Veranderlijke Algebra

versie TI-89

Algebra leren met
computeralgebra
Freudenthal Instituut

Bij de voorkant:

François Viète, geboren in 1540 in Fontenay-le-Comte (Frankrijk) en gestorven in 1603 in Parijs. Oorspronkelijk was Viète advocaat. Later werd hij lid van het parlement van Bretagne en bekleedde hij andere overheidsfuncties. Tegelijkertijd was hij actief als wiskundige en sterrenkundige. Tijdens de oorlog tussen Spanje en Frankrijk (1590) werkte Viète aan het ontcijferen van het geheimschrift dat de Spanjaarden gebruikten.

De belangrijkste bijdrage van Viète aan de algebra was de introductie van een systematische algebraïsche notatie in het boek *In artem analyticam isagoge* (1591). In dit boek kunnen letters zowel bekende als onbekende hoeveelheden voorstellen. In vergelijking met de lange zinnen die eerder gebruikt werden om verbanden te beschrijven, maakte deze compacte schrijfwijze het veel eenvoudiger om algemene oplossingen te noteren.

Op Internet kun je informatie over Viète en over andere wiskundigen vinden bij http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/.

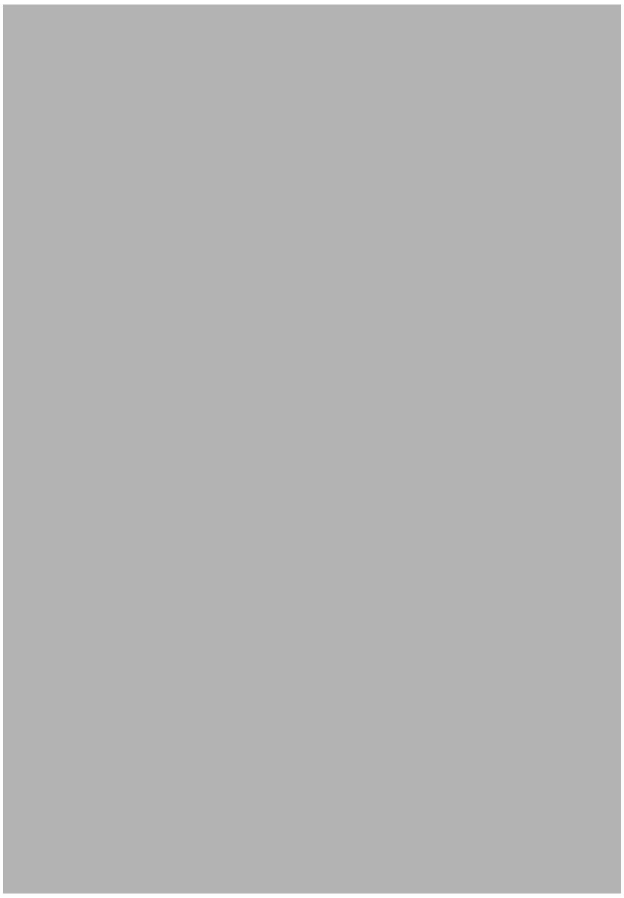
Veranderlijke Algebra, versie TI-89

Project:	Algebra leren met computeralgebra
Klas:	VWO 3
Staat:	Tweede versie voor experiment Werkplaats Kindergemeenschap, januari 2001
Ontwerp:	Paul Drijvers, met ideeën van Martin Kindt
	De TI-89 programma's Schuif en Schiet zijn geschreven door Pieter Schadron

postbus 9432, 3506 GK Utrecht, tel. 030-2611611

Inhoud

Deel 1:
Introductie TI-89



1 Rekenen

1.1 Kijken naar de TI-89

Op deze pagina begin je met goed te kijken naar de TI-89.
Je leert hoe je de leesbaarheid van het scherm kunt verbeteren.
Je ziet dat betekenis van een toets verandert als je eerst op de oranje, de groene of de paarse toets drukt.

Bekijk de voorkant van de TI-89 eens goed. Meteen onder het beeldscherm zie je de functietoetsen F1, F2, ... , F5. Daar rechts onder zitten de vier pijltjestoetsen ▶, ◀, ▼ en ▲. Daarmee kun je de cursor besturen. Helemaal linksonder zie je de knop ON, waarmee je de machine aan zet. Met ENTER, helemaal rechtsonder, sluit je opdrachten af.

1 Zet de machine aan met ON.

2 Het kan zijn dat het scherm niet goed leesbaar is. Dan staat het te donker of te licht afgesteld. Houd het groene ‘diamantje’ ♦ ingedrukt en druk gelijktijdig een aantal keren op – of op +, net zolang tot je een helder beeld krijgt.

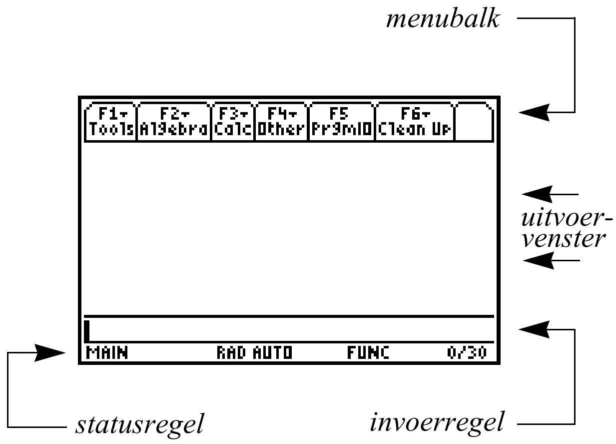
Je ziet nu een leeg scherm, het zogenaamde *Home-scherm*. De bovenste regel, de *menubalk*, bevat de menu's die met de functietoetsen F1, F2, ..., F6 geopend kunnen worden.
Daaronder zie je het *uitvoervenster*, waarin de uitkomsten en de grafieken komen te staan. Daaronder volgt de *invoerregel*, waarin de cursor knippert. De onderste regel is de *statusregel*.

Je zet de machine uit met OFF. Dat staat met kleine oranje letters linksboven de ON-toets. Dat betekent dat je eerst op de oranje 2nd-toets moet drukken en dan op ON, om de opdracht OFF te geven.

3 Zet je machine uit en vervolgens weer aan.

4 Als je eerst op de paarse alpha-toets drukt, krijg je daarna de paarse letters die rechtsboven de toetsen staan.
Probeer maar eens je naam in te typen.
Een foute letter kun je met ⟵ weghalen.

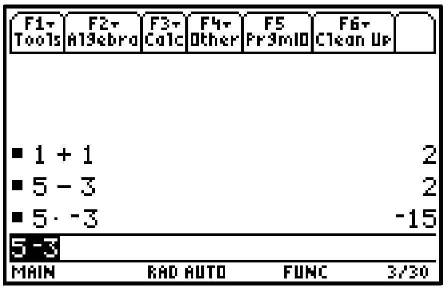
5 Wis je naam met CLEAR



1.2 Rekenen

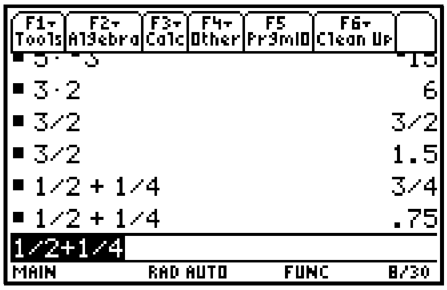
Met de TI-89 kun je natuurlijk rekenen, maar sommige zaken worden anders opgeschreven dan je gewend bent. De machine schrijft bijvoorbeeld .75 in plaats van 0,75.
Let op: Er zijn twee min-tekens.
Gebruik de schermen naast de opgaven om jezelf te controleren.

6 Voer in: 1+1. Dit verschijnt in de invoerregel. Druk dan op ENTER.
Je ziet dat het ‘sommetje’ nu links in het uitvoervenster wordt gezet. De uitkomst staat rechts. De uitdrukking 1+1 is opnieuw in de invoerregel gezet.



7 Voer 5 – 3 in met de zwarte mintoets.
Voer ook 5 – 3 in met de grijze toets waar (–) op staat. Dit geeft een ander antwoord omdat de grijze (–) voor negatieve getallen staat.
De TI-89 leest daarvoor dan 5 x (-3).

8 Typ in: 3 x 2, weer gevolgd door ENTER.
Zodra je op de 3 drukte, verdween de vorige opdracht in de invoerregel. Nu staat er 3*2.
In het uitvoervenster wordt het maalteken met een punt aangegeven.

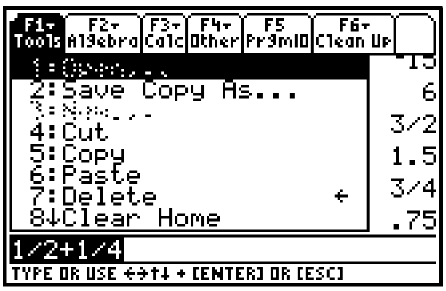


9 Nu staat 3 * 2 in de invoerregel.
Spring met ▶ naar het einde van de regel.
Ga met ◀ tussen het * en de 2 staan.
Haal met ◀– het sterretje * weg.
Voer in plaats daarvan in: ÷. Dat je met ENTER af moet sluiten, weet je nu wel.
In het uitvoerscherm worden de deling en de breuk aangegeven met eens schuine streep, /.

10 De opgave 3/2 staat al weer in de invoerregel.
Sluit nu af met ≈ (spreek uit als “is ongeveer gelijk aan”). ≈ is de groene betekenis van ENTER, dus ♦ ENTER. Dat geeft het kommagetal 1,5 maar de machine schrijft 1.5.

11 Je kunt ook breuken optellen.
Bereken 1/2 + 1/4 . Laat het antwoord ook als komma-getal schrijven.
De machine schrijft .75 in plaats van 0.75.

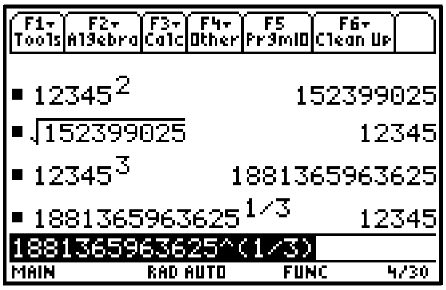
12 Druk om het scherm schoon te maken op F1.
Je ziet een menu openrollen.
Kies optie 8: Clear Home.



1.3 Machten en haakjes

Met de cursor kun je uitkomsten weer naar de invoerregel halen.
Zoals bij elke rekenmachine moet je bij de TI-89 letten op het zetten van haakjes.
Maak als besluit van dit hoofdstuk de zelftoets aan het einde in je schrift.

13 Voer in: 12345^2. In het uitvoerscherm ziet het kwadraat eruit zoals je gewend bent



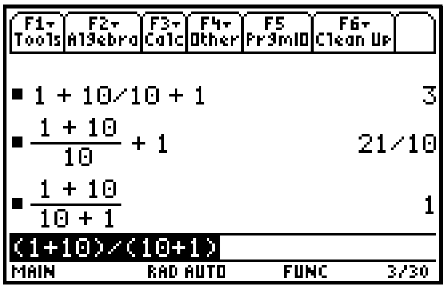
14 Om van de uitkomst weer de wortel te trekken, typ je eerst het wortelteken in met 2nd x ('maal' en niet 'iks'). Druk dan op ▲ .
De cursor springt nu naar het getal op de onderste regel van het uitvoerscherm.
Druk op ENTER om deze naar de invoerregel te copiëren. Haakje sluiten, ENTER, klaar.

