Introductie TI-89

Algebra leren in een
computeralgebra omgeving
Freudenthal Instituut

Introductie TI-89

Project: Algebra leren in een computeralgebra omgeving
Klas: VWO 3
Staat: Eerste versie, januari 2001
Ontwerp: Paul Drijvers

Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, tel. 030-2611611

Inhoud

1 Rekenen

1.1 Kijken naar de TI-89

Op deze pagina begin je met goed te kijken naar de TI-89.
Je leert hoe je de leesbaarheid van het scherm kunt verbeteren.
Je ziet dat betekenis van een toets verandert als je eerst op de oranje, de groene of de paarse toets drukt.

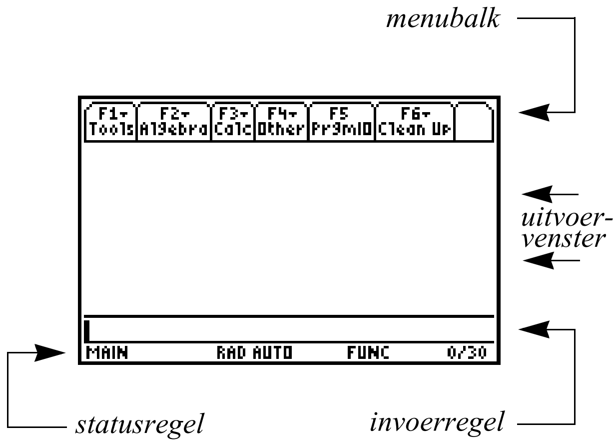
Bekijk de voorkant van de TI-89 eens goed. Meteen onder het beeldscherm zie je de functie-toetsen F1, F2, ... , F5. Daar rechts onder zitten de vier pijltjestoetsen ►, ◄, ▼ en ▲. Daarmee kun je de cursor besturen. Helemaal linksonder zie je de knop ON, waarmee je de machine aan zet. Met ENTER, helemaal rechtsonder, sluit je opdrachten af.

1 Zet de machine aan met ON.

2 Het kan zijn dat het scherm niet goed leesbaar is. Dan staat het te donker of te licht afgesteld. Houd het groene ‘diamantje’ ♦ ingedrukt en druk gelijktijdig een aantal keren op – of op +, net zolang tot je een helder beeld krijgt.

Je ziet nu een leeg scherm, het zogenaamde *Home-scherm*. De bovenste regel, de *menubalk*, bevat de menu's die met de functietoetsen F1, F2, ..., F6 geopend kunnen worden.
Daaronder zie je het *uitvoervenster*, waarin de uitkomsten en de grafieken komen te staan. Daaronder volgt de *invoerregel*, waarin de cursor knippert. De onderste regel is de *statusregel*.

Je zet de machine uit met OFF. Dat staat met kleine oranje letters linksboven de ON-toets. Dat betekent dat je eerst op de oranje 2nd-toets moet drukken en dan op ON, om de opdracht OFF te geven.



3 Zet je machine uit en vervolgens weer aan.

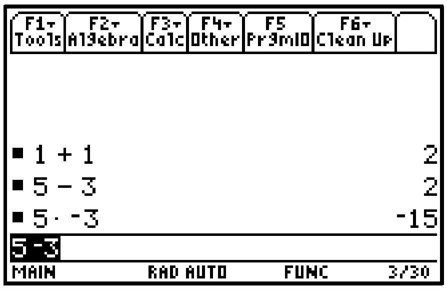
4 Als je eerst op de paarse alpha-toets drukt, krijg je daarna de paarse letters die rechtsboven de toetsen staan. Probeer maar eens je naam in te typen. Een foute letter kun je met ⟵ weghalen.

5 Wis je naam met CLEAR

1.2 Rekenen

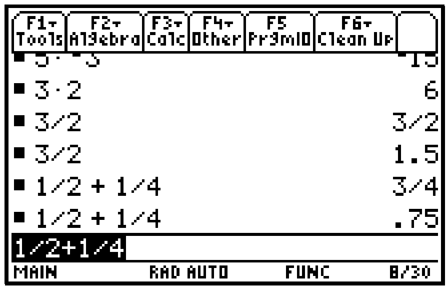
Met de TI-89 kun je natuurlijk rekenen, maar sommige zaken worden anders opgeschreven dan je gewend bent. De machine schrijft bijvoorbeeld .75 in plaats van 0,75.
Let op: Er zijn twee min-tekens.
Gebruik de schermen naast de opgaven om jezelf te controleren.

6 Voer in: 1+1. Dit verschijnt in de invoerregel. Druk dan op ENTER.
Je ziet dat het 'sommetje' nu links in het uitvoervenster wordt gezet. De uitkomst staat rechts. De uitdrukking 1+1 is opnieuw in de invoerregel gezet.



7 Voer 5 – 3 in met de zwarte mintoets, ENTER. Voer ook 5 – 3 in met de grijze toets waar (–) op staat. ENTER geeft nu een ander antwoord omdat de grijze (–) voor negatieve getallen staat. De TI-89 leest daarvoor dan 5x -3.

8 Typ in: 3 x 2, weer gevolgd door ENTER. Zodra je op de 3 drukte, verdween de vorige opdracht in de invoerregel. Nu staat er 3*2.
In het uitvoervenster wordt de x met een punt aangegeven.



9 Nu staat 3 * 2 in de invoerregel.
Spring met ▶ naar het einde van de regel.
Ga met ◀ tussen het * en de 2 staan.
Haal met ⟵ het sterretje * weg.
Voer in plaats daarvan in: ÷. Dat je met ENTER af moet sluiten, weet je nu wel.
In het uitvoerscherm wordt de deling aangegeven met een schuine streep, /.

10 De opgave 3/2 staat al weer in de invoerregel. Sluit nu af met ≈ (spreek uit als "is ongeveer gelijk aan"). ≈ is de groene betekenis van ENTER, dus ♦ ENTER. Dat geeft het kommagetal 1,5 maar de machine schrijft 1.5.

11 Je kunt ook breuken optellen.
Bereken 1/2 + 1/4 . Laat het antwoord ook als komma-getal schrijven.
De machine schrijft .75 in plaats van 0.75.

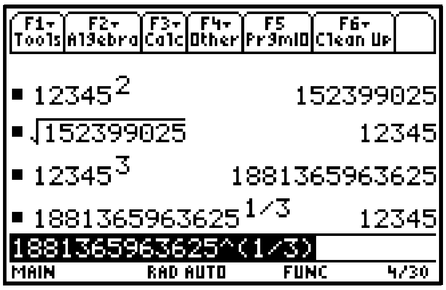
12 Druk om het scherm schoon te maken op F1. Je ziet een menu openrollen.
Kies optie 8: Clear Home.

1.3 Rekenen met Ans

Met de cursor kun je uitkomsten weer naar de invoerregel halen. Om bewerkingen te herhalen, kun je ans *gebruiken.* Ans *is het antwoord van de vorige berekening. Zoals bij elke rekenmachine moet je bij de TI-89 letten op het zetten van haakjes.*

13 Voer in: 12345^2. In het uitvoerscherm wordt het kwadraat mooi weergegeven.

14 Om van de uitkomst weer de wortel te trekken, typ je eerst het wortelteken in met 2nd X. Druk dan op ▲.
De cursor springt nu naar het getal op de onderste regel van het uitvoerscherm.
Druk op ENTER om deze naar de invoerregel te copiëren. Haakje sluiten, ENTER, klaar.



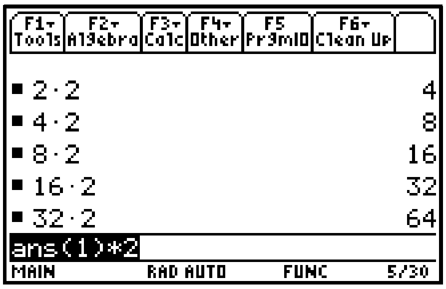
15 Bereken ook de derdemacht van 12345.

16 Om van de uitkomst de derdemachts wortel te berekenen, moet je eerst weer het antwoord naar de invoerregel copiëren.
Voeg dan toe: ^(1/3).

17 Maak het scherm weer schoon met F1 optie 8.

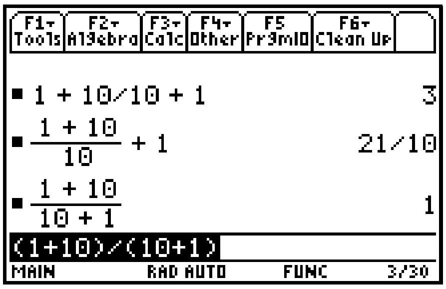
18 Bereken 2 x 2.

19 Druk op x.
In de invoerregel verschijnt: ans(1)*.
Ans staat voor 'answer', het antwoord van de laatst uitgevoerde berekening.
Voeg een 2 toe, en sluit af met ENTER.
Voor ans(1) vult de TI-89 dus 4 in.



20 Druk nog drie keer op ENTER. De machine vult voor ans(1) steeds het laatste antwoord in. Zo wordt het verdubbelen herhaald.

21 Voer in: 1+10/10+1. De uitkomst is 3.
Zet in de invoerregel haakjes: (1+10)/10+1.
Bereken ook (1+10)/(10+1) en 1+10/(10+1).



22 Welke uitkomsten kun je krijgen door in
1 + 2 / 3 x 4 haakjes te zetten?

23 Zet de machine uit.

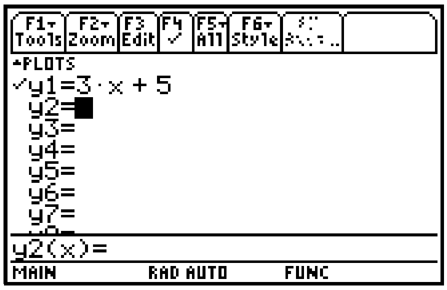
2 Tabellen

2.1 Tabellen maken

Met de TI-89 kun je tabellen van functiewaarden maken.
Daarvoor moet je eerst een formule invoeren in het functiebestand.
Met de pijltjestoetsen kun je door een tabel lopen.
Het startgetal en de stapgrootte van de tabel kun je instellen.

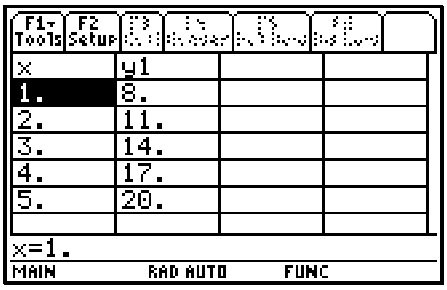
1 Kies Y= door eerst op het diamantje ♦ te drukken en dan op functietoets F1.
Je ziet nu het zogenaamde *functiebestand*, een lijst waarin je functies kunt invoeren, die genummerd zijn: y1, y2, y3, ...

2 De cursor staat bij functie y1.
Voer daar in: 3x + 5. Sluit af met ENTER.
Voor de x zit er een aparte toets op de TI-89: de eerste van rij 5.
De *v* voor y1 (het ‘vinkje’) geeft aan dat de functie ‘actief’ is.

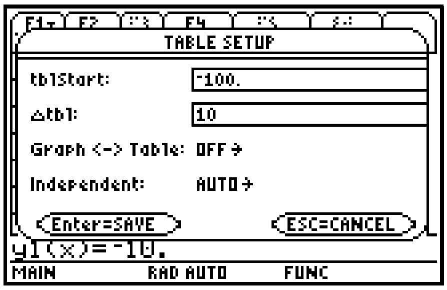


3 De groene betekenis van functietoets F5 is TABLE. Dat betekent tabel.
Laat dus een tabel maken met ♦ F5.
Je krijgt nu een tabel met waarden van x en van y1(x).

