderzoek leiden tot aanbevelingen voor het onderwijs, voor software ontwerp en voor verder onderzoek. Voor het *onderwijs in algebra met computeralgebra* suggereren de resultaten dat het belangrijk is om te anticiperen op het gebruik van computeralgebra, om expliciet te zijn over het veranderende didactisch contract, om de individuele en collectieve instrumentatie goed te orkestreren en om leerlingen CAS technieken en pen-en-papier technieken te laten vergelijken, zodat ze nadenken over de manier waarop computeralgebra werkt.

Voor het *ontwerpen van software* voor educatieve doeleinden bevelen we aan om de criteria van transparantie en congruentie van de technologische omgeving serieus te nemen. Het 'black-box' karakter van het ICT gereedschap en idiosyncratische trekjes bemoeilijken de instrumentatie. Flexibiliteit ten aanzien van notatie, syntax en oplossingsstrategie vormt een derde criterium waaraan bij voorkeur voldaan dient te worden.

Voor *vervolgonderzoek* naar het leren van wiskunde in een technologische omgeving raden we aan om de gehele pedagogische situatie in ogenschouw te nemen en niet het gebruik van ICT als geïsoleerd verschijnsel te onderzoeken, zodat het sociale en het technologische aspect met elkaar in verband worden gebracht (Yackel & Cobb, 1996). De cultureel-historische handelingstheorie, die gereedschap ziet als onderdeel van een sociale praktijk, zou hierbij een vruchtbaar perspectief kunnen zijn. Verder zou de relatie tussen de instrumentele benadering en theorieën over symboliseren een interessant startpunt kunnen zijn voor verdere theorievorming. Een longitudinaal onderzoek naar symboliseren in een computeralgebra omgeving, inclusief adequaat onderwijs dat daarop voorbereidt, verdient aanbeveling. Daarnaast is uitbreiding van dit onderzoek wenselijk naar andere wiskundige onderwerpen – denk aan het functiebegrip – en ander ICT gereedschap zoals software voor dy-

namische meetkunde en Java applets. Ten slotte vraagt de rol van technologie bij toetsing nader onderzoek.

Referenties

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
- Artigue, M. (1997). Rapports entre dimensions technique et conceptuelle dans l'activité mathématique avec des systèmes de mathématiques symboliques. [Relations between the technical and conceptual dimensions in mathematical activity with systems of symbolic mathematics.] *Actes de l'université d'été 1996* (pp. 19-40). Rennes, France: IREM de Rennes.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.
- Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to algebra, perspectives for research and teaching*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Bills, L. (2001). Shifts in the meanings of literal symbols. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Vol 2* (pp. 161-168). Utrecht, Netherlands: Freudenthal Institute.
- Bloody-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables - parameters and dummy variables in high school algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 177-189). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Boyer, C.B. (1968). *A history of mathematics*. New York: Wiley.
- Chick, H., Stacey, K., Vincent, Ji. & Vincent, Jo. (Eds.) (2001). *Proceedings of the 12th ICMI study conference the future of the teaching and learning of algebra*. Melbourne: The University of Melbourne.
- Collis, K.F. (1975). *The development of formal reasoning*. Newcastle, NSW: University of Newcastle.
- Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 189-209.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Edelson, D.C. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. *Journal of the Learning Sciences*, 11(1), 105-121.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Netherlands: Reidel.
- Furinghetti, F. & Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: A little difference? In J.P. Da Ponte & J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th international conference for the psychology of mathematics education, Vol 2* (pp. 368-375). Lisbon: University of Lisbon.
- Giessen, C. van de (2002). The visualisation of parameters. In M. Borovcnik & H. Kautschitsch (Eds.), *Technology in mathematics teaching. Proceedings of ICTMT5* (pp. 97-100). Vienna: Oebv&hpt Verlagsgesellschaft.
- Glaser, B. & Strauss, A. (1967). *The discovery of grounded theory. Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine.
- Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-β Press.
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 155-177.

- Gravemeijer, K.P.E., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J. (2000). Symbolising, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolising and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-273). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.
- Guin, D. & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: Necessity of instrumental orchestrations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(5), 204-211.
- Harper, E. (1987). Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 75-90.
- Heid, M.K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 3-25.
- Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en inzicht, werkboek van de wiskundendidactiek*. [Meaning and insight, work book of didactics of mathematics.] Purmerend, Netherlands: Muusses.
- Hiele, P.M. van (1986). *Structure and insight, a theory of mathematics education*. Orlando, FLA: Academic Press Inc.
- Küchemann, D.E. (1981). Algebra. In K.M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London: John Murray.
- Lagrange, J.B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. [The integration of technological instruments in education: an approach by means of techniques.] *Educational Studies in Mathematics*, 43, 1-30.
- Lange Jzn, J. de (1987). *Mathematics, insight and meaning*. Utrecht, Netherlands: OW&OC, Rijksuniversiteit Utrecht.
- Monaghan, J. (1993). New technology and mathematics education: New secondary directions. In A. Orton & G. Wain (Eds.), *Issues in mathematics education* (pp. 193-209). London: Cassell.
- O'Callaghan, B.R. (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 21-40.
- Research Advisory Committee (1996). Justification and reform. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 516-520.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.
- Steffe, L.P. (1983). The teaching experiment methodology in a constructivist research program. In M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak & M. Suydam (Eds.), *Proceedings of the fourth international congress on mathematics education* (pp. 469-471). Boston: Birkhäuser Inc.
- Steffe, L.P., & Thompson, P.W. (2000). Teaching experiments methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A.E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.
- Strauss, A.L. (1987). *Qualitative analysis for social scientists*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Strauss, A. & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research. techniques and procedures for developing grounded theory*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Tall, D. & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 125-147.
- Treffers, A. (1987a). *Three dimensions, a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project*. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel.
- Treffers, A. (1987b). Integrated column arithmetic according to progressive schematisation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 125-145.

-
- Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. [The parable of the left-handed and the skillet: Study on the learning process in a symbolic calculator environment.] *Educational Studies in Mathematics*, 41, 239-264.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomath norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.