15 Bereken ook de derdemacht van 12345.

16 Om van de uitkomst de derdemachts wortel te berekenen, moet je eerst weer het antwoord naar de invoerregel copiëren.
Voeg dan toe: ^(1/3).

17 Maak het scherm weer schoon met F1 optie 8.

18 Voer in: 1+10/10+1. De uitkomst is 3.
Zet in de invoerregel haakjes: (1+10)/10+1.
Bereken ook (1+10)/(10+1) en 1+10/(10+1).



19 Welke uitkomsten kun je krijgen door in 1 + 2 / 3 x 4 haakjes te zetten?

Zelftoets 1

Maak de volgende opgaven en schrijf de antwoorden in je schrift.
Probeer het eerst zonder terug te kijken naar de vorige opgaven.
Zet erbij hoe je aan het antwoord bent gekomen en op welke knoppen je hebt gedrukt.

1 Bereken 1/3 + 1/5. Laat het antwoord ook als komma-getal schrijven.

2 Bereken de derdemachts wortel uit 10970645048.

3 Bereken $5 + \frac{3}{2+4}$ .Wat is er verkeerd gegaan als je als uitkomst 21/2 krijgt?

4 Verander de 2 in $5 + \frac{3}{2+4}$ in 56 en bereken het antwoord.

5 Maak het scherm van de TI-89 schoon.

6 Zet de machine uit.

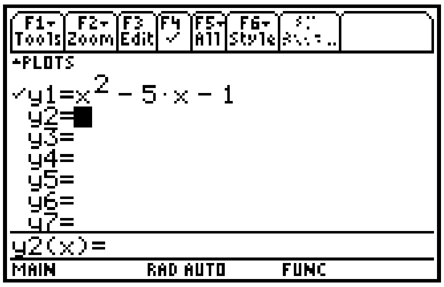
2 Tabellen en grafieken

2.1 Tabellen maken

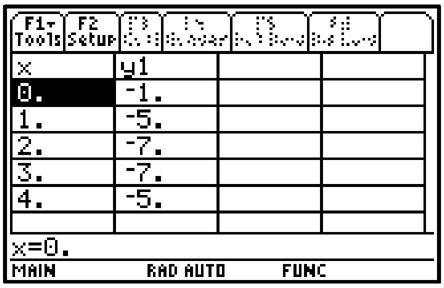
Met de TI-89 kun je tabellen van functiewaarden maken.
Daarvoor moet je eerst een formule invoeren in het functiebestand.
Met de pijltjestoetsen kun je door een tabel lopen.
Het startgetal en de stapgrootte van de tabel kun je instellen.

1 Kies Y= door eerst op het diamantje ♦ te drukken en dan op functietoets F1.
Je ziet nu het zogenaamde *functiebestand*, een lijst waarin je functies kunt invoeren, die genummerd zijn: y1, y2, y3, ...

2 De cursor staat bij functie y1.
Voer daar in: x^2 – 5x – 1.
Sluit af met ENTER.
Voor de x zit er een aparte toets op de TI-89: de eerste knop van rij 5.
De *v* voor y1 (het 'vinkje') geeft aan dat de functie 'actief' is.

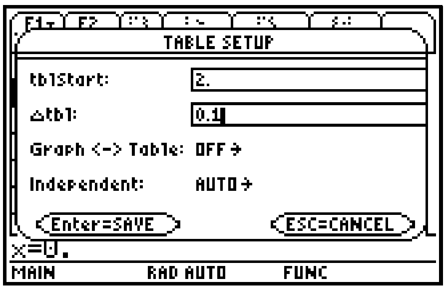


3 De groene betekenis van functietoets F5 is TABLE. Dat betekent tabel.
Laat dus een tabel maken met ♦ F5.
Je krijgt een tabel met waarden van x en y1(x).



4 Loop met de pijltjestoetsen door de tabel heen. Je kunt de tabel ook omhoog schuiven. Zoek bijvoorbeeld in de tabel de y-waarden bij x = –5 en bij x = 10.

5 Zou de functiewaarde tussen x = 2 en x = 3 nog onder de –7 komen? Om dat te onderzoeken kun je de instelling van de tabel veranderen. Druk op F2: Setup (of op Tblset, ♦ F5).
Vul het scherm in zoals hiernaast en verlaat het met twee keer ENTER. De tabel begint nu bij x = 2 en x loopt met stappen van 0,1.
Zoek in de tabel de y-waarde bij x = 2.5.



6 Zet de cursor in de tweede kolom en druk op F4 . Je krijgt de formule te zien.
Verlaat dit met ESC ('escape') of ENTER.
ESC is vaak een goede 'nooduitgang'.

7 Die y-waarde voor x = 2.5 kun je ook in het HOME-scherm berekenen.
Druk op de HOME-toets en voer in: y1(2.5).
De y-toets vind je naast de x-toets in rij 5.

2.2 Het tekenen van grafieken

Het tekenen van grafieken is een van de aardige mogelijkheden van de TI-89. Met GRAPH laat je grafieken tekenen van de functies in het functiebestand.
Na TRACE kun je met de pijltjestoetsen over de grafiek 'wandelen'. Daarbij komen de coördinaten van de punten in beeld.

8 De groene betekenis van functietoets F3 is GRAPH. Druk voor GRAPH dus op het diamantje ♦ en dan op functietoets F3.
Als het goed is, komt de grafiek in beeld.
Omdat de functie kwadratisch is, is de grafiek een parabool.

9 Boven in het scherm kun je zien, dat functietoets F3 nu Trace betekent.
Druk op F3. In beeld verschijnt een knipperende cursor met daaronder de coördinaten van de cursorpositie. De 1 rechtsboven geeft aan, dat de cursor op de grafiek van y1 staat.

10 Beweeg de cursor met ▶ en ◀ over de grafiek. Je ziet de coördinaten mee veranderen.
Met Trace wandel je dus over de grafiek.

11 Probeer met Trace na te gaan hoe groot de kleinste functiewaarde ongeveer is.
Je ziet dat dit ongeveer klopt met wat je bij opgaven 5 en 7 hebt gevonden.

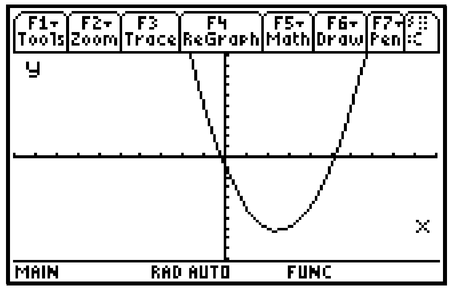
12 De coördinaten van de Trace-punten zijn meestal geen mooie getallen. De x-coördinaat springt bijvoorbeeld van 2.405... naar 2.658.. zonder de waarde 2.5 aan te doen.
Toets in 2.5, ENTER.
De cursor springt nu naar het punt met x-coördinaat 2.5.

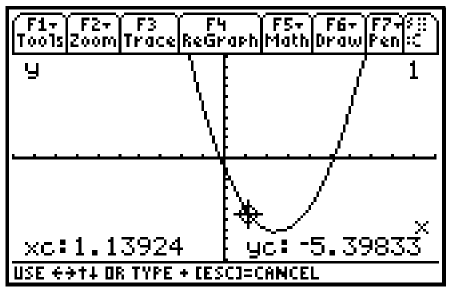
13 Ga met Y= naar het functiebestand en wis de ingevoerde functie met CLEAR.

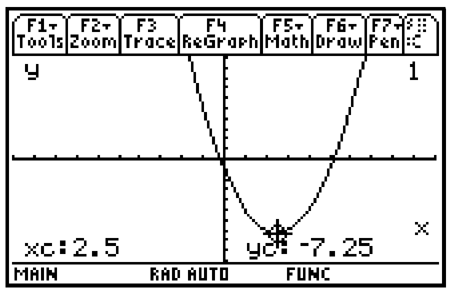
14 Voer de volgende functies in:

y1 = 1000 + 50x
y2 = 2000 – 50x

15 Druk op GRAPH.
Je krijg geen grafieken te zien! Die vallen namelijk door de grote getallen in de formulebuiten beeld.







2.3 Het kijkvenster

Het kijkvenster is dat deel van het tekenvlak dat in beeld komt op het scherm van de TI-89.
Met WINDOW *kun je plaats en de grootte van dat scherm instellen. Zo voorkom je bijvoorbeeld dat grafieken helemaal buiten beeld vallen.*

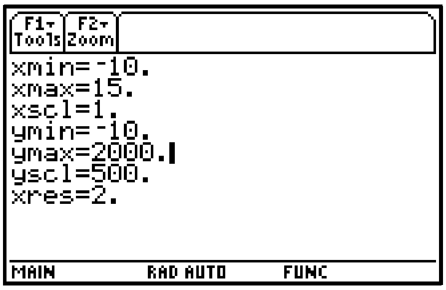
16 Kies WINDOW met ♦ F2.
Je krijgt een lijst, waarin je de afmetingen kunt instellen van het ‘raampje’ waardoor je naar de grafiek kijkt.
Verander xmax in 15 en ymax in 2000.
Laat de grafieken opnieuw tekenen.

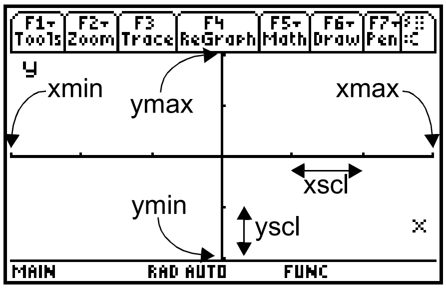
De horizontale as van het kijkvenster loopt van xmin tot xmax met een schaalverdeling van xscl. Voor de verticale as hetzelfde, maar dan met ymin, ymax en yscl.
xres bepaalt de resolutie van de tekening; die kun je gewoon op 2 laten staan.

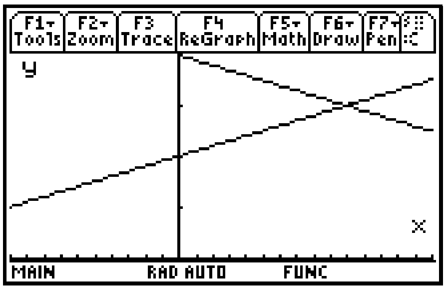
17 Verander de waarde van yscl in 500.
Zie je het verschil in de grafiek?

18 Loop met Trace naar het snijpunt van de twee grafieken en benader zo de coördinaten hiervan. Met ▼ en ▲ kun je op de andere overspringen om te kijken hoe ver de grafieken uit elkaar liggen.

19 Ga met Y= naar het functiebestand en voer in:
y3 = y2(x) – y1(x)
De verschilfunctie is 0 als y1 en y2 gelijk zijn.
Ga dat na met TRACE.







Zelftoets 2

Maak de volgende opgaven en schrijf de antwoorden in je schrift.
Probeer het eerst zonder terug te kijken naar de vorige opgaven.
Zet erbij hoe je aan het antwoord bent gekomen en op welke knoppen je hebt gedrukt.