4 Loop met de pijltjestoetsen door de tabel heen. Je kunt de tabel ook omhoog schuiven. Zoek bijvoorbeeld in de tabel de y-waarde bij x = –5.



5 Druk op F2: Setup. Hiermee kun je de instelling van de tabel regelen.
Vul het scherm in zoals hiernaast en verlaat het met ENTER. De tabel begint nu bij x = –100 en x loopt met stappen van 10.



6 Zet de cursor in de tweede kolom en druk op F4 . Je krijgt de formule te zien.
Verlaat dit met ESC (‘escape’) of ENTER.
Vaak is ESC geschikt om een scherm te verlaten zonder iets te veranderen.

7 De y-waarde bij x = –100 is dus –295. Dat kun je ook in het HOME-scherm berekenen.
Druk op de HOME-toets.
Voer in: y1(–100). De y-toets vind je naast de x-toets in rij 5. Denk aan de goede min!

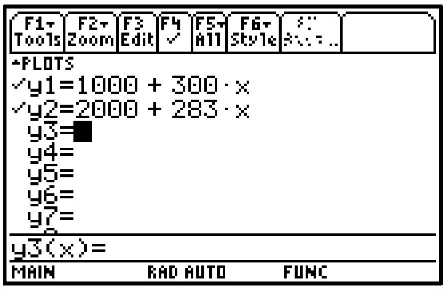
2.2 Winnende formules

Je kunt tabellen ook gebruiken om twee formules te vergelijken: welke geeft de grootste y-waarde?
Door de stapgrootte te verkleinen, kun je het omslagpunt nauwkeuriger benaderen. In de volgende paragraaf zul je zien, dat je daarvoor ook grafieken kunt gebruiken.

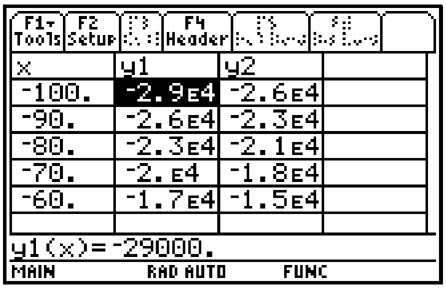
8 Ga met Y= naar het functiebestand.
Zet de cursor in de regel van y1 en wis de formule die daar staat met CLEAR.

9 Voer twee nieuwe formules in:

y1 = 1000 + 300x
y2 = 2000 + 283x



10 Maak een tabel met TABLE.
Als de instelling van opgave 5 nog van kracht is, staan in de tabel getallen zoals -2.9E4.
Als je de cursor daarop zet, zie je onder in beeld wat dat betekent: -29000, dus $-2.9*10^4$.
Dit is de zogenaamde *wetenschappelijke notatie*, waarbij de E staat voor exponent: het getal na de E is de exponent van 10.

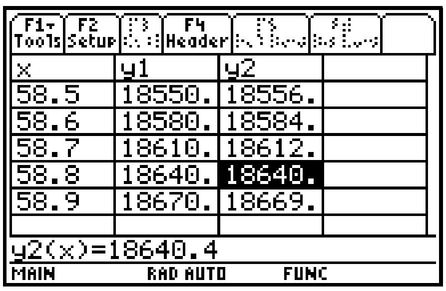


11 Verander de instelling zodat de tabel begint met x=0.

12 Het lijkt erop of y2 groter is dan y1. Ga in de tabel na of dat ook zo blijft als x groter wordt.

13 Tussen x=50 en x=60 haalt y1 y2 in, en wordt y1 de 'winnende formule'.
Verander de instelling van de tabel zodat je nauwkeuriger ziet waar het omslagpunt ligt.

14 Je kunt de stapgrootte ook kleiner dan 1 nemen. Gebruik dat om het omslagpunt nog preciezer te benaderen.



15 Voer als derde functie y3 in: y1(x) – y2(x)
Ga in de tabel na, dat y3 van negatief positief wordt als y1 y2 inhaalt.

16 Bij x = 58.8 lijken de waarden van y1 en y2 gelijk te zijn. Toch is de waarde van y3 daar niet gelijk aan 0. Hoe dat komt, kun je zien als je de cursor op de getallen 18640 zet.

3 Grafieken

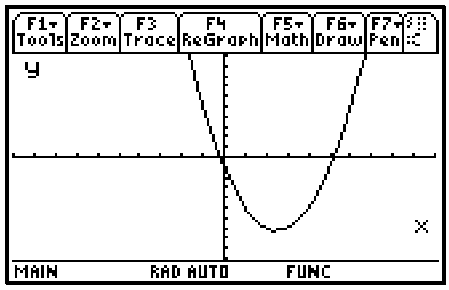
3.1 Het tekenen van grafieken

Het tekenen van grafieken is een van de aardige mogelijkheden van de TI-89. Net als bij tabellen moet je daarvoor eerst een formule invoeren in het functiebestand.
Na TRACE kun je met de pijltjestoetsen over de grafiek heen 'wandelen'. Daarbij komen de coördinaten van de punten in beeld.

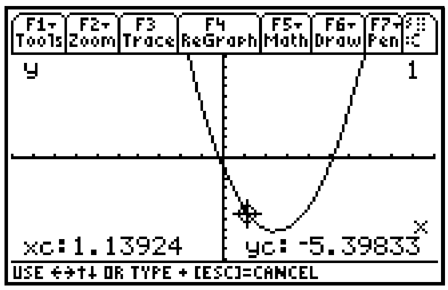
1 Ga naar het functiebestand met Y=.
Wis de formules voor y1, y2 en y3 die in het lijstje staan met CLEAR.

2 Voer als y1 in: x^2 – 5x – 1

3 De groene betekenis van functietoets F3 is GRAPH. Druk voor GRAPH dus op het diamantje ♦ en dan op functietoets F3.
Als het goed is, komt de grafiek in beeld.
Omdat de functie kwadratisch is, is de grafiek een parabool.



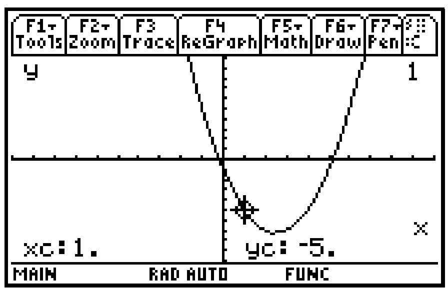
4 Boven in het scherm kun je zien, dat functietoets F3 nu Trace betekent.
Druk op F3.
In beeld verschijnt een knipperende cursor met daaronder de coördinaten van de cursorpositie. De 1 rechtsboven geeft aan, dat de cursor op de grafiek van y1 staat.



5 Beweeg de cursor met ▶ en ◀ over de grafiek. Je ziet de coördinaten mee veranderen.
Met Trace wandel je dus over de grafiek.

6 Probeer met Trace na te gaan hoe groot de kleinste functiewaarde ongeveer is.

7 De coördinaten van de Trace-punten zijn meestal geen mooie getallen. De *x*-coördinaat springt bijvoorbeeld van 0.886... naar 1.139.. zonder de waarde 1 aan te doen.
Druk op de 1, ENTER.
De cursor springt nu naar het punt met *x*-coördinaat 1.



8 Voer als y2 in: – x^2 + 3x + 3
Let op de goede min-toets!

9 Kies GRAPH en loop met Trace over een van de grafieken. Met ▼ en ▲ kun je op de andere overspringen.

3.2 Het kijkvenster

Het kijkvenster is dat deel van het tekenvlak dat in beeld komt op het scherm van de TI-89.
Met WINDOW *kun je plaats en de grootte van dat scherm instellen. Zo voorkom je bijvoorbeeld dat grafieken helemaal buiten beeld vallen.*

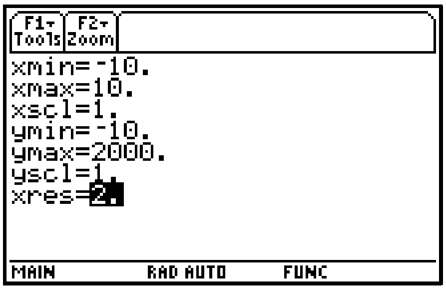
10 Ga naar het functiebestand en wis de ingevoerde functies met CLEAR.

11 Voer de volgende functies in:

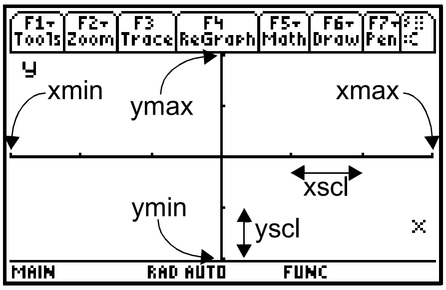
y1 = 1000 + 50x
y2 = 2000 – 50x

12 Druk op GRAPH.
Je krijg geen grafieken te zien!

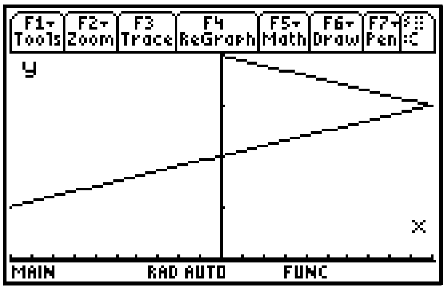
13 Kies WINDOW met ♦ F2.
Je krijgt een lijst, waarin je de afmetingen kunt instellen van het 'raampje' waardoor je naar de grafiek kijkt.
Verander ymax in 2000 zoals hiernaast, en laat de grafieken opnieuw tekenen.



Zoals je hiernaast kunt zien, loopt de horizontale as van het kijkvenster van xmin tot xmax met een schaalverdeling van xscl.
Voor de verticale as hetzelfde, maar dan met ymin, ymax en yscl.
xres bepaalt de resolutie van de tekening; die kun je gewoon op 2 laten staan.



14 De schaalverdeling in de *y*-richting, yscl, staat nog op 1, terwijl de *y*-waarden heel groot zijn.
Ga naar WINDOW en zet yscl op 500.
Zie je het verschil in de grafiek?



15 Loop met Trace naar het snijpunt van de twee grafieken en benader zo de coördinaten hiervan.

16 Vervang y1 en y2 door:

y1 = 20 – x
y2 = x – 50

17 Zoek een geschikt kijkvenster dat de grafieken mooi in beeld brengt, en benader de coördinaten van het snijpunt.

4 Algebra

4.1 Werken met formules

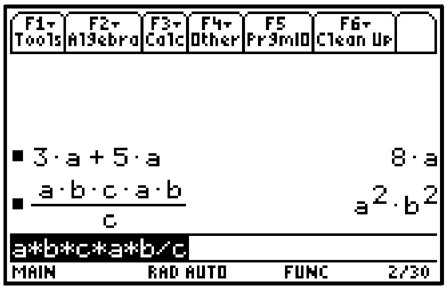
Met de TI-89 kun je niet alleen met getallen rekenen of grafieken tekenen; het bijzondere aan het apparaat is dat je ook met formules kunt werken, met letters kunt rekenen. Het is een algebra-machine. Bijvoorbeeld kun je haakjes uitwerken, of juist in factoren ontbinden.

1 Ga naar het HOME-scherm en voer in:

3a + 5a

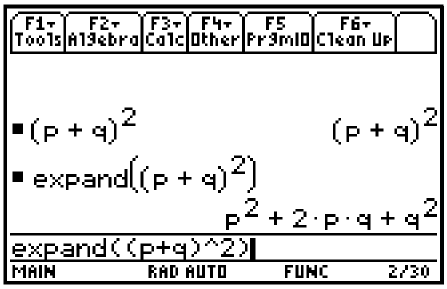
De letter a voer je in met ALPHA =.
Je ziet dat de TI-89 dit meteen vereenvoudigt.
Bij grafieken en tabellen op de TI-89 worden steeds de letters x en y gebruikt; bij algebra kun je elke letter gebruiken die je maar wilt.

2 Voer in: a*b*c*a*b/c
Ook nu wordt de uitdrukking meteen vereenvoudigd.



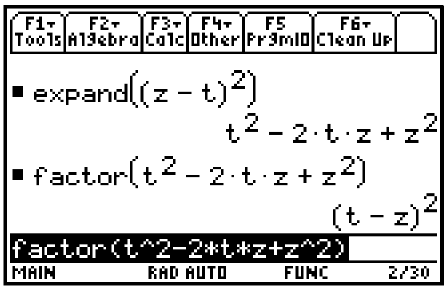
3 Nu iets moeilijker. Voer in: (p + q)^2
De vermenigvuldiging wordt niet uitgevoerd. De TI-89 laat de eenvoudigste vorm staan

4 Uitwerken van het kwadraat gaat met expand.
Kies F2: Algebra, en dan optie 3: expand.
Voeg met ▲ en ENTER (p + q)^2 toe:
expand((p + q)^2).



5 Werk ook de haakjes weg in $(z - t)^2$.
Naast de witte x- en y-toets staan ook toetsen voor z en t. In de uitvoer staan de letters op alfabetische volgorde, dus de t voor de z.

6 Andersom, ontbinden in factoren, gaat met optie 2:Factor uit het Algebra-menu.
Kies deze optie, en haal uit het uitvoerscherm de uitdrukking $t^2 - 2{\cdot}t{\cdot}z + z^2$ op.
Haakje sluiten, ENTER.



7 Laat de volgende opdrachten uitvoeren:

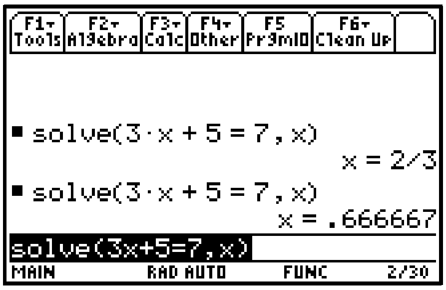
factor(x^2 – 2)
factor(x^2 – 2, x)
factor(x^2 – 2.0, x)

Je kunt bij factor het beste aangeven naar welke variabele de machine moet ontbinden.
Wanneer je niet 2 maar 2.0 invoert, beschouwt de TI-89 dat als een decimale benadering; de antwoorden zijn dat dan ook.

4.2 Vergelijkingen oplossen

Met de TI-89 kun je ook vergelijkingen oplossen. Oplossen is in het Engels ‘solve’ en dat is dan ook de optie die je gebruikt.
Let daarbij op het verschil tussen exacte oplossingen en numerieke, benaderende oplossingen, die als komma-getallen worden geschreven. Het resultaat van solve kan een formule zijn.

8 Open het Algebra-menu en kies 1:solve.
Vul dit aan tot: solve(3x + 5 = 7, x)
Je voert dus na solve eerst de vergelijking in en achter de komma de variabele die moet worden opgelost.

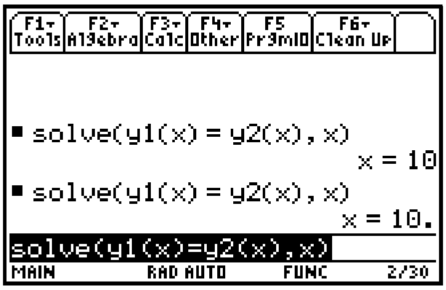


9 Je krijgt een breuk als uitkomst.
Afsluiten met ≈ in plaats van met ENTER, geeft een decimale benadering als antwoord.

10 Los op: $x^2 = 3$
Wat gebeurt er als je niet 3 maar 3.0 invoert?

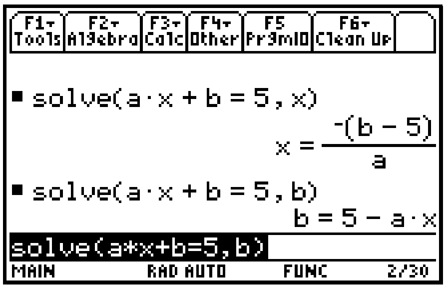
11 Ga naar het functiebestand en voer de twee functies in die je in paragraaf 2 hebt gezien:
y1 = 1000 + 50x
y2 = 2000 – 50x

12 Ga weer naar het HOME-scherm en voer daar in: solve(y1(x) = y2(x), x).
Zo vind je de exacte x-coördinaat van het snijpunt van de twee grafieken.
Bepaal ook een benadering hiervan. Het enige verschil is het puntje na de 10. Dat geeft aan dat het een decimaal getal is.



13 Voer in: solve(a∗x + b = 5, x)
Let op: tussen a en x moet een ∗ staan, anders wordt ax als één woordvariabele beschouwd.
Het antwoord van solve kan een formule zijn: x wordt uitgedrukt in a en b.

14 Verander de laatste x in de solve-opdracht van de vorige opgave in b. Zo los je de vergelijking naar b op en wordt b uitgedrukt in a en x.



15 Los x op uit $x^2 + y = 6$.
Het antwoord ziet er ingewikkeld uit.
and geeft aan dat y – 6 niet positief mag zijn omdat dan de wortel niet bestaat.
or geeft aan dat er twee oplossingen zijn, $x = -\sqrt{6-y}$ en $x = \sqrt{6-y}$.

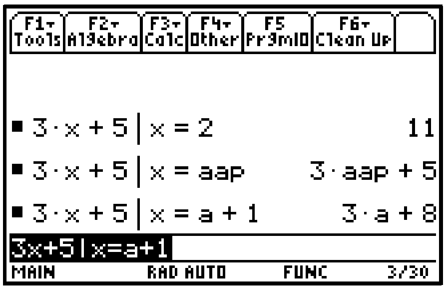
4.3 Substitutie

Met de verticale streep | kun je voor een letter een getal invullen. Dat heet ook wel substitueren. Je kunt | ook gebruiken om een variabele door een formule te vervangen. | spreek je uit als ‘waarbij’.
Met catalog *kom je in een soort woordenlijst terecht, die alle TI-89 commando’s bevat.*

16 Ga naar het HOME-scherm en voer in:

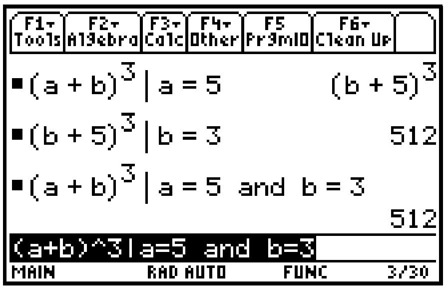
3x + 5 | x = 2

Wat achter de verticale streep staat, wordt in het stuk ervoor ingevuld, gesubstitueerd. x krijgt (alleen in deze regel!) de waarde 2. Dus is het antwoord $3 \cdot 2 + 5 = 11$. Je spreekt 3x + 5 | x = 2 uit als ‘3x + 5 *waarbij* x = 2’, als ‘3x + 5 *met* x = 2’.



17 Vervang x in 3x + 5 nog een keer, maar dit keer door aap. En ook nog een keer door a+1.

18 Geef a in (a+b)^3 de waarde 5.
Haal de uitkomst de invoerregel binnen en geef b de waarde 3.

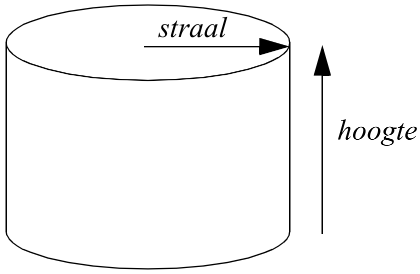


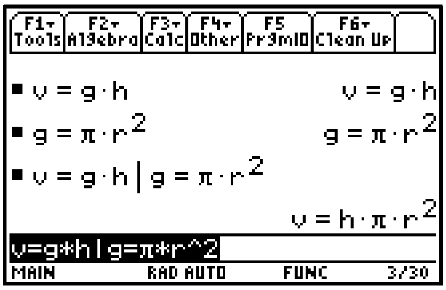
19 Je kunt deze twee substituties ook tegelijk uitvoeren. Voer daarvoor in:

(a+b)^3 | a=5 and b=3

and kun je letter voor letter intypen, of kiezen uit de woordenlijst die je krijgt met catalog.
In catalog kun je allerlei woorden en commando’s opzoeken.

20 Het volume van een cilinder is gelijk aan de oppervlakte van het grondvlak keer de hoogte, afgekort tot v = g * h.
De oppervlakte van het grondvlak is π maal het kwadraat van de straal r: g = π * r^2
Voer deze formules in en substitueer de formule van de oppervlakte in die van de inhoud.
π krijg je met 2nd ^.
v= g * h | g= π * r^2 geeft v= h·π·r^2





21 Als de hoogte van de cilinder gelijk is aan de diameter van het grondvlak, dus als h = 2r, dan ziet de cilinder er van opzij vierkant uit. Druk de oppervlakte van zo’n ‘vierkante’ cilinder uit in de straal.

4.4 Meer substitutie en zelftoets

Je kunt substitutie ook gebruiken om vergelijkingen op te lossen of om een stel gelijksoortige grafieken te tekenen.
Onderaan de pagina staat weer de afsluitende zelftoets.

22 Je kunt | ook gebruiken om oplossingen te controleren. Voer in het functiebestand in:

y1 = x + 1
y2 = –x^2 + x +6

Los de vergelijking y1(x) = y2(x) op en substitueer een van de oplossingen in de vergelijking. De melding true geeft aan dat het klopt.

23 Er is nog een manier om de vergelijking van de vorige opgave op te lossen.
Voer in: y = –x^2 + x +6 | y = x + 1
Het resultaat is een vergelijking met x als enige letter. Die kun je oplossen.

24 Substitutie met | kan ook gebruikt worden in het functiebestand.
Ga daar met Y= naar toe en voer als y1 in:

y1 = x^2/b | b = 5

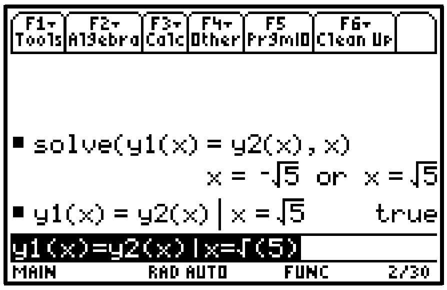
De grafiek wordt getekend voor b = 5 .

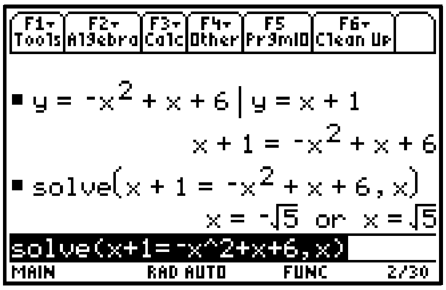
25 Je kunt ook twee grafieken krijgen:

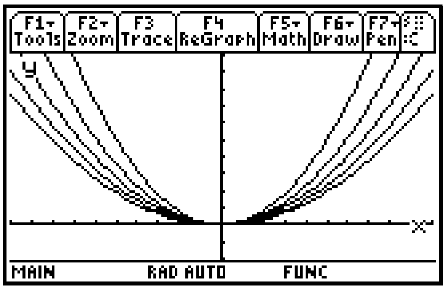
y1 = x^2/b | b = {5, 1/3}

De waarden moeten dan als verzameling tussen accolades worden ingevoerd.

26 Of een heleboel grafieken:
y1 = x^2/b | b = {5, 7, 9, 11, 13}







Zelftoets 2

Maak de volgende opgaven en schrijf de antwoorden in je schrift.
Probeer het eerst zonder terug te kijken naar de vorige opgaven.
Zet erbij hoe je aan het antwoord bent gekomen en op welke knoppen je hebt gedrukt.