1 Vervang in het functiebestand y1 en y2 door: y1 = 200 – x en y2 = x – 500. Wis y3.

2 Maak een tabel en kijk waar ongeveer de waarden van y1 en y2 gelijk zijn.

3 Zoek een geschikt kijkvenster dat de grafieken mooi in beeld brengt.

4 Benader de coördinaten van het snijpunt.

5 Voeg aan het plaatje ook de grafiek van de verschilfunctie y1(x) – y2(x) toe.

3 Algebra

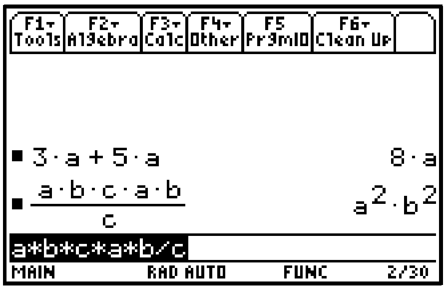
3.1 Werken met formules

Met de TI-89 kun je niet alleen met getallen rekenen of grafieken tekenen; het bijzondere aan het apparaat is dat je ook met formules kunt werken, met letters kunt rekenen. Het is een algebra-machine. Bijvoorbeeld kun je haakjes uitwerken, of juist in factoren ontbinden.

1 Ga naar het HOME-scherm en voer in:

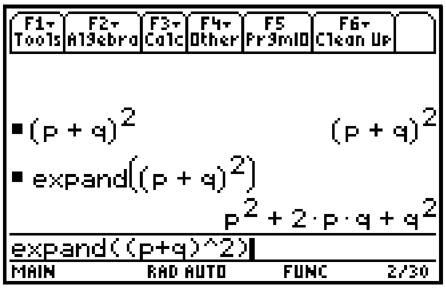
3a + 5a

De letter a voer je in met ALPHA =.
Je ziet dat de TI-89 dit meteen vereenvoudigt. Bij grafieken en tabellen op de TI-89 worden steeds de letters x en y gebruikt; bij algebra kun je elke letter gebruiken die je maar wilt.



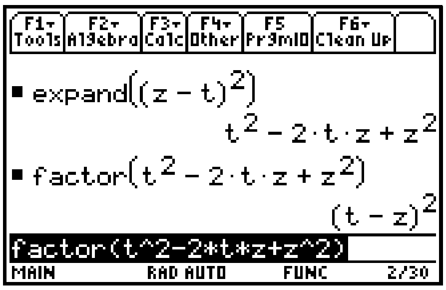
2 Voer in: a*b*c*a*b/c
Ook nu wordt de uitdrukking meteen vereenvoudigd.

3 Nu iets moeilijker. Voer in: (p + q)^2
De vermenigvuldiging wordt niet uitgevoerd. De TI-89 laat de eenvoudigste vorm staan



4 Uitwerken van het kwadraat gaat met expand. Kies F2: Algebra, en dan optie 3: expand. Voeg met ▲ en ENTER (p + q)^2 toe: expand((p + q)^2).

5 Werk ook de haakjes weg in $(z - t)^2$.
Naast de witte x- en y-toets staan ook toetsen voor z en t. In de uitvoer staan de letters op alfabetische volgorde, dus de t voor de z.



6 Andersom, ontbinden in factoren, gaat met optie 2:Factor uit het Algebra-menu.
Kies deze optie, en haal uit het uitvoerscherm de uitdrukking $t^2 - 2 \cdot t \cdot z + z^2$ op.
Haakje sluiten, ENTER.

7 Laat de volgende opdrachten uitvoeren:

factor(x^2 – 2)
factor(x^2 – 2, x)
factor(x^2 – 2.0, x)

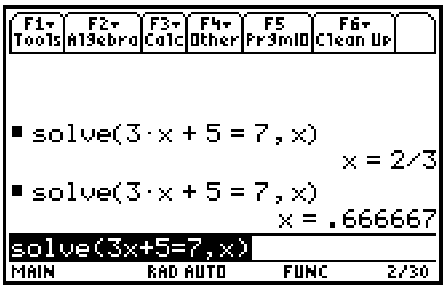
Je kunt bij factor het beste aangeven naar welke variabele de machine moet ontbinden.
Wanneer je niet 2 maar 2.0 invoert, beschouwt de TI-89 dat als een decimale benadering; de antwoorden zijn dat dan ook.

3.2 Vergelijkingen oplossen

Met de TI-89 kun je ook vergelijkingen oplossen. Oplossen is in het Engels 'solve' en dat is dan ook de optie die je gebruikt.
Let daarbij op het verschil tussen exacte oplossingen en numerieke, benaderende oplossingen, die als komma-getallen worden geschreven. Het resultaat van solve kan een formule zijn.

8 Open het Algebra-menu en kies 1:solve.
Vul dit aan tot: solve(3x + 5 = 7, x)
Je voert dus na solve eerst de vergelijking in en achter de komma de variabele die moet worden opgelost.

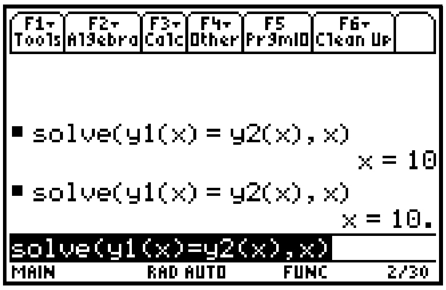
9 Je krijgt een breuk als uitkomst.
Afsluiten met ≈ in plaats van met ENTER, geeft een decimale benadering als antwoord.



10 Los op: $x^2 = 3$
Wat gebeurt er als je niet 3 maar 3.0 invoert?

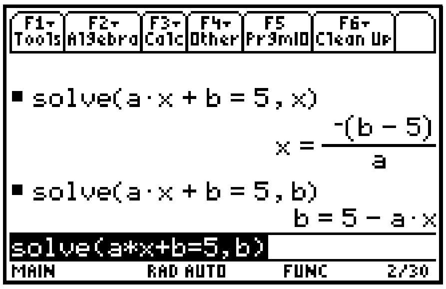
11 Ga naar het functiebestand en voer de twee functies in die je in paragraaf 2 hebt gezien:
y1 = 1000 + 50x
y2 = 2000 – 50x

12 Ga weer naar het HOME-scherm en voer daar in: solve(y1(x) = y2(x), x).
Zo vind je de exacte x-coördinaat van het snijpunt van de twee grafieken.
Bepaal ook een benadering hiervan. Het enige verschil is het puntje na de 10. Dat geeft aan dat het een decimaal getal is.



13 Voer in: solve(a*x + b = 5, x)
Let op: tussen a en x moet een * staan, anders wordt ax als één woordvariabele beschouwd.
Het antwoord van solve kan een formule zijn: x wordt uitgedrukt in a en b.

14 Verander de laatste x in de solve-opdracht van de vorige opgave in b. Zo los je de vergelijking naar b op en wordt b uitgedrukt in a en x.

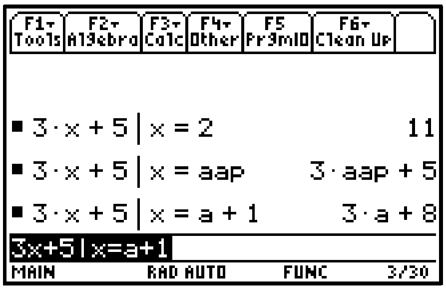


15 Los x op uit $x^2 + y = 6$.
Het antwoord ziet er ingewikkeld uit.
and geeft aan dat $y - 6$ niet positief mag zijn omdat dan de wortel niet bestaat.
or geeft aan dat er twee oplossingen zijn, $x = -\sqrt{6-y}$ en $x = \sqrt{6-y}$.

3.3 Substitutie

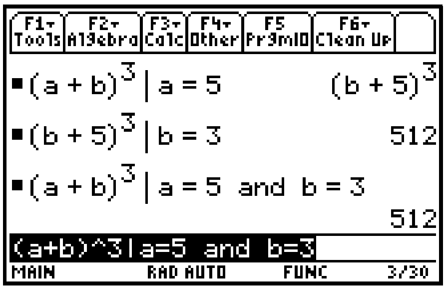
Met de verticale streep | kun je voor een letter een getal invullen. Dat heet ook wel substitueren. Je kunt | ook gebruiken om een variabele door een formule te vervangen. | spreek je uit als 'waarbij'.
Met catalog *kom je in een soort woordenlijst terecht, die alle TI-89 commando's bevat.*

16 Ga naar het HOME-scherm en voer in:
3x + 5 | x = 2
Wat achter de verticale streep staat, wordt in het stuk ervoor ingevuld, gesubstitueerd.
x krijgt (alleen in deze regel!) de waarde 2.
Dus is het antwoord 3·2 + 5 = 11.
Je spreekt 3x + 5 | x = 2 uit als '3x + 5 *waarbij* x = 2', als '3x + 5 *met* x = 2'.



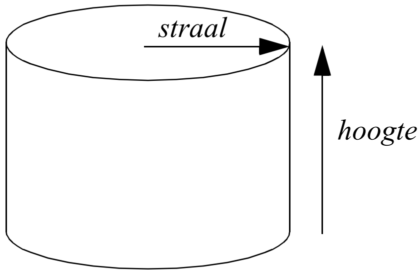
17 Vervang x in 3x + 5 nog een keer, maar dit keer door aap. En ook nog een keer door a+1.

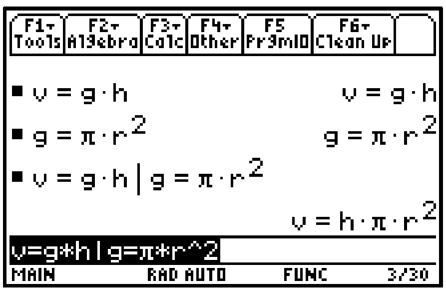
18 Geef a in (a+b)^3 de waarde 5.
Haal de uitkomst de invoerregel binnen en geef b de waarde 3.



19 Je kunt deze twee substituties ook tegelijk uitvoeren. Voer daarvoor in:
(a+b)^3 | a=5 and b=3
and kun je letter voor letter intypen, of kiezen uit de woordenlijst die je krijgt met catalog.
In catalog kun je allerlei woorden en commando's opzoeken.

20 Het volume van een cilinder is gelijk aan de oppervlakte van het grondvlak keer de hoogte, afgekort tot v = g * h.
De oppervlakte van het grondvlak is π maal het kwadraat van de straal r: g = π * r^2
Voer deze formules in en substitueer de formule van de oppervlakte in die van de inhoud.
π krijg je met 2nd ^.
v= g * h | g= π * r^2 geeft v= h·π·r^2





21 Als de hoogte van de cilinder gelijk is aan de diameter van het grondvlak, dus als h = 2r, dan ziet de cilinder er van opzij vierkant uit. Druk de oppervlakte van zo'n 'vierkante' cilinder uit in de straal.

3.4 Meer substitutie en zelftoets

Je kunt substitutie ook gebruiken om vergelijkingen op te lossen of om een stel gelijksoortige grafieken te tekenen.
Onderaan de pagina staat weer de afsluitende zelftoets.

22 Je kunt | ook gebruiken om oplossingen te controleren. Voer in het functiebestand in:

y1 = x + 1
y2 = –x^2 + x +6

Los de vergelijking y1(x) = y2(x) op en substitueer een van de oplossingen in de vergelijking. De melding true geeft aan dat het klopt.