1 Werk de haakjes uit in $(x + y)^3$ en ontbind $t^2 + z^2 + 2 \cdot z + 1$ in factoren.

2 Gegeven zijn de lijn met vergelijking $y = x + 1$ en de halve cirkel met vergelijking $y = \sqrt{25 - x^2}$. Zoek een geschikt kijkvenster en laat de grafieken tekenen.

3 Bereken de coördinaten van het snijpunt op twee manieren: met solve en met substitutie.

4 Laat de grafieken tekenen van $y = \sqrt{b^2 - x^2}$ voor $b = 1, 2, 3, 4, 5$.

5 Onderzoeksopdracht

5.1 Patroonherkenning

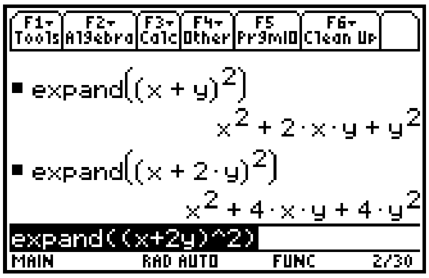
Je kunt de TI-89 gebruiken om een aantal voorbeeld-situaties te laten doorrekenen. Door goed naar de uitkomsten te kijken, kun je ontdekken wat er in het algemeen aan de hand is.
In deze opdracht ga je onderzoeken wat je krijgt als je in verschillende formules de haakjes wegwerkt.

Wat voor uitdrukkingen krijg je als je de haakjes weg werkt in formules zoals $(x + 4\cdot y)^2$ en $(x + y + z)^2$? Om hierop een antwoord te vinden, staan hieronder enkele opgaven.

Let bij het werken hieraan op de volgende aandachtspunten:
- werk goed samen;
- leg de bevindingen vast in een net en overzichtelijk verslag;
- beschrijf in het verslag ook je vermoedens, pogingen en mislukkingen.

1 Voer in: $(x + y)^2$
Laat de haakjes wegwerken.

2 Doe hetzelfde voor $(x + 2\cdot y)^2$, $(x + 3\cdot y)^2$, $(x + 4\cdot y)^2$, enzovoorts.
Welk patroon herken je in deze uitkomsten?



3 Controleer het gevonden patroon door $(x + c\cdot y)^2$ uit te laten werken.

4 Onderzoek op vergelijkbare manier de uitwerking van $(x - 2\cdot y)^2$, $(x - 3\cdot y)^2$, $(x - 4\cdot y)^2$, enzovoorts. Welke regel is van toepassing op uitdrukkingen van de vorm $(x - c\cdot y)^2$?

5 Controleer de gevonden regel.

6 Onderzoek op vergelijkbare manier de uitwerking van formules zoals $(2\cdot x + 3\cdot y)^2$, $(6\cdot x - 3\cdot y)^2$, a Þ x + b Þ y)

7 Vat de resultaten van je onderzoek duidelijk samen.

8 Als je nog tijd hebt: welk patroon kun je herkennen in de uitwerkingen van $(x + y)^2$, $(x + y + z)^2$, $(x + y + z + t)^2$, ... ?

Veranderlijke Algebra

versie TI-89

Algebra leren met
computeralgebra
Freudenthal Instituut

Bij de voorkant:

François Viète, geboren in 1540 in Fontenay-le-Comte (Frankrijk) en gestorven in 1603 in Parijs. Oorspronkelijk was Viète advocaat. Later werd hij lid van het parlement van Bretagne en bekleedde hij andere overheidsfuncties. Tegelijkertijd was hij actief als wiskundige en sterrenkundige. Tijdens de oorlog tussen Spanje en Frankrijk (1590) werkte Viète aan het ontcijferen van het geheimschrift dat de Spanjaarden gebruikten.

De belangrijkste bijdrage van Viète aan de algebra was de introductie van een systematische algebraïsche notatie in het boek *In artem analyticam isagoge* (1591). In dit boek kunnen letters zowel bekende als onbekende hoeveelheden voorstellen. In vergelijking met de lange zinnen die eerder gebruikt werden om verbanden te beschrijven, maakte deze compacte schrijfwijze het veel eenvoudiger om algemene oplossingen te noteren.

Op Internet kun je informatie over Viète en over andere wiskundigen vinden bij http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/.

Veranderlijke Algebra

Project:	Algebra leren met computeralgebra
Klas:	VWO 3
Staat:	Eerste versie voor experiment Werkplaats Kindergemeenschap, januari 2000
Ontwerp:	Paul Drijvers, met ideeën van Martin Kindt

postbus 9432, 3506 GK Utrecht, tel. 030-2611611

Inhoud

1 Som en verschil

instap: snoep kopen

In de snoepwinkel bij school kun je zakjes kopen met hartjes waarop van die romantische teksten staan. Ook hebben ze er zakjes met kleine spekjes. Een klasgenoot koopt drie zakjes hartjes en twee zakjes spekjes. Dat kost f 8,80. Voor twee zakjes hartjes en een zakje spekjes betaal je f 5,20.
De spekjes zijn per zakje 40 cent duurder dan de hartjes.
Dus:

$$\heartsuit + \heartsuit + \heartsuit + \blacklozenge + \blacklozenge = 8{,}80$$
$$\heartsuit + \heartsuit + \blacklozenge = 5{,}20$$
$$\blacklozenge - \heartsuit = 0{,}40$$

1 Hoeveel kost een zakje hartjes? En wat is de prijs van een zakje spekjes? Hoe heb je je antwoord gevonden?

2 **a.** Iemand koopt voor f 7,20 hartjes en spekjes. Kun je zeggen hoeveel zakjes van elk hij koopt?
b. En als het totaal f 16,00 is?

3 Vertaal de drie regels met ♥ en ◆ in vergelijkingen, en zet erbij wat de letters betekenen die je gebruikt.

4 De prijzen worden verhoogd:

$$\blacklozenge + \heartsuit = 4{,}50$$
$$\blacklozenge - \heartsuit = 0{,}50$$

Hoeveel kost nu elk van de zakjes?

huiswerk en tv-kijken

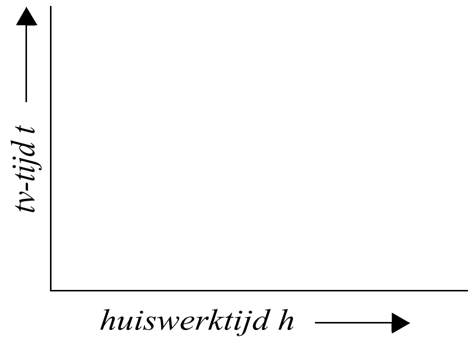
Je komt uit school en hebt nog anderhalf uur voor je naar de sporttraining moet. Je moet eerst huiswerk maken. Daarna wil je de rest van de tijd tv-kijken. De vraag is, hoe de beschikbare tijd verdeeld wordt.

5 **a.** Noem het aantal minuten dat je huiswerk maakt *h*. De overgebleven tv-tijd is *t*. Neem de tabel hieronder over en vul hem in.

h (in minuten)	15	30		60	85
t (in minuten)			40		

b. Hoe lang kun je op zijn hoogst huiswerk maken? En tv-kijken?
c. Wat gebeurt er met *t* als *h* groter wordt?

6 Bekijk het assenstelsel op de volgende pagina. Neem het over in je schrift. Schets er een grafiek in die aangeeft hoe de tv-tijd afhangt van de tijd die je aan het huiswerk besteedt.



7 **a.** Maak de formule af die het verband tussen t en h weergeeft: $t = ...$

TI-89: zie hulpkader **b.** Laat de grafiek van opgave **6** ook tekenen door de TI-89.

TI-89 **c.** Laat de cursor over de grafiek lopen. Tel voor verschillende punten de coördinaten op. Welk antwoord krijg je steeds?

d. Verklaar wat je bij **c** hebt gevonden.

hulpkader TI-89

Wat wil je?	*Hoe doe je dat met de TI-89?*
Een formule invoeren bijvoorbeeld $t = 90 - h$	kies Y= (♦ F1) gebruik X als variabele-naam, dus typ in: 90 – X
Het kijkvenster instellen	WINDOW (♦ F2)
Een grafiek laten tekenen	GRAPH (♦ F3)
Over een grafiek lopen	kies F3: TRACE, dan ◄ of ►

8 Stel dat je een half uur langer huiswerk maakt dan dat je tv-kijkt.
Dan geldt dus: $t = h - 30$.

TI-89 **a.** Laat ook de grafiek van dit verband tekenen.

b. Hoeveel tijd heb je dan voor elk van beide activiteiten?

9 **a.** Hoe is de verdeling als je een kwartier langer aan je huiswerk werkt dan dat je tv-kijkt?

b. Leg in woorden uit hoe je vraag **a** hebt aangepakt.

TI-89 **10** Kijk even terug naar de situatie van het snoepwinkeltje in opgave **4**:

$$\blacklozenge + \heartsuit = 4{,}50$$
$$\blacklozenge - \heartsuit = 0{,}50$$

Laat ook hierbij twee grafieken tekenen, waarbij de prijs van een zakje hartjes, ♥, op de horizontale as staat en ◆ op de verticale.

11 **a.** Welke overeenkomst zie je tussen de situatie van de verdeling van huiswerktijd en tv-tijd en van de prijs van zakjes hartjes en spekjes?

b. Bedenk zelf een vergelijkbaar probleem.

2 Algebraïsche oplossing

1 **a.** Twee getallen, x en y, zijn samen 700, en x is 600 groter dan y:

$$x + y = 700$$
$$x - y = 600$$

Hoe groot zijn deze getallen?

b. Probeer een recept te schrijven voor de oplossing van dit probleem. Geef aan welke stappen je moet uitvoeren om x en y uit te rekenen.

isoleren, oplossen naar

Misschien kan computeralgebra helpen. In het TI-89 hulpkader hieronder staat hoe je een vergelijking zo kunt schrijven, zodat een bepaalde variabele in z'n eentje aan één kant komt te staan. Dat noemen we het *isoleren* van die variabele, of het oplossen naar die variabele.

substitueren

Verder zie je in dat kader hoe je voor een variabele een getal kunt invullen, of kunt vervangen door andere variabelen. Dat heet *substitueren*.

hulpkader TI-89

Wat wil je?	*Hoe doe je dat met de TI-89?*
Een variabele in een uitdrukking isoleren, bijvoorbeeld y oplossen in $x+y = 700$	kies F2 optie 1: solve vul aan tot: solve(x + y = 700, y) sluit af met ENTER
Een substitutie uitvoeren, bijvoorbeeld y in $x - y = 600$ vervangen door 100 of door $700 - x$	voer in: x - y = 600 | y = 100 of x - y = 600 | y = 700 – x sluit af met ENTER Lees de verticale streep | als 'met' of 'waarbij'

TI-89

2 **a.** Laat $x + y = 700$ door de TI-89 herschrijven in de vorm $y = \ldots$.

b. Laat de machine y in $x - y = 600$ vervangen door $700 - x$

c. Los nu opgave 1 verder met de TI-89 op.

overeenkomst

De vorige paragraaf draait om twee problemen: de prijs van zakjes snoep, en het verdelen van beschikbare tijd tussen huiswerk maken en tv-kijken. Deze twee situaties vertonen, wiskundig gezien tenminste, sterke overeenkomsten.

In de situatie van het snoep noemen we de prijs van een zakje hartjes x, en die van een zakje spekjes y. Gegeven zijn de som van x en y en het verschil:

$$x + y = s$$
$$x - y = v$$

Voor de winkelier, die x en y kent, is het berekenen van s en v een koud kunstje. De taak in de opgave is iets moeilijker: hoe vind je x en y uit s en v?

3 Welke waarden hebben s en v in opgave **4** van de vorige paragraaf?

In de situatie van het verdelen van de tijd hangt de duur van het tv-kijken, t, af van de huiswerktijd h:

$$t = 90 - h$$

In opgave **8b** van de vorige paragraaf moet je 30 minuten meer besteden aan het huiswerk dan aan tv-kijken. Dus

$$t = h - 30$$

4 **a.** Herschrijf de twee vergelijkingen met h en t zodat ze dezelfde vorm krijgen als de vergelijkingen met x en y.
b. Welke waarden hebben s en v in dit geval?

5 Welke waarden hebben s en v in de eerste opgave van deze paragraaf?

samengevat

Verschillende situaties leiden dus tot twee vergelijkingen van de vorm

$$x + y = s \qquad \text{(de } \textit{somvergelijking)}$$

$$x - y = v \qquad \text{(de } \textit{verschilvergelijking)}$$

stelsel vergelijkingen

Twee vergelijking samen noemen we een *stelsel vergelijkingen*. De twee hierboven vormen het som-verschil-probleem. De vraag is nu, hoe je snel x en y kunt berekenen als je x en y weet.

TI-89

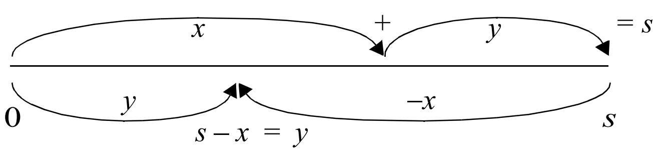
6 Probeer dit stelsel vergelijkingen met s en v op te lossen.
Gebruik hierbij de TI-89 op dezelfde manier als bij opgave 2.

algebraïsche oplossing

Om dit stelsel vergelijkingen met s en v op te lossen, kun je eerst de somvergelijking zo schrijven, dat y aan één kant alleen komt te staan, dus y isoleert:

$$y = s - x$$

Dat y gelijk moet zijn aan $s - x$ kun je ook zien in een plaatje:



7 Schrijf een korte toelichting bij de figuur hierboven.

8 **a.** Substitueer nu $s - x$ voor y in de verschilvergelijking.
TI-89 **b.** Doe ditzelfde nog een keer, maar nu met de TI-89.
c. Wat is nu de oplossing van het som-verschil probleem met s en v?

TI-89 **9** **a.** Substitueer de gegevens van opgave **4** van paragraaf 1 in de gevonden algemene oplossing. Klopt het?
TI-89 **b.** Doe hetzelfde voor situatie van het huiswerk maken en tv-kijken (opgave **8b** van paragraaf 1).

10 Simon en zijn moeder zijn samen 65 jaar. Het leeftijdsverschil is 35 jaar. Hoe oud is Simon?

11 Los de volgende stelsels vergelijkingen op:

a. $h + t = 5$, $h - t = 5$

b. $m + n = 19$, $n = 20 - m$

12 Wat is volgens jou de belangrijkste conclusie van deze paragraaf? Schrijf die in je schrift.

3 De kracht van algebra

weer huiswerk en tv-kijken

Kijk nog eens terug naar het voorbeeld van het verdelen van de tijd tussen huiswerk maken en tv-kijken.

1 Hieronder is de tabel van opgave **6** van paragraaf 1 aangevuld met drie rijen. In de eerste staat het verschil tussen huiswerktijd en tv-tijd: $v = h - t$. In de tweede staat $h - 45$, dus het verschil tussen de huiswerktijd en de tijd die je zou hebben bij eerlijk verdelen van de 90 minuten. De derde rij bevat hetzelfde, maar dan voor de tv-tijd.

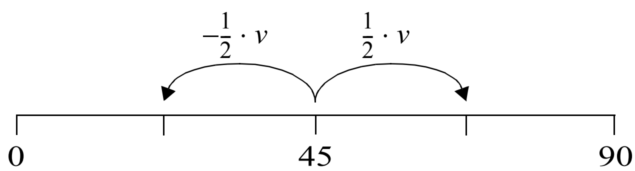
h	15	30	50	60	85
t	75	60	40	30	5
$v = h - t$					
$h - 45$					
$t - 45$					

a. Vul de tabel in.
b. Welke verbanden zie je tussen de getallen in de drie nieuwe rijen?
c. Stel dat je v weet. Hoeveel moet je dan bij 45 optellen om h te krijgen? En wat moet je van 45 aftrekken voor t?

eerlijk verdelen

Uit de vorige opgave blijkt: als je eerst begint met het eerlijk verdelen van de beschikbare tijd, dan geldt $h = t = 45$. Het verschil v is dan gelijk aan 0.

Om het verschil v te maken, moet je vanuit 45 over een afstand $\frac{1}{2} \cdot v$ naar links en naar rechts springen:



TI-89

2 Controleer dit door in de somvergelijking en de verschilvergelijking h te vervangen door $45 + \frac{1}{2} \cdot v$ en t door $45 - \frac{1}{2} \cdot v$.

generaliseren

Het idee is dus: eerst het totaal eerlijk verdelen, en dan van daaruit naar links en naar rechts springen om het juiste verschil te krijgen. Dat kun je ook algemener maken of *generaliseren*, door het toe te passen op het algemene probleem:

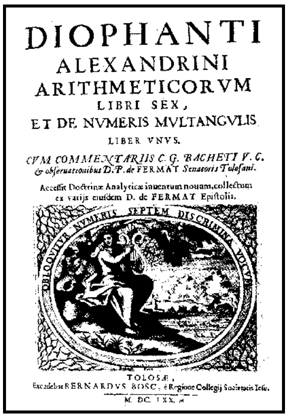
$$x + y = s$$
$$x - y = v$$

3 **a.** Welke oplossingsformules vind je zo?
TI-89 **b.** Controleer de gevonden oplossing door substitutie.

4 Je hebt nu twee manieren leren kennen om het som-verschil probleem aan te pakken: de manier van isoleren en substitueren, en de methode van het aanpassen van de eerlijke verdeling. Welke manier vind je het prettigst? Waarom?

historische noot: Diophantus en Viète

Het som-verschil probleem is al beschreven door de Griekse wiskundige Diophantus van Alexandrië, zo'n rond het jaar 250 na Christus, maar hij zette getallen op de plaats van *s* en *v*. Pas rond 1600 formuleerde de Fransman Viète de oplossing in de symbolische, algebraïsche vorm die je nu ook hebt gevonden.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

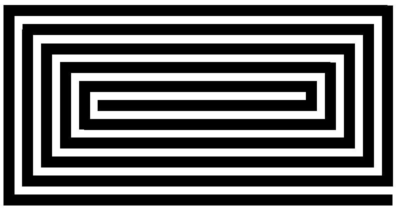
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

de kracht van algebra

Door de algemene aanpak met de letters *s* en *v* in plaats van getallen, zie je goed dat alle problemen uit dit boekje tot nu toe op hetzelfde neerkomen. Uit de algemene formule in *s* en *v* kun je in alle gevallen de antwoorden vinden, door voor *s* en *v* de juiste getallen in te vullen. Dat is de kracht van de algebra. Gebruik die in de volgende opgaven.

5 Een parabool heeft de vergelijking $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + 3$.
Het punt (1, 7) ligt op deze parabool, dus $7 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3$.
Ook het punt (-1, 1) ligt op de parabool.
a. Ga na dat $a + b = 4$ en $a - b = -2$.
b. Hoe groot zijn *a* en *b*?
TI-89 **c.** Controleer je antwoord met een grafiek.

6 Van een dik koord van kokos wordt op de volgende manier een deurmat gemaakt:

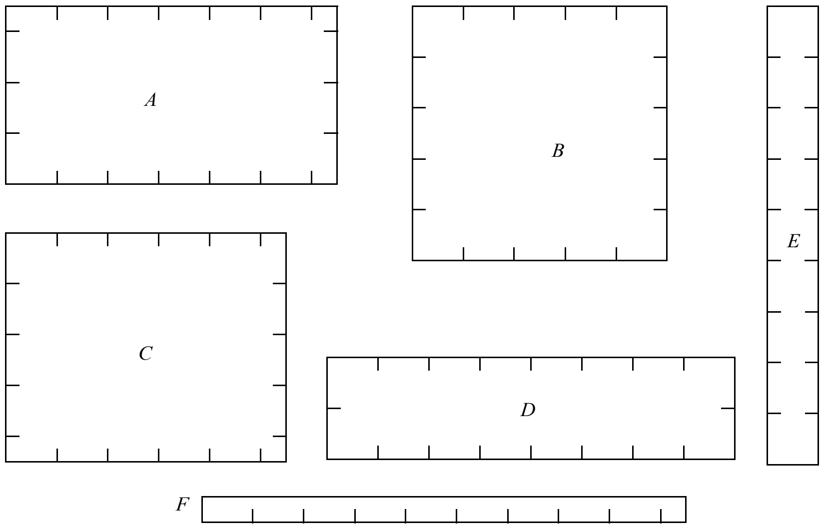


Het beginstuk in het midden is 40 cm lang voor de eerste bocht wordt gemaakt. Lengte en breedte van de mat zijn samen 140 cm.
a. Welke vergelijkingen gelden voor de lengte en de breedte?
b. Bereken de lengte en de breedte van de mat.

4 Rechthoeken met vaste omtrek

rechthoeken met vaste omtrek

Hieronder zie je een zestal rechthoeken die allemaal omtrek 20 hebben.



1 **a.** Ga na dat deze rechthoeken allemaal een omtrek van 20 hebben.
b. Gelijke omtrek betekent niet automatisch gelijke oppervlakte! Welke rechthoek heeft de grootste oppervlakte? Welke de kleinste?

2 Veronderstel dat je begint met een brede, lage rechthoek zoals rechthoek *F* in de tekening. Geleidelijk aan maak je de rechthoek iets hoger, en daarmee dus ook smaller. Dit doe je net zo lang, tot je een hele smalle, hoge rechthoek hebt, vergelijkbaar met *E*. Beschrijf in woorden wat er met de oppervlakte gebeurt tijdens deze vervorming.

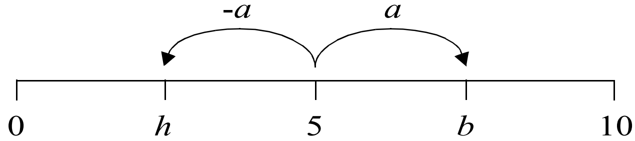
3 **a.** Denk je dat er ook een rechthoek met omtrek 20 is, waarvan de oppervlakte eveneens precies 20 is? Waarom wel / niet?
b. Welke vergelijkingen moet je oplossen om de afmetingen van deze rechthoek te vinden?

TI-89

c. Los deze vergelijkingen op.

eerlijk verdelen?

Als de omtrek van de rechthoek 20 is, dan zijn de breedte b en de hoogte h samen 10: $b + h = 10$. Eerlijk verdelen komt dan neer op $b = h = 5$. De oppervlakte, $b \cdot h$, is dan gelijk aan 25. Hoe moeten we b en h nu aanpassen om een oppervlakte van 20 te krijgen? Laten we de verschuif-afstand in dit geval a noemen:



TI-89 **4** **a.** Vervang in de oppervlaktefunctie b door $5 + a$ en h door $5 - a$.

b. Hoe zie je aan het resultaat dat de oppervlakte nooit groter dan 25 is?

TI-89 **c.** Stel de oppervlakte gelijk aan 20 en los de vergelijking op.

d. Welke waarde van b geeft de gevraagde oppervlakte van 20?

TI-89 **5** **a.** Welke rechthoek met omtrek 20 heeft een oppervlakte van 22.75?