23 Er is nog een manier om de vergelijking van de vorige opgave op te lossen.
Voer in: y = –x^2 + x +6 | y = x + 1
Het resultaat is een vergelijking met x als enige letter. Die kun je oplossen.

24 Substitutie met | kan ook gebruikt worden in het functiebestand.
Ga daar met Y= naar toe en voer als y1 in:

y1 = x^2/b | b = 5

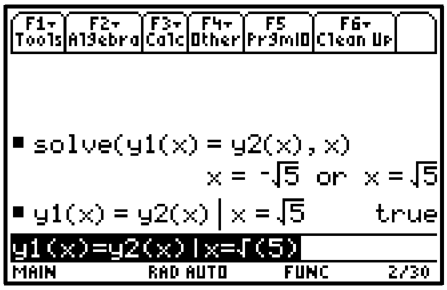
De grafiek wordt getekend voor b = 5 .

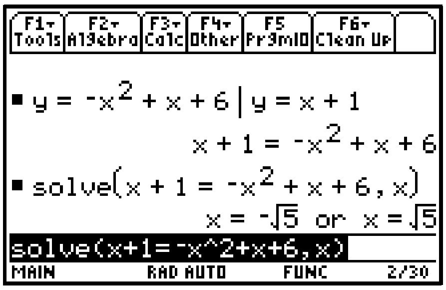
25 Je kunt ook twee grafieken krijgen:

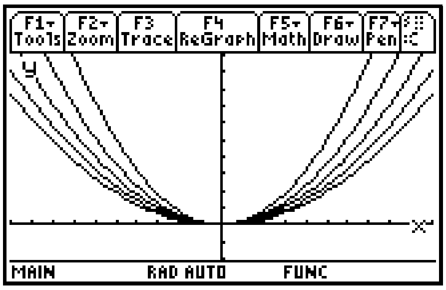
y1 = x^2/b | b = {5, 1/3}

De waarden moeten dan als verzameling tussen accolades worden ingevoerd.

26 Of een heleboel grafieken:
y1 = x^2/b | b = {5, 7, 9, 11, 13}







Zelftoets 2

Maak de volgende opgaven en schrijf de antwoorden in je schrift.
Probeer het eerst zonder terug te kijken naar de vorige opgaven.
Zet erbij hoe je aan het antwoord bent gekomen en op welke knoppen je hebt gedrukt.

1 Werk de haakjes uit in $(x + y)^3$ en ontbind $t^2 + z^2 + 2 \cdot z + 1$ in factoren.

2 Gegeven zijn de lijn met vergelijking $y = x + 1$ en de halve cirkel met vergelijking $y = \sqrt{25 - x^2}$. Zoek een geschikt kijkvenster en laat de grafieken tekenen.

3 Bereken de coördinaten van het snijpunt op twee manieren: met solve en met substitutie.

4 Laat de grafieken tekenen van $y = \sqrt{b^2 - x^2}$ voor $b = 1, 2, 3, 4, 5$.

Deel 2: Veranderlijke Algebra

1 Schieten en schuiven op de TI-89

Je gaat het spelletje 'Schiet' spelen op de TI-89. Eerst speel je het spel. Daarna kijk je erop terug om het verband te leggen met de wiskunde.

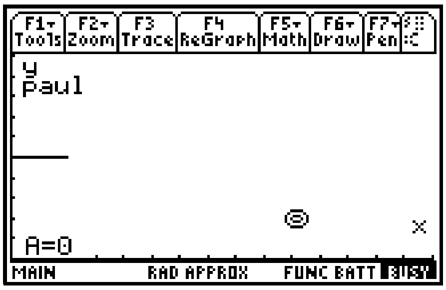
voorbereidingen

1 **a.** Zorg ervoor dat het spel op je TI-89 aanwezig is.
b. Je gaat het spel samen met buurman/vrouw op één machine spelen. Typ in het HOME-scherm in: schiet(). Let op het sluithaakje! Je kunt het commando schiet() ook uit VAR-LINK halen.
c. Meld de twee spelers aan met F1 optie 1 en voer de namen in.

spelen zonder coördinaten

d. Kies F2 optie 1: spelen zonder coördinaten.

Je ziet een scherm van [0, 15] bij [0, 10] met aan de rechterzijde een doel. De 'loop van het geschut' zie je links. Het is een stukje van de grafiek van de functie Y1 met Y1 = A*X + 5. Linksonder in beeld staat de huidige waarde van A. Linksboven zie je de naam van de speler die aan de beurt is.



Met ▼ en ▲ kun je de 'loop' richten op het doel. Daardoor verandert de waarde van A. Met ENTER schiet je. Raak je het doel, dan krijg je 10 punten. Een schampschot geeft 5 punten.
De twee spelers lossen om de beurt een schot, elk 5 keer. Dan verschijnt de eindscore in beeld.

2 Speel het spel enkele keren met een medeleerling.

spelen met coördinaten

3 **a.** Kies vervolgens F2 optie 2: Met coordinaten. Je krijgt dan ook de coördinaten van het doel in beeld.
b. Speel het spel nu niet tegen elkaar maar met elkaar. Probeer samen een maximale score uit 5 schoten te halen.
c. Hoe kun je geschikte A-waarde uit de coördinaten van het doel berekenen?

het spel afsluiten

4 **a.** Sluit het spel netjes af met F3 optie 1: Stoppen.
b. Tussentijds afbreken van het spel gaat met ON, gevolgd door ESC. Als je zo het spel afbreekt, moet je nog twee zaken goed instellen:
- Kies in het HOME-scherm voor F6 optie 1: Clear a-z.
- Kies MODE en stel bij F2 Exact/Approx in op 1:AUTO.

nadenken over het spel

5 Welke wiskundige conclusies kun je trekken uit het spel? Schrijf die in je schrift.

6 Wat gebeurt er met de grafiek van $y = a \cdot x + 5$ als a groter wordt?

Op deze pagina leer je werken met het programma ‘Schuif’ op de TI-89. Dit programma komt in de volgende paragrafen van pas.

7 a. Zorg ervoor dat het programma ‘Schuif’ op je TI-89 aanwezig is.
b. Typ in het HOME-scherm in: schuif(). Let op het sluithaakje!
Je kunt het commando schuif() ook uit VAR-LINK halen.
c. Lees het openingsscherm van ‘schuif’.

8 a. Kies F1 om een functie in te voeren, en dan bijvoorbeeld optie 3.
Dat betekent dat de functies de vorm $y = \mathsf{A} \cdot x^2$ zullen hebben.
b. Kies F2 om de waarden voor A te bepalen. Kies voor 1: Standaard.
Dat betekent dat A de waarden –5, –4, –3, ..., 4, 5 doorloopt.

9 a. Kies F3: Scherm optie 1 en stel de *x*-as in van –5 tot 5 met schaal 1.
b. Stel met F3 de *y*-as in van –20 tot 20 met schaal 5.

10 a. Kies nu F4: Grafiek optie 1: Apart. Eén voor één worden voor de verschillende waarden van A de grafieken getekend.
Met ENTER kun je dit eventueel onderbreken.
b. Probeer ook de opties 3 en 4 van F4. Daarmee zie je snel hoe de grafiek verandert als A de waardenverzameling doorloopt.
c. Kies F4 optie 5: Wandelen.
Je krijgt de grafiek voor een van de A-waarden in beeld. Met ▼ en ▲ kun je nu de A-waarde kleiner of groter maken. Probeer dit uit.

11 Wat gebeurt er met de grafiek van $y = \mathsf{A} \cdot x^2$ als A groter wordt?

12 a. Onderzoek nu hoe de grafiek van $y = \mathsf{A} \cdot x$ verandert als A met stapjes van 1/2 van 0 tot 5 loopt. Gebruik F1 om de functie te kiezen en F2 optie 2 om de waarden van A vast te leggen.
b. Wat is het effect van een toename van A op de grafiek?

13 a. Sluit het programma als volgt af:
- kies F5 om in het vervolgmenu te komen
- kies daaruit F2 optie 2: Stoppen

b. Tussentijds afbreken gaat met ON gevolgd door ESC.
Als je zo het progamma verlaat, moet je nog twee zaken herstellen:
- Kies in het HOME-scherm voor F6 optie 1: Clear a-z.
- Kies MODE en stel bij F2 Exact/Approx in op 1:AUTO.

2 Fonteinen

In het spelletje ‘Schiet’ was de baan van het schot een rechte lijn. Als je je de baan van een waterstraal voor de geest haalt - denk maar aan een waterpistool, een tuinslang, een brandspuit of een fontein - dan weet je dat die niet rechtlijnig is. Sinds Galileï (1564 - 1642) weten we dat de baan van zo’n waterstraal een parabool is.

het waterpistool

Liggend op de grond schiet iemand met een waterpistool een straal weg onder een hoek van 45^0. De baan van de waterstraal wordt beschreven door de vergelijking $y = x - \frac{1}{5}x^2$, waarbij x de horizontale afstand en y de hoogte in meters voorstellen.

1 **a.** Teken de baan van de waterstraal op het venster [0, 10] bij [0, 5]. Met ZOOM ZoomSqr krijg je gelijke schaalverdeling op de twee assen.
b. Hoe ver van het vertrekpunt raakt de straal weer de grond?

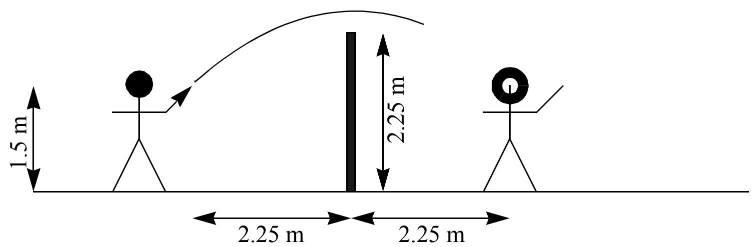
2 Nu wordt wat harder geschoten. In de vergelijking betekent dat dat de constante $\frac{1}{5}$ vervangen wordt door $\frac{1}{7}$.
a. Waar raakt de straal nu de grond?
b. Wat zijn de coördinaten van het hoogste punt van de straal?

3 Vervang de 5 in de eerste formule door enkele andere getallen naar keuze en maak een tabel zoals hieronder.

schuifconstante	punt op de grond	hoogste punt
$\frac{1}{5}$	(5,0)	$(\frac{5}{2}, \frac{5}{4})$

Gebruik het TI-89 programma SCHUIF

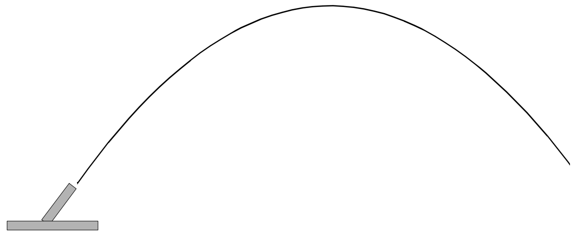
4 In de schets hieronder probeert iemand om met het waterpistool over een schutting te schieten.
a. Voor welke getallen op de stippeltjes van $y = 1{,}5 + x - \frac{1}{\dots}x^2$ geldt dat de straal over de schutting komt?
b. En welk getal moet op de stippeltjes staan om doel te treffen?



5 Op deze pagina staan veel vergelijkingen van de vorm $y = x - \frac{1}{a}x^2$
a. Wat gebeurt er met de grafiek hiervan als a groter wordt?
b. En wat met de top en met de nulpunten?

de tuinsproeier

Een tuinsproeier spuit een straaltje water met een constante kracht onder een bepaalde hoek weg.