TI-89 **b.** Welke rechthoek met omtrek 40 heeft een oppervlakte van 45.50?

algemene formulering

In het algemeen geldt voor rechthoeken met een vaste omtrek het volgende verband tussen de breedte b en de hoogte h:

$$b + h = s \qquad \text{(de } \textit{somvergelijking)}$$

Hierbij is s gelijk aan de helft van de omtrek.
Voor de oppervlakte, zeg p, geldt dan:

$$b \cdot h = p \qquad \text{(de } \textit{productvergelijking)}$$

De vraag is hoe je, als s en p bekend zijn, b en h kunt berekenen.

weer twee manieren

Net als bij het som-verschil-probleem zijn er twee manieren om dit som-product-probleem aan te pakken.

TI-89 **6** **a.** De eerste manier is die van het isoleren en substitueren. Doe dit.

b. Ga na dat de oplossing die je nu vindt een generalisatie is van de oplossing van opgave **3c**.

eerlijk verdelen

De tweede manier gaat uit van het eerlijk verdelen. Dat betekent hier dat $b = h = \frac{1}{2} \cdot s$, dus dat de rechthoek een vierkant is. Als nu de breedte een stukje, zeg a, groter wordt en de hoogte a kleiner, dan ontstaat de volgende figuur:

TI-89 **7** **a.** Vervang in de productvergelijking b door $\frac{1}{2} \cdot s + a$ en h door $\frac{1}{2} \cdot s - a$ en los het probleem op.

maximale oppervlakte **b.** Aan de formule van onderdeel **a** kun je zien dat eerlijk verdelen van de omtrek de maximale oppervlakte geeft. Leg uit hoe.

TI-89 **8** **a.** Welke rechthoek met omtrek 40 heeft de grootst mogelijke oppervlakte?

b. Hoeveel keer zo groot is deze oppervlakte als de maximale oppervlakte bij een omtrek van 20?

c. Waarom is het antwoord bij vraag **b** niet gewoon 2?

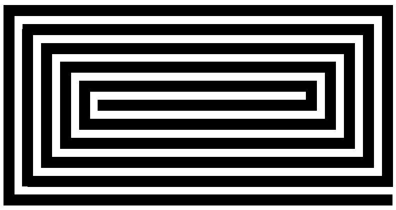
5 Substitutie

rode draad De rode draad in dit boekje wordt tot nu toe gevormd door stelsels van twee vergelijkingen, zoals die van het som-verschil-probleem en het som-product-probleem. Deze stelsels zijn op twee manieren aangepakt: ten eerste door één van de vergelijkingen naar één van de variabelen op te lossen en het resultaat in de andere vergelijking te substitueren. De tweede manier is het aanpassen van het idee van eerlijk verdelen. De TI-89 kan bij beide methoden gebruikt worden voor het oplossen van vergelijkingen en voor het substitueren. Door de problemen in algemene termen te formuleren, kun je ze voor eens en voor altijd oplossen. Dat is de kracht van de algebra.

In deze paragraaf kom je vergelijkbare problemen tegen. Substitutie speelt daarbij een grote rol. De algebra zal geleidelijk aan iets moeilijker worden, zodat het gebruik van computeralgebra meer de moeite waard is dan in het voorafgaande. Toch staat in de kantlijn geen **TI-89** meer: kies zelf of je het liefst met de hand of met de machine doet. Of allebei natuurlijk!

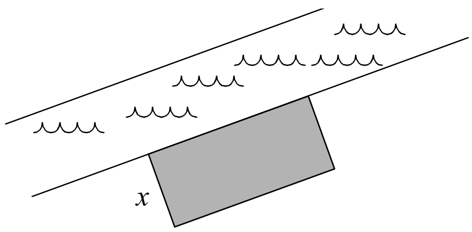
1 Anne en haar vader zijn samen 62 jaar. Als Anne haar leeftijd met 4 vermenigvuldigt, is de uitkomst 13 meer dan de leeftijd van haar vader.
a. Welke vergelijkingen kun je bij dit probleem opstellen?
b. Bereken de leeftijd van Anne en die van haar vader.

2 Kijk nog eens terug naar de kokosmat van opgave **6** van paragraaf 3.



Het beginstuk in het midden is 40 cm lang voor de eerste bocht wordt gemaakt. De oppervlakte van de mat is 2625 cm^2.
Bereken de lengte en de breedte van de mat.

3 Langs een kanaal ligt een weiland. Met een touw van 500 meter lengte wordt hiervan een rechthoekig stuk afgezet, dat grenst aan het kanaal.



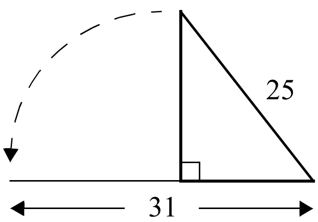
a. Welke afmetingen heeft het afgezette stuk als de oppervlakte 30000 vierkante meter is?
b. Noem de lengte van de zijde die loodrecht op het kanaal staat x.
Bedenk een formule die aangeeft hoe de oppervlakte afhangt van x.
c. Laat de grafiek van de oppervlaktefunctie tekenen en lees daaruit af hoe groot de maximale oppervlakte ongeveer is.
d. Bij welke afmetingen is de oppervlakte maximaal?

4 Twee rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek zijn samen 31 lang. De schuine zijde heeft een lengte van 25.

a. Hoe lang zijn de rechthoekszijden?

b. Los het probleem ook op als de twee rechthoekszijden samen 35 zijn in plaats van 31.

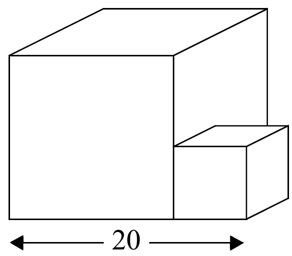
c. Los het probleem in het algemeen op, dat wil zeggen zonder dat de getallen 31 en 25 gegeven zijn.



5 **a.** De ribben van twee kubussen zijn samen 20 lang. De totale inhoud van beide kubussen is 2240. Hoe groot is de ribbe van de grootste kubus?

b. De som van twee getallen is s en de som van hun derdemachten is d.
Druk die getallen uit in s en d.
Schrijf de formules in zo eenvoudig mogelijke vorm.

c. Hoe kun je in het antwoord van **b** zien, dat de twee oplossingen symmetrisch liggen rond $\frac{1}{2}s$?



historische noot:
De Babyloniërs

Hierboven zie je een Babylonische kleitablet waarin spijkerschrift is geschreven, toen de klei nog nat was. Dit tablet is waarschijnlijk tussen 1900 en 1600 voor Christus gemaakt.
Sommige van dergelijke tabletten bevatten wiskundige problemen, bijvoorbeeld in de stijl van:
Van een rechthoekig stuk land kennen we de oppervlakte (540 m^2) en de lengte van de diagonaal (39 m). Bereken de afmetingen van het stuk land.

6 Probeer deze opgave op te lossen.

7 Een ander Babylonisch probleem, op eigentijdse manier geformuleerd:
Voor welke waarden van x en y geldt:

$$\begin{aligned} x+y &= 28 \\ x-y+x\cdot y &= 183 \text{ ?} \end{aligned}$$

6 Een netwerk van grafieken

terugkijken: huiswerk en tv

In paragraaf 1 staat de volgende tekst:
Je komt uit school en hebt nog anderhalf uur voor je naar de sporttraining moet. Je moet eerst huiswerk maken. Daarna wil je de rest van de tijd tv-kijken. De vraag is, hoe de beschikbare tijd verdeeld wordt.

Als de huiswerktijd in minuten h genoemd wordt en de tv-tijd t, dan geldt:

$$t = 90 - h$$

TI-89 **1** Laat de grafiek van dit verband tekenen.

Als nu de tv-tijd een kwartier minder is dan de huiswerktijd, dan geldt:

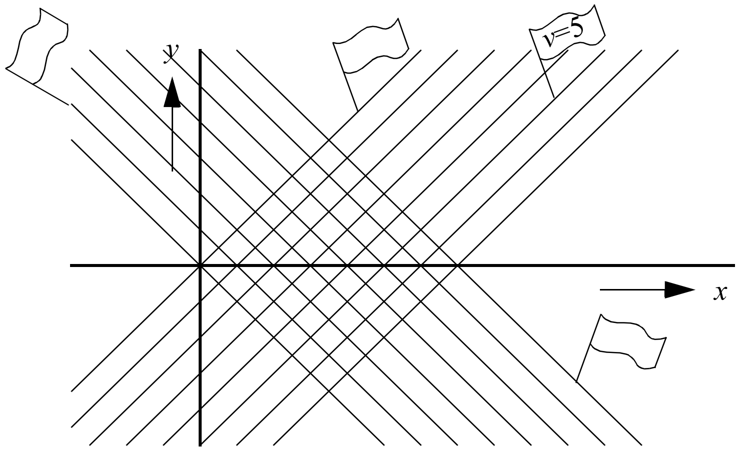
$$t = h - 15$$

TI-89 **2** **a.** Laat ook hierbij de grafiek tekenen.
TI-89 **b.** Benaderen met TRACE de coördinaten van het snijpunt van de twee grafieken. Welke betekenis hebben de coördinaten van het snijpunt in deze situatie?

onafhankelijke variabele, afhankelijke variabele

In dit voorbeeld nemen we aan dat de tv-tijd t afhangt van de huiswerktijd h. In zo'n geval heet t de *afhankelijke variabele* en h de *onafhankelijke*.
In grafieken staat de onafhankelijke variabele meestal op de horizontale as en de afhankelijke op de verticale.

3 Op een andere dag heb je niet 90 maar 100 minuten na school. Het huiswerk duurt die dag 25 minuten langer dan het tv-kijken.
TI-89 **a.** Hoe veranderen de formules en de grafieken?
TI-89 **b.** Laat ook deze grafieken tekenen.



een netwerk van grafieken

Hierboven zijn de grafieken van $y = s - x$ en $y = x - v$ getekend voor verschillende waarden van s en v: s loopt van 0, 1, 2, ... tot 7 en ook v varieert van 0 tot 7. Zo ontstaat een *netwerk van grafieken*. Met 'vlaggetjes' kun je aangegeven welke waarde van s of v bij een bepaalde lijn hoort.

4 **a.** Vul de lege vlaggetjes in en voeg er nog enkele toe.
b. Welk snijpunt van lijnen stelt de oplossing voor van het stelsel vergelijkingen $x + y = 5$, $x - y = 3$?

TI-89 **5** **a.** Maak het plaatje na op het beeldscherm.
b. Wat gebeurt er met de grafiek van $y = s - x$ als s toeneemt?
c. Dezelfde vraag voor de grafiek van $y = x - v$ als v toeneemt.

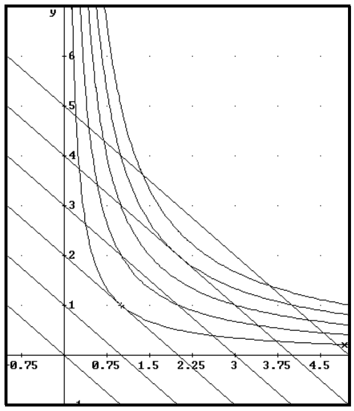
6 **a.** Maak in de tekening op de vorige bladzijde het snijpunten de lijnen met $s = 0$ en $v = 0$ vet. Doe hetzelfde voor $s = 2$, $v = 1$, voor $s = 4$, $v = 2$ en voor $s = 6$, $v = 3$.
b. Voor alle punten van vraag **a** geldt dat $s = 2v$. Kennelijk liggen die punten op een rechte lijn. Teken die lijn.
TI-89 **c.** Welke vergelijking heeft die lijn? Hoe weet je dat?
TI-89 **d.** Laat deze ook in het plaatje op de TI-89 tekenen.

terugkijken: de rechthoeken

In paragraaf 4 is het som-product-probleem besproken van de oppervlakte p van rechthoeken met een vaste omtrek $2s$. Dat gaf het volgende stelsel:

$$x + y = s$$
$$x \cdot y = p$$

TI-89 **7**



a. Laat hierbij een netwerk van grafieken tekenen.
In het kader onder deze opgave staat hoe je op de TI-89 bijvoorbeeld s in één formule verschillende waarden kunt geven.
b. Bij een vaste waarde van s is de oppervlakte p maximaal als x en y aan elkaar gelijk zijn. Hie kun je dat aan het netwerk zien?