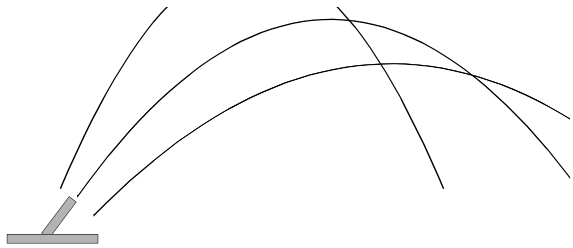
De baan van het water wordt gegeven door de vergelijking

$$y = x - 2x^2$$

6 **a.** Laat de baan van het water tekenen op een kijkvenster van [0, 1] bij [0, 0.5]. Gebruik weer ZOOM Square.

b. Waar treft de straal de grond? En waar bereikt de straal het hoogste punt?

De sproeier draait heel langzaam. Daardoor wordt de straal steil of minder steil de lucht in gespoten.



7 Even later loopt de waterstraal volgens $y = 2x - 5x^2$, en na weer een poos is de vergelijking $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}x^2$.

Laat ook deze banen tekenen en onderzoek de plaats van de nulpunten en de top.

algemene formule

Volgens deskundigen is de algemene formule van de baan van de waterstraal van de tuinsproeier

$$y = a \cdot x - (1 + a^2) \cdot x^2 \text{, waarbij } a \text{ positief is.}$$

gebruik weer SCHUIF

8 **a.** Nu begint de sproeier te draaien en a wordt groter. Wat gebeurt er met de grafiek?

b. Bij welke waarde van a komt het water het verst van de sproeier op de grond?

verschillende rollen

9 In $y = a \cdot x - (1 + a^2) \cdot x^2$ speelt a een andere rol dan x en y.

a. Als a een vaste waarde heeft, kun je een grafiek tekenen met y op de verticale as en x op de horizontale. Wat gebeurt er als de waarde van x varieert?

b. Wat gebeurt er als a van waarde verandert?

3 Een ‘stripverhaal’ van grafieken

In de vorige paragrafen zijn de volgende formules voorgekomen:

$$y = a \cdot x + 5$$

$$y = x - \frac{1}{a}x^2$$

$$y = a \cdot x - (1 + a^2) \cdot x^2$$

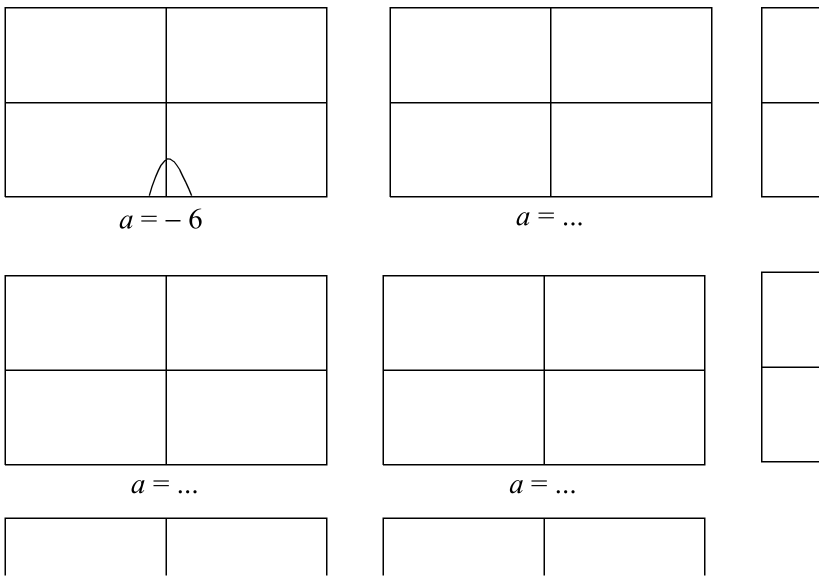
parameter

Behalve de ‘gewone’ variabelen x en y bevatten deze formules nog een extra variabele. Zo’n extra variabele heet een *parameter*. De waarde ervan bepaalt de plaats en/of de vorm van de grafiek. De vraag is nu, hoe die grafiek verandert als de waarde van zo’n ‘schuifparameter’ geleidelijk aan verschuift. Daarover gaan de volgende opgaven.

Kies één van de twee opgaven uit en werk daar met een medeleerling aan. Gebruik daarbij weer het programma schuif van je TI-89. Maak samen een overzichtelijk ‘stripverhaal’ met begeleidende tekst.

1 Gegeven zijn de functies y met $y = x + a \cdot \sqrt{x^2 + 1}$. Hierbij is a een getal dat ook negatief kan zijn, of een breuk.

a. Teken een ‘stripverhaal’ dat weergeeft hoe de grafiek van de functie verandert als a groter wordt:



Maak globale schetsen en zet er steeds bij om welke waarde van a het gaat.

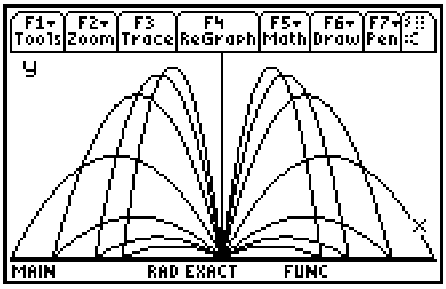
b. Welke waarden van a zijn ‘speciaal’? Waarom?

2 Onderzoek op dezelfde manier functies y met $y = x^4 + b \cdot x^2 + 1$, waarbij b een parameter voorstelt die alle getallen doorloopt.

4 Bundels grafieken

een andere tuinsproeier

Een andere tuinsproeier draait niet, maar bestaat uit een bol met vele gaatjes. De bundel waterstraaltjes vormt een ‘fonteintje’:



1 **a.** Maak dit plaatje na op de TI-89.
De rechterhelft krijg je door grafieken te laten tekenen van functies $y = a \cdot x - (1 + a^2) \cdot x^2$ met $a = \{1, 2, 1/2, 3, 1/3, 4, 1/4\}$.
Neem als kijkvenster [-1/2, 1/2] bij [0, 1/2].
Zie eventueel het TI-89 hulpkader hieronder.
b. De linker helft krijg je door in de formule x door $-x$ te vervangen. Waarom hoef je dat bij x^2 niet te doen?
c. Het lijkt wel of de straal voor $a = 2$ en die van $a = 1/2$ op dezelfde plaats de grond raken. Is dat zo?
d. En hoe zit het met de stralen voor $a = 3$ en $a = 1/3$? En 4 en 1/4?

hulpkader TI-89

Wat wil je?	*Hoe doe je dat met de TI-89?*
Grafieken tekenen van $y = a \cdot x + 3$ voor $a = 1$, $a = 2$ en $a = 3$	kies Y= (♦ F1) Voer in: Y1 = a * X + 3 | a = {1, 2, 3}
Het kijkvenster instellen	WINDOW (♦ F2)
De grafieken laten tekenen	GRAPH (♦ F3)
Over een grafiek lopen	kies F3: TRACE, dan ◄ of ►

2 Laat ook bundels grafieken tekenen bij de vergelijking $y = a \cdot x + b$
a. Voor het geval dat $b = 3$ en a loopt van -5 tot 5 met stappen van 1.
b. Voor het geval dat $a = 1/2$ en b loopt van -1 tot 7.
c. Voor het geval alle lijnen door het punt (1, 3) gaan.

3 **a.** Laat ook een bundel grafieken tekenen bij $y = x - \frac{1}{a} \cdot x^2$.
b. Voeg aan het plaatje de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{2}x$ toe.
c. Wat valt je op?

De formule $y = a \cdot x + 3$ van opgave **2a** staat in feite voor oneindig veel x-y-verbanden.

Bijvoorbeeld: $y = 2x + 3$,

$y = -\frac{1}{2}x + 3$,

$y = 1000x + 3$,

enzovoorts.

Dus $y = a \cdot x + 3$ stelt een hele 'familie' van verbanden voor. De parameter a functioneert als een 'familieparameter'.

een bundel grafieken

Je kunt je een beeld vormen van die hele verzameling verbanden door voor een heleboel waarden van a de grafiek te tekenen. Dat geeft een *bundel grafieken*.

Zo'n bundel kan nooit alle grafieken bevatten; je kiest de waarden van a zo dat het plaatje een indruk geeft van het geheel. Als je alle grafieken tekent, zou het vlak helemaal zwart worden.

4 Hoort $y = -x + 3$ ook bij de 'familie' $y = a \cdot x + 3$?

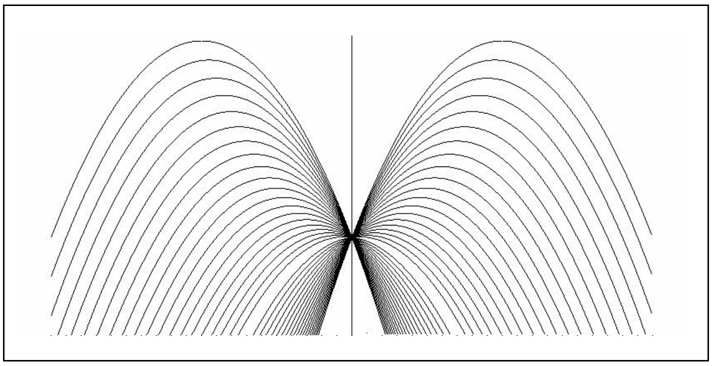
5 Gegeven is de formule $y = a \cdot x - \frac{1}{2}a^2$.

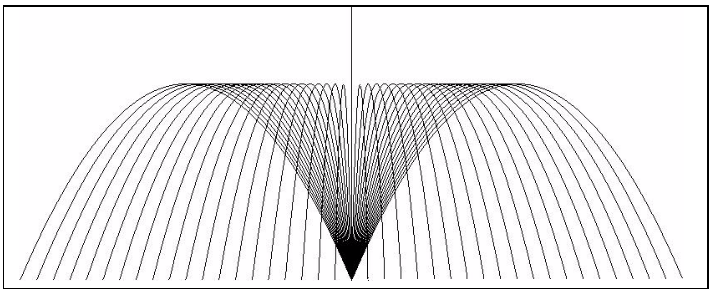
a. Parameter a doorloopt de waarden -5, -4, ..., 4, 5.
Laat de bundel tekenen op het kijkvenster [-10, 10] bij [-10, 10].

b. Door deze lijnen wordt een parabool ingesloten. Welke vergelijking zou die parabool kunnen hebben? Kijk in het scherm of je goed gegokt hebt.

+ opgave

6 Maak zelf enkele andere bundels grafieken die bijvoorbeeld een 'fontein' zouden kunnen voorstellen. Laat je inspireren door de voorbeelden hieronder of door de 'stripverhalen' uit de vorige paragraaf.

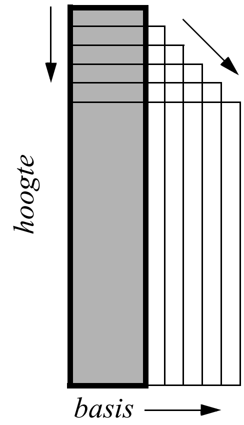




5 Veranderende rechthoeken

een veranderende rechthoek

Hieronder zie je een rechthoek met een omtrek van 12 cm. Meet maar na!