Wat wil je?	*Hoe doe je dat met de TI-89?*
Grafieken tekenen van	druk op Y=
bijvoorbeeld $y = s - x$	voer in: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} - x$
waarbij s loopt van 0 tot 5	kies GRAPH

8 Op deze pagina komen in de vergelijkingen de variabelen x, y, s, v, p en q voor. Deze letters spelen verschillende rollen.
Neem bijvoorbeeld $y = s - x$.
a. Stel dat s een vaste waarde heeft. Wat gebeurt er als x groter wordt?
b. Wat gebeurt er als de waarde van s (of v, p, of q) verandert?

7 Een bundel grafieken

een bundel grafieken

In de vorige paragraaf je netwerken van grafieken getekend. Wanneer je niet bij twee maar bij één formule een stel grafieken tekent, krijg je een *bundel* of familie grafieken.

1 De formule $y = a \cdot x + b$ ben je waarschijnlijk al vaker tegengekomen. Hierin stelt x de onafhankelijke en y de afhankelijke variabele voor. Stel $a = 1$.

TI-89

a. Laat voor verschillende waarden van b grafieken tekenen.
b. Wat gebeurt er met de grafieken als b groter wordt?

2 Stel nu dat $b = 2$ in $y = a \cdot x + b$ en dat a kan variëren.

TI-89

a. Laat voor verschillende waarden van a grafieken tekenen.
b. Welk kenmerk hebben al deze grafieken?
c. Wat gebeurt er met de grafieken als a groter wordt?

3 Een grafiek uit de familie $y = a \cdot x + b$ gaat door het punt (1, 3).
a. Weet je nu hoe groot a en b zijn, dus welk ‘lid van de familie’ het is?
b. Als ook (3, -1) op de grafiek ligt, kun je dan a en b berekenen?

verschillende rollen

In $y = a \cdot x + b$ spelen de letters x, y, a en b verschillende rollen.

- Stel dat a en b vaste waarden hebben. Dan kun je een grafiek tekenen met de afhankelijke variabele y op de verticale as en de onafhankelijke x op de horizontale. Als x varieert, verandert y mee en het punt (x, y) loopt over de grafiek.
- Bij de letters a en b ligt dat anders. Als a of b verandert, krijg je een andere grafiek. Niet een punt loopt, maar de hele grafiek! De variabelen a en b zijn de *parameters*.

parameter

weer de rechthoeken met vaste omtrek

Paragraaf 4 gaat over de oppervlakte p van rechthoeken met een vaste omtrek $2s$. Als x de basis is en y de hoogte, dan geldt het volgende verband:

$$p = x \cdot y = x \cdot (s - x)$$

TI-89

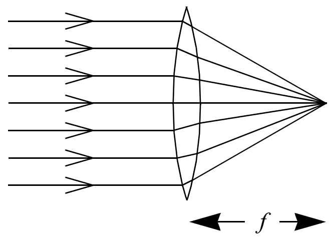
4 **a.** Laat grafieken van de oppervlaktefunctie tekenen voor de gevallen $s = 1$, $s = 2$, ..., tot $s = 8$.
b. Welke bekende vorm hebben deze grafieken?
c. Beschrijf in woorden hoe de grafiek verandert als de omtrek groter wordt.

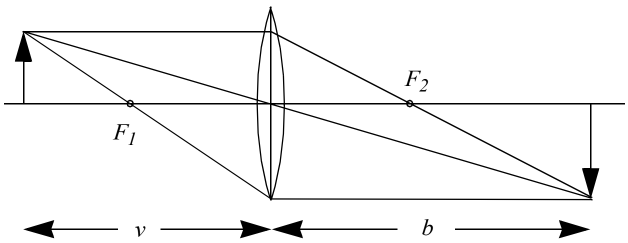
TI-89

5 Veronderstel dat in het punt (0, 0) een fontein of een tuinsproeier staat. Gebruik opgave 4 om een tekening te maken van het water, dat vanuit de oorsprong alle kanten uit sproeit.

de lenzenformule

Mischien heb je wel eens zonlicht door een vergrootglas laten schijnen. De evenwijdig invallende zonnestralen worden dan omgebogen, en komen samen in een punt. Als je een krant op de juiste afstand houdt, kan die hierdoor in brand vliegen! Dat punt heet dus het brandpunt, ofwel de focus. De afstand van het brandpunt tot de as van de lens heet de brandpuntsafstand en wordt vaak aangegeven met de letter *f*. Deze brandpuntsafstand hangt af van de bolling en het materiaal van de lens.





Om een scherp beeld van een voorwerp te krijgen (denk aan fotograferen), moeten de afstand van het voorwerp tot de lens en die van het beeld met elkaar in overeenstemming zijn. Als de voorwerpsafstand *v* is en de beeldafstand *b*, dan geldt theoretisch het volgende verband:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$$

Dit is de zogenaamde *lenzenformule* uit de natuurkunde.

6 Een vergrootglas heeft een brandpuntsafstand van $f = 7.5$ cm. Als een voorwerp zich op 15 cm van het vergrootglas af bevindt, hoe groot is dan de beeldafstand?

TI-89 **7** Herschrijf de lenzenformule in een vorm waarin je ziet hoe *b* van *v* en *f* afhangt.

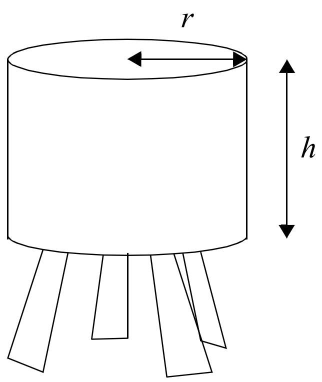
TI-89 **8** **a.** Voor een lens geldt dat $f = 7.5$ cm. Laat een grafiek tekenen van de beeldafstand *b* als functie van de voorwerpsafstand *v*.
b. Wat valt op aan de grafiek? Kun je dat uit de formule verklaren?
c. Wat gebeurt er met de beeldafstand als je het voorwerp steeds verder van de lens beweegt? Hoe zie je dat in de grafiek? Verklaar je antwoord ook uit de formule.

TI-89 **9** **a.** Laat grafieken tekenen van *b* als functie van *v*, voor $f = 1, f = 2, f = 3, f = 4$ en $f = 5$. Gebruik eventueel de {}-truuk van de TI-89.
b. Hoe verandert de grafiek van *b* als functie van *v* als *f* groter wordt?
c. Welke variabele is de onafhankelijke in deze opgave? Welke de afhankelijke? Is een van de variabelen een parameter?

8 Driedimensionale grafieken

silo's schilderen

Een veevoederbedrijf bewaart haar producten in silo's van verschillende afmetingen. Deze silo's staan op pootjes en zijn bij benadering cilindervormig. Bij wijze van onderhoud moeten de silo's aan de buitenkant worden geschilderd. De vraag is, voor hoeveel vierkante meter verf ingekocht moet worden.



1 **a.** Een van deze silo's heeft een hoogte van 3 meter en een straal van 1,5 meter. Voor hoeveel vierkante meter is er verf nodig?

b. Bereken de oppervlakte van een silo met hoogte 4 m en straal 2 m.

c. Geef een formule voor de oppervlakte van een cilindervormige silo, uitgedrukt in de straal r en de hoogte h.

TI-89 **2** **a.** Een silo heeft een straal van 2 m. Laat een grafiek tekenen die aangeeft hoe de oppervlakte afhangt van de hoogte.

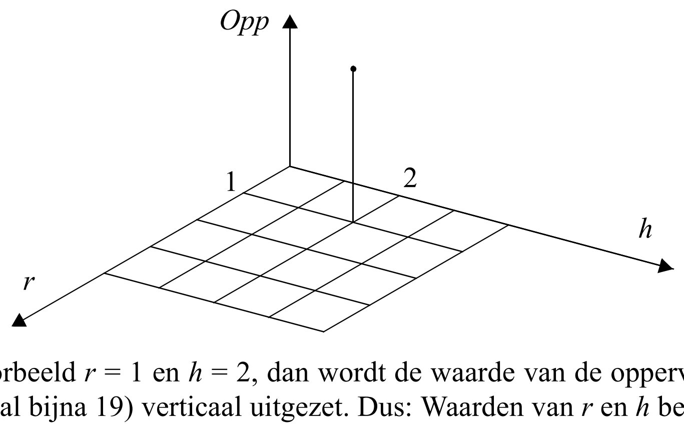
TI-89 **b.** Teken een bundel van dergelijke grafieken, uitgaande van verschillende waarden van de straal. Welke vorm hebben deze grafieken?

TI-89 **3** **a.** Nu omgekeerd: Kies verschillende vaste waarden voor de hoogte, en teken een bundel grafieken die aangeven hoe de oppervlakte afhangt van de straal.

b. Welke vorm hebben al deze grafieken?

functie van twee variabelen
drie dimensies

De oppervlakte van zo'n silo hangt af van zowel de hoogte als de straal: de oppervlakte is een *functie van de twee variabelen* hoogte en straal.
Om een grafiek te maken van een een functie van twee variabelen, heb je drie dimensies nodig: twee voor de twee onafhankelijke variabelen, en één voor de functiewaarde, de afhankelijke variabele.
In het voorbeeld van de silo's kun je de assen als volgt kiezen:

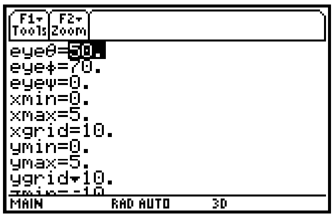


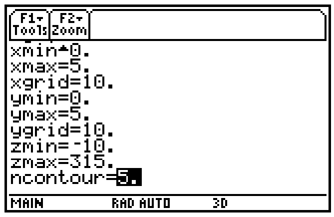
Als bijvoorbeeld $r = 1$ en $h = 2$, dan wordt de waarde van de oppervlakte (in dit geval bijna 19) verticaal uitgezet. Dus: Waarden van r en h bepalen een punt in het grondvlak. De functiewaarde is de hoogte van het verticale lijnstukje vanuit dat punt.

4 **a.** Maak een tabel waarin de functiewaarden staan in de andere roosterpunten die in het grondvlak zijn getekend.
b. Neem de figuur over in je schrift en zet de functiewaarden verticaal uit. Begin met de grootste functiewaarde, anders past die later misschien niet meer.

5 **a.** Verbind in de tekening van de vorige opgave de toppen van de verticale lijnstukken waarvoor geldt dat $r = 3$. Welke vorm krijg je?
b. En welke vorm heeft de kromme door de toppen wanneer $h = 4$?

TI-89 **6** **a.** Teken nu de driedimensionale (kortweg: 3D) grafiek van de oppervlaktefunctie $Opp = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ met de TI-89. Zie de aanwijzingen onder deze opgave en stel het kijkvenster als volgt in:





TI-89 **b.** Loop met TRACE over de grafiek en zoek het hoogste punt.