De rechthoek gaat nu van vorm veranderen: de basis wordt groter terwijl de omtrek gelijk blijft. Dat geeft één voor één de gestippelde rechthoeken.

1 **a.** De basis wordt nog groter, bij gelijkblijvende omtrek. Teken nog enkele standen van de rechthoek.
b. Hoe zie je in de tekening dat de omtrek steeds gelijk blijft?
c. De oorspronkelijke rechthoek is smal en hoog. Hoe verandert de vorm tijdens het veranderingsproces?

2 In het begin is de rechthoek smal en hoog, aan het einde breed en laag.
a. Welke afmetingen heeft een rechthoek met omtrek 12 waarvan de basis en de hoogte gelijk zijn?
b. Welke maten heeft de rechthoek met omtrek 12 waarvan de hoogte 2 groter is dan de basis?
c. Hoe ben je aan het antwoord van **b**. gekomen?

3 **a.** Bij welke afmetingen is de hoogte 3 kleiner dan de basis?
b. En bij welke maten is de hoogte 1 groter dan de basis?
c. Stel de hoogte is 5 groter dan de basis. Wat zijn de afmetingen van de rechthoek?
d. Het verschil tussen basis en hoogte is 2.5. Wat zijn de afmetingen?

4 Het wordt saai. Het gaat steeds ongeveer hetzelfde.
Daarom de volgende vragen:
– Hoe los je deze opgaven steeds op? Leg het uit in woorden.
– Werkt je aanpak altijd?
– Kun je het resultaat in formulevorm opschrijven?

5 Stel nu dat de rechthoek een omtrek van 15 cm heeft in plaats van 12.
a. Welke afmetingen heeft de rechthoek dan als de hoogte 5 kleiner is dan de basis?
b. Wat verandert er in de oplossingsmethode die je in de vorige opgave hebt beschreven?

6 De omtrek is nu 1400; de hoogte is 400 minder dan de basis.
Wat zijn de afmetingen van de rechthoek?

eerlijk verdelen

Lang geleden al, rond het jaar 250 na Christus, pakte de Griekse wiskundige Diophantus van Alexandrië dergelijke opgaven aan met *eerlijk verdelen*. Dat gaat zo.

7 Bij de vorige opgave horen de vergelijkingen

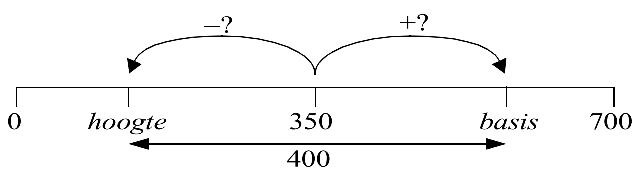
$$2b + 2h = 1400$$
$$b - h = 400$$

a. Ga na dat je de eerste vergelijking ook zo kunt schrijven:

$$b + h = 700$$

b. Verdeel het totaal van 700 eerlijk over b en h. Hoe groot zijn b en h?

c. Bij eerlijk verdelen is het verschil $b - h$ gelijk aan 0 en dat moet 400 zijn. Hoeveel moet je dus vanuit die 350 naar links en naar rechts gaan om b en h te krijgen?



8 Bekijk de bovenstaande tekening bij opgave **7**.

a. Maak ook zo'n plaatje voor het stelsel

$$b + h = 1200$$
$$b - h = 50$$

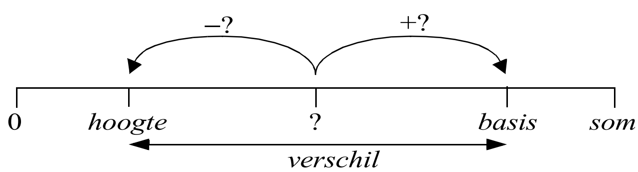
b. En ook voor het stelsel

$$b + h = 1200$$
$$b - h = v$$

het idee van eerlijk verdelen

Het idee van deze aanpak is dus: eerst het totaal eerlijk verdelen, dan is de somvergelijking in elk geval in orde. Dan van daaruit naar links en naar rechts springen om het juiste verschil te krijgen.

9 Stel nu dat de som van basis en hoogte niet gegeven is; zeg maar
basis + *hoogte* = *som*.
Ook het verschil ken je niet: *basis* – *hoogte* = *verschil*.
Hoe wordt het plaatje voor dat geval?



6 De algebraïsche oplossing

overeenkomst

De opgaven van de vorige paragraaf vertonen sterke overeenkomsten; als je er één kent, kun je ze eigenlijk allemaal.
Twee variabelen b en h stellen de basis en de hoogte van een rechthoek voor. Je weet de som $b + h$, zeg maar s.
Ook ken je het verschil $b - h$: dat is v.
Dus:

$$b + h = s \qquad \text{(de } \textit{somvergelijking)}$$

$$b - h = v \qquad \text{(de } \textit{verschilvergelijking)}$$

Als je b en h kent, is het berekenen van s en v een koud kunstje.
Andersom is iets moeilijker: hoe vind je b en h uit $s$en v?
Als je dat weet, heb je een algemeen verband tussen b, h, s en v dat alle voorgaande opgaven in één klap oplost.

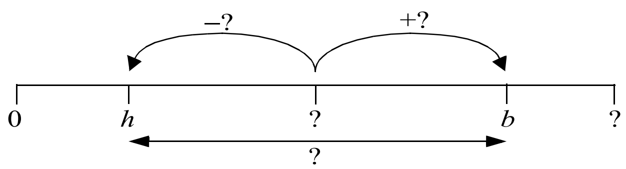
som-verschil probleem

Dit heet het *som-verschil probleem*.

generaliseren

De aanpak van het eerlijk verdelen kun je algemener maken of *generaliseren*, door het toe te passen op het algemene probleem.

1 **a.** Vul in de figuur hieronder voor zoveel mogelijk vraagtekens letters of formules in.



b. Welke oplossing van het som-verschil probleem geeft dit?

2 Eerlijk verdelen van het totaal t geeft: $b = \frac{1}{2}s$ en $h = \frac{1}{2}s$.

Maak nu b iets groter en h iets kleiner:

$$b = \tfrac{1}{2}s + iets \text{ en } h = \tfrac{1}{2}s - iets \text{ .}$$

a. Vul dit met de hand in in de verschilvergelijking. Hoe groot is *iets*?
b. Doe dit ook met de TI-89. Kijk eventueel in het hulpkader hieronder.
c. Bereken uit de oplossing van *iets* de oplossingsformules voor b en h.

hulpkader TI-89

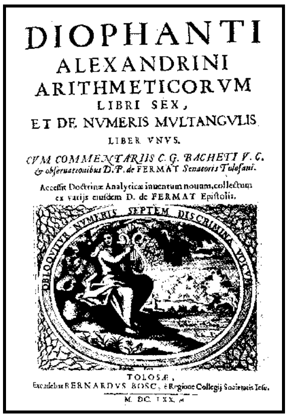
Wat wil je?	*Hoe doe je dat met de TI-89?*
Een substitutie uitvoeren, bijvoorbeeld b in $b - h = v$ vervangen door $s/2 + iets$	voer in: b - h = v | b = s/2 – iets sluit af met ENTER Lees de verticale streep | als ‘met’ of ‘waarbij’

3 Substitueer de gegevens van opgave **6** van de vorige paragraaf in de gevonden algemene oplossing. Klopt het?

4 Wat is volgens jou de belangrijkste conclusie van deze pagina?

historische noot: Diophantus en Viète

Het som-verschil probleem is al beschreven door de Griekse wiskundige Diophantus van Alexandrië, zo rond het jaar 250 na Christus, maar hij zette getallen op de plaats van *s* en *v*. Pas rond 1600 formuleerde de Fransman Viète de oplossing in de symbolische, algebraïsche vorm die je nu ook hebt gevonden.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

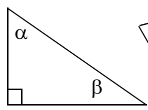
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

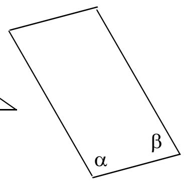
de kracht van algebra

Door de algemene aanpak met de letters *s* en *v* in plaats van getallen, zie je goed dat alle problemen uit deze en de vorige paragraaf op hetzelfde neerkomen. De algemene formule geeft het verband tussen *b*, *h*, *s* en *v*. Hiermee is het probleem voor alle mogelijke waarden van *s* en *v* opgelost. Ook kun je in alle gevallen de antwoorden vinden, door voor *s* en *v* de juiste getallen in te vullen. Dat is de kracht van de algebra. Gebruik die in de volgende opgaven.

5 Simone en haar moeder zijn samen 65 jaar. Ze schelen 35 jaar.
Hoe oud is Simone?

6 **a.** Zie de rechthoekige driehoek hiernaast. Hoek α is 20^0 groter dan hoek β. Hoe groot zijn deze hoeken?
b. In het nevenstaande parallellogram geldt: hoek α is 30^0 groter dan hoek β. Hoe groot zijn nu deze hoeken?



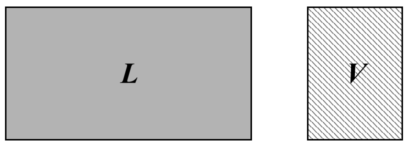


7 Los de volgende stelsels vergelijkingen op:

a. $z + t = 54321$, $z - t = 12345$ **b.** $m + n = 190$, $n = 20 + m$ **c.** $x + y = a^2$, $x - y = b^2$

$$\begin{aligned} z + t &= 54321 \\ z - t &= 12345 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} m + n &= 190 \\ n &= 20 + m \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= a^2 \\ x - y &= b^2 \end{aligned}$$

8 Hoe kun je een rechthoekig stuk land *L* in twee delen verdelen zodat het verschil tussen de oppervlakte van de twee stukken gelijk is aan de oppervlakte van *V*?



9 Los de volgende stelsels vergelijkingen op:

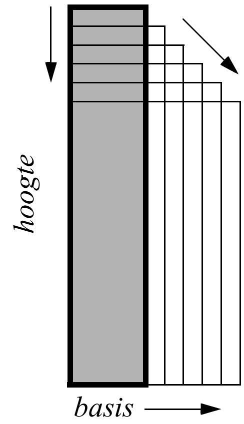
a.
$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 84 \\ 2x - 2y &= 20 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 100 \\ 5x - 2y &= 40 \end{aligned}$$

7 Omtrek en oppervlakte

de veranderende rechthoek

Hieronder zie je weer de rechthoek uit paragraaf 5. De omtrek is 12 cm, en blijft dat ook terwijl de basis toeneemt en de hoogte kleiner wordt.



constante omtrek betekent niet constante oppervlakte

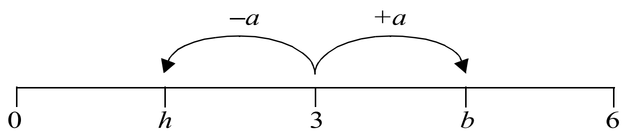
1 **a.** Bereken de oppervlakte voor enkele standen van de rechthoek. Blijft die ook gelijk tijdens het veranderingsproces, net als de omtrek?
b. Hoe verandert de oppervlakte terwijl de basis groter wordt en de hoogte kleiner?

2 **a.** Denk je dat er een stand van de rechthoek is waarin de oppervlakte 7 (cm^2) is? Welke afmetingen heeft de rechthoek dan ongeveer?
b. Op welke manier heb je de vorige vraag aangepakt?

weer eerlijk delen

Je zou weer eerlijk kunnen gaan delen. Bij een omtrek van 12 betekent dat *basis* = *hoogte* = 3. Dat geeft een oppervlakte van 9 cm^2. De vraag is nu hoe je b en h moet aanpassen om een oppervlakte van 7 cm^2 te krijgen. Dan kun je b een stukje, zeg a, groter maken en h evenveel kleiner.

3 **a.** Zie onderstaande tekening. Kun je de oppervlakte uitdrukken in a?



b. Welke afmetingen van de rechthoek vind je zo?

4 **a.** Kan de oppervlakte gelijk zijn aan 6 cm^2? Bij welke afmetingen?
b. Is een oppervlakte van 12 cm^2 mogelijk?

5 **a.** Welke rechthoek met omtrek 60 heeft oppervlakte 200?
b. Welke rechthoek met omtrek 2000000 heeft oppervlakte 1?

6 Terug naar het oorspronkelijke probleem: de omtrek is 12 cm en de oppervlakte is 7 cm^2. Welke vergelijkingen kun je hierbij opstellen?

Het stelsel vergelijkingen bij het oorspronkelijke probleem is:

$$b + h = 6$$

en $$b \cdot h = 7\ ,$$

waarbij b de basis voorstelt en h de hoogte van de rechthoek.

som-product probleem

Van b en h zijn dus de som en het product bekend. Daarom heet dit het *som-product probleem*.

algemene formulering

In het algemeen geldt voor rechthoeken met een vaste omtrek het volgende verband tussen de basis b en de hoogte h:

$$b + h = s \qquad \text{(de } \textit{somvergelijking)}$$

Hierbij is s gelijk aan de helft van de omtrek.
Voor de oppervlakte, zeg p, geldt dan:

$$b \cdot h = p \qquad \text{(de } \textit{productvergelijking)}$$

Nu de oplossing van dit gegeneraliseerde som-product probleem.
Eerlijk verdelen van de omtrek betekent hier dat $b = h = \frac{1}{2}s$, dus dat de rechthoek een vierkant is. Als nu de basis een stukje, zeg *a,* groter wordt en de hoogte a kleiner, dan ontstaat de volgende figuur:

7 **a.** Substitueer met de hand in de productvergelijking
$b = \frac{1}{2}s + a$ en $h = \frac{1}{2}s - a$.
b. Los de vergelijking op die je zo krijgt.
c. Welke uitdrukkingen vind je zo voor b en h?
d. Schrijf de uitdrukkingen voor b en h zo, dat $s^2 - 4p$ onder het wortelteken staat.

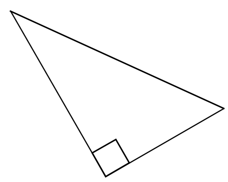
8 **a.** Voer de procedure van de vorige opgave uit met de TI-89.

maximale oppervlakte

b. Hoe kun je aan de formule voor de oppervlakte na substitutie zien dat eerlijk verdelen van de omtrek de maximale oppervlakte geeft?

9 Schrijf de belangrijkste conclusie van deze paragraaf in je schrift.

10 Iemand heeft in de tuin een zwembad in de vorm van een rechthoekige driehoek. De oppervlakte ervan is 150 m^2. De twee rechthoekszijden samen 35 meter lang zijn. Welke afmetingen heeft het bassin?



11 Met een touw van 1000 meter lengte mag je een stuk van een veld afgrenzen. Het moet wel een rechthoekig terreintje worden. Welke oppervlakte heeft het grootste stuk grond dat je op deze manier kunt omheinen?

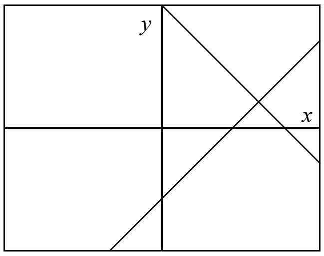
8 Grafieken en andere oplosmethoden

In de vorige paragrafen zijn het som-verschil-probleem en het som-product-probleem aangepakt met de methode van het eerlijk verdelen.
Hierbij ga je in deze paragraaf grafieken tekenen en dat leidt tot andere manieren deze problemen aan te pakken.

1 Eerst het som-verschil-probleem.
Van twee grootheden, x en y, is de som 700 en x is 400 groter dan y:

$$x + y = 700$$
$$x - y = 400$$

a. Om bij deze opgave grafieken te laten tekenen, moet je eerst y uitdrukken in x. Schrijf beide vergelijkingen dus in de vorm $y = \dots$.
b. Laat de bijbehorende grafieken tekenen.



c. Benader de coördinaten van het snijpunt van de grafieken.
d. Hoe zou je nu met de vergelijkingen in de vorm $y = \dots$ verder gaan om x en y te berekenen?

2 Met de hand kun je opgave **1** als volgt aanpakken.
a. Schrijf de eerste vergelijking in de vorm $y = \dots$.
b. Vul in de tweede vergelijking voor y in de uitdrukking $700 - x$ in.
c. Los nu de opgave verder op.
d. Herhaal deze aanpak, maar nu met de TI-89 in plaats van met de hand. Kijk eventueel in het hulpkader hieronder.

oplossen naar, isoleren substitueren

Met solve op de TI-89 kun je een vergelijking zo schrijven, dat een bepaalde variabele (hierboven de y) in z'n eentje aan één kant komt te staan. Dan is die variable uitgedrukt in de andere(n). De vergelijking is *opgelost naar* y, en y is *geïsoleerd*. Met | kun je een variabele vervangen door een formule. Dat heet *substitueren*.

hulpkader TI-89

Wat wil je?	*Hoe doe je dat met de TI-89?*
Een variabele in een uitdrukking isoleren, bijvoorbeeld y oplossen in $x+y = 700$	kies F2 optie 1: solve vul aan tot: solve(x + y = 700, y) sluit af met ENTER
Een substitutie uitvoeren, bijvoorbeeld y in $x - y = 400$ vervangen door $700 - x$	voer in: x - y = 400 | y = 700 – x sluit af met ENTER Lees de verticale streep | als 'met' of 'waarbij'

3 Generaliseer je aanpak van opgave **1** naar het algemene som-verschil probleem

$$x + y = s$$
$$x - y = v$$

4 Terug naar het som-product probleem $b + h = 6$ en $b \cdot h = 7$.
- **a.** Schrijf de twee vergelijkingen in de vorm $h = \ldots$ en laat de grafieken tekenen op een geschikt kijkvenster.
- **b.** Hoe kun je met deze geïsoleerde vormen b en h vinden?
- **c.** Wat gebeurt er in het plaatje als de oppervlakte 7 vervangen wordt door een 8?
- **d.** Hoe ziet het plaatje eruit als de 7 gegroeid is tot 9?

5
- **a.** Isoleer h in de eerste vergelijking met de hand en substitueer het resultaat in de tweede vergelijking. Welke vergelijking in b krijg je zo?
- **b.** Los deze vergelijking met behulp van de TI-89 op naar b.
- **c.** Voer de procedure van vraag **a** en **b** nog eens uit, maar nu helemaal op de TI-89, dus het isoleren, het substitueren en het oplossen.

generaliseren

Generaliseren van het som-product-probleem geeft:

$$b + h = s$$
$$b \cdot h = p$$

6
- **a.** Isoleer h in deze vergelijkingen.
- **b.** Gebruik de geïsoleerde vorm om het stelsel op te lossen.

Er zijn twee andere manieren naast het eerlijk verdelen om zulke stelsels vergelijkingen op te lossen: isoleren-gelijkstellen-oplossen en isoleren-substitueren-oplossen. Hieronder staan ze in schema.

isoleren - gelijkstellen - oplossen

	$b \cdot h = 7$	$b + h = 6$
Isoleren (allebei):	$h = 7 / b$	$h = 6 - b$
Gelijkstellen:	$7 / b = h = 6 - b$	
Oplossen:	solve($7 / b = 6 - b$, b)	

isoleren - substitueren - oplossen

	$b \cdot h = 7$	$b + h = 6$
Isoleren (eentje):	$b \cdot h = 7$	$h = 6 - b$
Substitueren:	$b \cdot h = 7 \mid h = 6 - b$	
Oplossen:	solve($b \cdot (6 - b) = 7$, b)	

7 Los het algemene som-product-probleem op met de methode van Isoleren - Substitueren - Oplossen.

9 Verschillende methodes naast elkaar

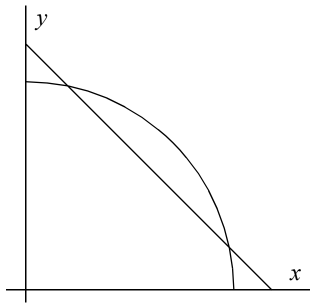
rode draad In dit boekje heb je eerst onderzocht welke invloed de waarde van een parameter heeft op een grafiek en op kenmerken daarvan zoals nulpunten en toppen. Dat gebeurde door het tekenen van ‘stripverhalen’ en van bundels. De parameter is zo een middel om een hele verzameling grafieken of een hele klasse van problemen voor te stellen.
Daarna zijn het som-verschil-probleem en het som-product-probleem op drie manieren aangepakt: eerst door eerlijk verdelen en later door isoleren-gelijkstellen-oplossen en isoleren-substitueren-oplossen. De TI-89 kan bij deze methoden gebruikt worden voor het oplossen van vergelijkingen en voor het substitueren.
Door de problemen met parameters te formuleren, kun je algemene verbanden vinden tussen de verschillende grootheden. Daarmee kun je de problemen voor eens en voor altijd oplossen: als je er ééntje kunt, kun je ze allemaal. Dat is de kracht van de algebra.

Hieronder worden de belangrijkste bevindingen samengevat:

Probleem	***Vergelijkingen***	***Oplossing***
som-verschil	$x + y = s$	$x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}v$
	$x - y = v$	$y = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}v$
som-product	$x + y = s$	$x = \frac{1}{2}s \pm \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - 4p}$
	$x \cdot y = p$	$y = \frac{1}{2}s \mp \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - 4p}$.

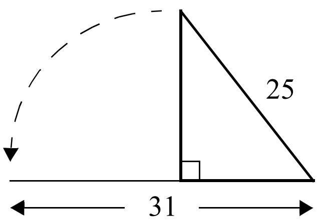
In deze paragraaf kom je vergelijkbare problemen tegen. Probeer ze op verschillende manieren op te lossen. De algebra wordt geleidelijk aan iets moeilijker, zodat het gebruik van computeralgebra meer de moeite waard is dan hiervoor.

1 Hiernaast staan de grafieken van $y = 31 - x$ en $y = \sqrt{625 - x^2}$. Gevraagd zijn de coördinaten van de snijpunten van de twee grafieken.
a. Substitueer met de hand de eerste vergelijking in de tweede.
b. Los de resulterende vergelijking op met de TI-89.
c. Controleer je antwoorden in de grafiek.

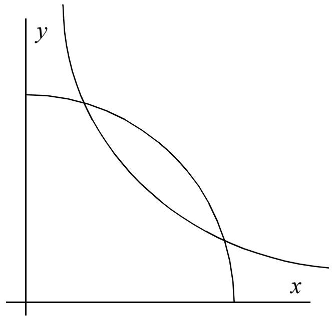


2 **a.** Los het probleem van de vorige opgave ook op met eerlijk verdelen.
b. Wat gebeurt er met de lijn met vergelijking $y = b - x$ als b eerst 31 is en dan groter wordt?
c. Voor welke waarde van b raakt de lijn nog net aan de kwart cirkel?

3 Twee rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek zijn samen 31 lang. De schuine zijde heeft een lengte van 25.
a. Hoe lang zijn de rechthoekszijden?
b. Hoe lang zijn de rechthoekszijden als ze samen 35 zijn in plaats van 31?
c. Los het probleem in het algemeen op, dat wil zeggen zonder dat de getallen 31 en 25 gegeven zijn.



4 Gegeven zijn de vergelijkingen
$x^2 + y^2 = 25$ en $x \cdot y = 10$.
a. Isoleer beide vergelijkingen en laat grafieken tekenen.
b. Los het stelsel op.
c. Wat is het grootste getal dat in plaats van 10 kan worden ingevuld, zodat het stelsel nog net een oplossing heeft?



historische noot:
De Babyloniërs

Hierboven zie je een Babylonische kleitablet waarin spijkerschrift is geschreven, toen de klei nog nat was. Dit tablet is waarschijnlijk tussen 1900 en 1600 voor Christus gemaakt.
Sommige van dergelijke tabletten bevatten wiskundige problemen, bijvoorbeeld in de stijl van:
Van een rechthoekig stuk land kennen we de oppervlakte (540 m^2) en de lengte van de diagonaal (39 m). Bereken de afmetingen van het stuk land.

5 Probeer deze opgave op twee manieren op te lossen.

6 Een ander Babylonisch probleem, op eigentijdse manier geformuleerd:
Voor welke waarden van x en y geldt dat

$$x + y = 28$$

en

$$x - y + x \cdot y = 183 \text{ ?}$$

10 Kwadratische vergelijkingen

In de vorige paragrafen leidde het som-product-probleem tot vergelijkingen waar een kwadraat in voor komt, zoals $x^2 - 31x + 168 = 0$ of $x^2 - 30x + 211 = 0$.

kwadratische vergelijkingen

Zulke vergelijkingen, die *kwadratische vergelijkingen* heten, zijn moeilijker op te lossen dan lineaire vergelijkingen zoals $3x - 5 = 0$; je moest tot nu toe voor de meeste kwadratische vergelijkingen de TI-89 gebruiken. Deze paragraaf gaat over het oplossen van kwadratische vergelijkingen.

1 Probeer in de volgende vergelijkingen de oplossingen te ‘zien’ en gebruik de TI-89 ter controle.

a. $(x-3) \cdot (x-4) = 0$
b. $(x-5) \cdot (x+1) = 0$
c. $(x+70) \cdot (x+30) = 0$
d. $(x-3) \cdot (x-4) = 12$
e. $(x-5) \cdot (x+1) = 7$
f. $(x+1)^2 = 0$

2 **a.** De vergelijking $(x-327) \cdot (x-531) = 8973$ is moeilijk op te lossen, terwijl $(x-327) \cdot (x-531) = 0$ eenvoudig is. Verklaar dit.
b. Leg uit hoe je de oplossingen vindt van een vergelijking van de vorm $(x + ...) \cdot (x + \_\_\_) = 0$.
c. Bedenk een kwadratische vergelijking die je zelf zonder TI-89 kunt oplossen en leg die aan een medeleerling voor.

3 **a.** Los uit je hoofd op: $(x+13) \cdot (x+8) = 0$.
b. Werk in onderstaande keertabel $(x + 13) \cdot (x + 8)$ uit.

$\times$	x	13
x		
8		

c. Controleer je uitwerking met de TI-89. Gebruik expand.
d. Nu kun je de moeilijk uitziende vergelijking $x^2 + 21x + 104 = 0$ ook wel oplossen.

4 Om $x^2 + 6x + 8 = 0$ op te kunnen lossen, zou je deze vergelijking dus willen schrijven in de vorm $(x + ...) \cdot (x + \_\_\_) = 0$.
a. Probeer twee getallen te vinden die op ... en ___ moeten staan.
b. Wat zijn de oplossingen van de vergelijking?
c. Controleer je antwoord met de TI-89.

5 Schrijf de volgende vergelijkingen met het factor-commando van de TI-89 in de vorm (x ±ðŠ± ...) · (x ± ___) = 0 en los ze op.

a. $x^2 + 11x + 30 = 0$
b. $x^2 - \frac{13}{2} \cdot x - \frac{7}{2} = 0$
c. $x^2 - 26x + 165 = 0$
d. $x^2 + 2x - 62499 = 0$
e. $x^2 - 558009 = 0$
f. $x^2 - 5x = 6$

6 **a.** Nu generaliseren naar een algemenere vorm.
Werk $(x + ■) \cdot (x + ●)$ uit met onderstaande keertabel.

×	x	■
x		
●		

b. De TI-89 werkt met letters in plaats van symbolen.
Werk op deze machine dus $(x + p) \cdot (x + q)$ uit.
c. Als $(x + p) \cdot (x + q) = x^2 + 10x + 20$, wat weet je dan van p en q?
d. Welk bekend probleem zie je zo terug?

7 **a.** Als $(x + p) \cdot (x + q) = x^2 + b \cdot x + c$, wat weet je dan van het verband tussen p, q, b en c?
b. Probeer p uit te drukken in b en c en doe hetzelfde voor q.

de kwadratische vergelijking in het algemeen

De vergelijking $x^2 + b \cdot x + c = 0$ is een kwadratisch vergelijking in algemene vorm. Als die geschreven kan worden als $(x + p) \cdot (x + q) = 0$, dan is de oplossing niet ver meer.
Als $(x + p) \cdot (x + q) = x^2 + b \cdot x + c$, dan volgt uit de keertabel dat:

$$p + q = b$$

$$p \cdot q = c$$

weer som en product

Maar dat is het som-product-probleem dat eerder opgelost is!

8 **a.** Bepaal formules voor p en q in het som-product-probleem.
Doe dat zowel met de hand als met de TI-89.
b. Wat zijn dus de oplossingen van de vergelijking $x^2 + b \cdot x + c = 0$?
c. Controleer je antwoord door $x^2 + b \cdot x + c = 0$ ineens met de TI-89 op te lossen.

9 Pas het gevondene toe op de volgende vergelijkingen:
a. $x^2 - 4x - 1 = 0$
b. $x^2 - 6x + 2 = 0$
c. $x^2 + 100x - 24 = 0$
d. $x^2 - 17 = 0$
e. $x^2 - 40x = 355$
f. $x^2 + x + 1 = 0$

conclusie

De belangrijke conclusie van deze paragraaf is:
De oplossingen van de vergelijking $x^2 + b \cdot x + c = 0$ zijn

$$x = -\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}$$

en

$$x = -\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}$$

+ opgave

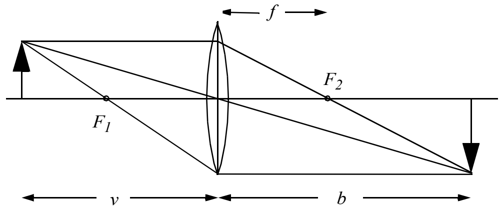
10 **a.** Aan welke voorwaarde moeten b en c voldoen, wil de vergelijking $x^2 + b \cdot x + c = 0$ een oplossing hebben?
b. Wat weet je van b en c als de vergelijking $x^2 + b \cdot x + c = 0$ niet twee maar één oplossing heeft?

11 Extra opgaven

1 Om kijkend door een lens een scherp beeld van een voorwerp te krijgen (denk aan fotograferen of aan een verrekijker), moeten de afstand van het voorwerp tot de lens en die van het beeld met elkaar in overeenstemming zijn. Als de voorwerpsafstand v is, de beeldafstand b, en de brandpuntsafstand van de lens f, dan geldt theoretisch het volgende verband:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$$

Dit is de zogenaamde *lenzenformule* uit de natuurkunde.



a. Herschrijf de lenzenformule in een vorm waarin je ziet hoe b van v en f afhangt.

b. Laat grafieken tekenen van b als functie van v, voor $f = 1$, $f = 2$, $f = 3$, $f = 4$ en $f = 5$.

c. Hoe verandert de grafiek van b als functie van v als f groter wordt?

2 Nog een maal de oppervlakte van rechthoeken met een vaste omtrek $2s$. Als x de basis is en y de hoogte, en de omtrek is $2t$, dan geldt voor de oppervlakte p:

$$p = x \cdot y = x \cdot (s - x)$$

a. Laat grafieken van de oppervlaktefunctie tekenen voor de gevallen $s = 1$, $s = 2$, ..., tot $s = 8$.

+ opgave **b.** De toppen van deze grafieken liggen op een kromme. Welke vergelijking heeft deze kromme?

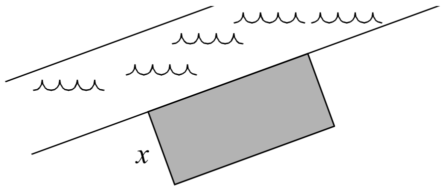
+ opgave **3** Kijk nog eens terug naar opgave 3 van paragraaf 4.
Kun je ook met algebra aantonen dat de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{2}x$ door de toppen gaat van de grafieken van $y = x - \frac{1}{a} \cdot x^2$?

+ opgave **4** Kijk nog eens terug naar opgave 1 van paragraaf 4.
Bewijs dat algemeen geldt dat de stralen voor een bepaalde van a-waarde en die van het omgekeerde daarvan (dus $1/a$) in het zelfde punt de grond raken.

5 Los het volgende stelsel vergelijkingen op twee manieren op:

$$x - y = v$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

6



Langs een kanaal ligt een weiland. Met een touw van 500 meter lengte wordt hiervan een rechthoekig stuk afgezet, dat grenst aan het kanaal.

a. Noem de lengte van de zijde die loodrecht op het kanaal staat x. Welke afmetingen heeft het afgezette stuk als de oppervlakte 30000 vierkante meter is?
b. En als de oppervlakte 20000 is?
c. En als de oppervlakte p is?
d. Welke waarden kan de oppervlakte aannemen?

7 Nog steeds over het weiland aan het kanaal.
a. Bedenk een formule die aangeeft hoe de oppervlakte afhangt van x.
b. Laat de grafiek van de oppervlaktefunctie tekenen en lees daaruit af hoe groot de maximale oppervlakte ongeveer is.
c. Bij welke afmetingen is de oppervlakte maximaal?

+ opgave **8** Een parabool heeft de vergelijking $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + 3$.
Het punt (1, 7) ligt op deze parabool, dus $7 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3$.
Ook het punt (–1, 1) ligt op de parabool.
a. Probeer op het oog waarden voor a en b te kiezen zodat de parabool door de twee gegeven punten gaat.
b. Ga na dat $a + b = 4$ en $a - b = -2$.
c. Hoe groot zijn a en b?
d. Controleer je antwoord met een grafiek.

+ opgave **9** **a.** De ribben van twee kubussen zijn samen 20 lang. De totale inhoud van beide kubussen is 2240. Hoe groot is de ribbe van de grootste kubus?
b. De som van twee getallen is t en de som van hun derdemachten is d.
Druk die getallen uit in t en d.
Schrijf de formules in zo eenvoudig mogelijke vorm.
c. Welke waarden kan de totale inhoud d aannemen?