Wat wil je?	*Hoe doe je dat met de TI-89?*
De machine instellen op het tekenen van 3D-grafieken	kies MODE, druk bij Graph op ▶ kies optie 5: 3D, ENTER
Een functie van twee variabelen invoeren, bijvoorbeeld $Opp = 2\pi r^2 + 2\pi rh$	Y= intypen: 2*π*x^2+2*π*x*y
Het kijkvenster instellen	WINDOW
Een 3D-grafiek laten tekenen	GRAPH
Over de grafiek lopen	F3: TRACE, dan ▶ of ▲
De grafiek laten draaien	▶ even ingedrukt houden
Stoppen met draaien	ON

TI-89 **7** **a.** Stel in WINDOW eyeϕ in op 90 en laat de grafiek draaien.
TI-89 **b.** In één van de posities die tijdens het draaien passeren kun je goed zien dat verticale doorsnedes evenwijdig aan de y-as rechte lijnen zijn. Teken het plaatje in deze positie over in je schrift.
TI-89 **c.** Neem ook de aanblik van de verticale doorsnedes evenwijdig aan de x-as over in je schrift.
d. Wat is het verband tussen de bundels, die je getekend hebt in opgaven **2** en **3**, en de 3D-grafiek van deze opgave?

8 Voor de oppervlakte p van een rechthoek met basis x en halve omtrek s geldt: $p = x \cdot (s - x)$.
TI-89 **a.** Laat de 3D-grafiek van p tekenen.
TI-89 **b.** Bepaal de vorm van de doorsnedes in x- en y-richting.

9 Grafieken met *Derive*

***Derive* en de TI-89**

Deze paragraaf bevat een practicum met het computeralgebra programma *Derive*. Met *Derive* kun je vergelijkbare dingen doen als met de TI-89, maar er zijn enkele verschillen. Het scherm van de PC is groter dan dat van de TI-89 en geeft ook kleuren weer. *Derive* tekent grafieken sneller dan de TI-89; daarbij hoeft de onafhankelijke variabele niet noodzakelijk x te heten, zoals bij de TI-89. Een opvallend verschil is verder dat de TI-89 na het invoeren van een uitdrukking het antwoord meteen berekent of vereenvoudigt. *Derive* doet dat pas na het commando Symplify of =.

herhaling

In dit practicum worden zaken herhaald uit de vorige paragrafen: het tekenen van netten, van bundels en van 3D-grafieken. Tips voor het gebruik van *Derive* hiervoor staan in het kader hieronder.

hulpkader *Derive*

Wat wil je?	*Hoe doe je dat met Derive?*
Een uitdrukking invoeren	
Een uitdrukking berekenen of vereenvoudigen	=
Naar het 2D-grafiekenvenster gaan	
Een grafiek laten tekenen	
Het kijkvenster instellen	Set Range
Een grafiek verwijderen	
Terugkeren naar het algebra-venster	
Het scherm splitsen	Window Tile Vertically
Een bundel maken, bijvoorbeeld van $x + y = s$ met s in {-10, ..., 10}	, dan intypen: vector(x+y=s, s, -10, 10) =, ,
Een driedimensionale grafiek tekenen	
De oogpositie wijzigen	

1 In opgave 4 van paragraaf 6 is sprake van het verband $x + y = 5$.

a. Voer dit in en laat de grafiek tekenen. Je hoeft het niet eerst te herschrijven tot $y = 5 - x$.

b. Laat een bundel tekenen van $x + y = s$, waarbij s varieert van -10 tot 10.

c. Splits het scherm en voeg de bundel van $x - y = v$ toe, waarbij v ook loopt van -10 tot 10.
Zo krijg je het netwerk dat je al eerder hebt gezien.

2 **a.** Teken het netwerk bij

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x \cdot y = p$$

waarbij r loopt van 1 tot 10 en p van 1 tot 30.

b. Voor welke punten van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ geldt dat het product $x \cdot y$ maximaal is? Hoe zie je dat in het netwerk?

3 Gegeven is de formule $y = a \cdot x - \frac{1}{2}a^2$.

a. Laat een bundel grafieken tekenen waarbij a de waarden -10, -9, ..., 9, 10 doorloopt.

b. Welke grafiek wordt precies door deze lijnen ingesloten?

4 Ten slotte de 3D-grafieken.
Voor de oppervlakte p van een rechthoek met basis x en halve omtrek s geldt: $p = x \cdot (s - x)$.

a. Laat de 3D-grafiek van p tekenen.

b. Bepaal een oogpositie van waaruit de verticale doorsnedes evenwijdig aan de y-as goed zichtbaar zijn.

c. Doe hetzelfde voor de verticale doorsnedes evenwijdig aan de x-as.

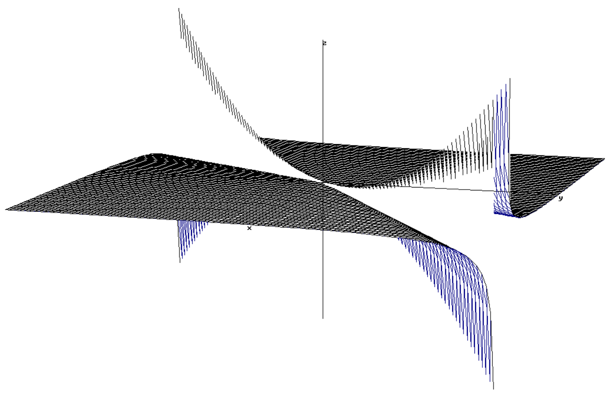
5 **a.** Laat de grafiek tekenen van de functie z met $z = x^2 - y^2$.

b. Bepaal een oogpositie zodat de grafiek uit bergparabolen lijkt te bestaan, en ook een die de indruk van dalparabolen geeft.

6 In paragraaf 7 heb je de lenzenformule leren kennen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$$

Hieronder zie je de 3D-grafiek van de beeldafstand b als functie van de voorwerpsafstand v en de brandpuntsafstand f.



a. Maak de grafiek na.

b. Verklaar het opvallende gedrag van de grafiek. Waar treedt het op?

10 Samenvatting en oefening

samenvatting

Het wordt tijd om eens terug te kijken op de inhoud van dit boekje.
De bedoeling is, dat je door het werken aan de opgaven van op pagina een samenvatting van het boekje maakt. Dus:

Maak de opgaven 1 t/m 7 op klad, en schrijf vervolgens een samenvatting waarin al je antwoorden verwerkt zijn.

stelsels vergelijkingen

De eerste paragrafen van het boekje gaan over stelsels vergelijkingen.

1 **a.** Geef een voorbeeld van een stelsel vergelijkingen.
b. Op welke twee manieren kun je zo'n stelsel oplossen?
c. Hoe kun je een plaatje maken bij een stelsel vergelijkingen?

netwerk

d. Wanneer is een netwerk van grafieken een geschikt plaatje bij zo'n stelsel?

substitutie, isoleren

2 **a.** Leg uit wat substitutie betekent.
b. Wat houdt isoleren van een variabele in?

3 Een stelsel van twee vergelijkingen kan meer dan twee variabelen bevatten.
a. Geef daarvan een voorbeeld.
b. Waarom is het handig om zo'n stelsel in het algemeen op te lossen?

drie variabelen

Als je een stelsel vergelijkingen aanpakt met de methode van isoleren en substitueren, ontstaan formules. In dit boekje bevatten die meestal drie variabelen. Bijvoorbeeld: $p = x \cdot (s - x)$.

4 Zoek nog enkele voorbeelden van dergelijke formules.

afhankelijke variabele
onafhankelijke variabele
parameter

Meestal speelt één van de variabelen in zo'n formule duidelijk de rol van afhankelijke variabele. Voor de twee andere variabelen zijn er dan twee mogelijkheden. De eerste is, dat er één onafhankelijke variabele is. Dan is de andere variabele een parameter. Die wordt eerst als constante beschouwd. Later krijgt de parameter ook andere waarden.

5 Het voorbeeld van de rechthoeken met vaste omtrek leidde tot de formule $p = x \cdot (s - x)$.
a. Welke rol speelt elk van de letters die hierin voorkomen?

bundel grafieken, 3D-grafieken

b. Wat is in dit geval een geschikt plaatje, een bundel grafieken of een 3D-grafiek? Waarom?

6 Als de waarde van een parameter verandert, gebeurt er iets anders dan wanneer de waarde van de onafhankelijke variabele verandert. Wat is het verschil?

Het is ook mogelijk, dat de formule behalve een afhankelijke variabele twee onafhankelijke variabelen bevat.

7 **a.** Geef een voorbeeld van zo'n geval.
b. Wat voor soort grafiek is dan het meest geschikt?

Op deze pagina vind je extra oefenopgaven.

8 Bekijk nog eens de lenzenformule $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$.

Stel dat je oog zich 40 cm boven een postzegel bevindt. Je kijkt daarnaar door een vergrootglas met $f = 7.5$ cm. Door dit vergrootglas heen en weer te bewegen, probeer je een scherp beeld te krijgen.

a. Welke twee vergelijkingen kun je in deze situatie opstellen?

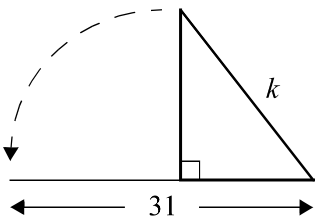
TI-89 **b.** Hoe ver van de postzegel moet je het vergrootglas houden?

9 Nog een maal de oppervlakte van rechthoeken met een vaste omtrek $2s$. Als x de basis is en y de hoogte, en de omtrek is $2s$, dan geldt voor de oppervlakte p: $p = x \cdot y = x \cdot (s - x)$

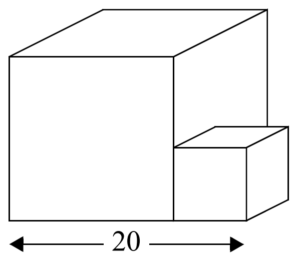
TI-89 **a.** Laat grafieken van de oppervlaktefunctie tekenen voor de gevallen $s = 1$, $s = 2$, ..., tot $s = 8$.

b. De toppen van deze grafieken liggen op een kromme. Welke vergelijking heeft deze kromme?

TI-89 **10** Twee rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek zijn samen 31 lang. De schuine zijde heeft een lengte van k. De vraag is, hoe lang de rechthoekszijden zijn.
Voor welke waarden van k heeft dit probleem geen oplossing?



11 Kijk nog eens terug naar opgave **5** van paragraaf 5. De ribben van twee kubussen zijn samen 20 lang. De totale inhoud van beide kubussen is d.
Welke waarden kan de totale inhoud d aannemen?



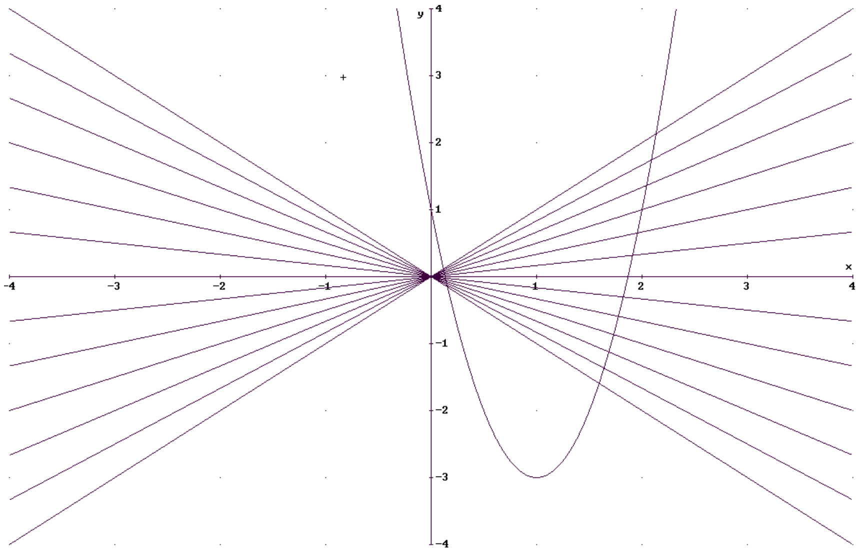
11 Onderzoeksopdrachten

Ter afsluiting volgen nu twee onderzoeksopdrachten. Deze opdrachten zijn wat omvangrijker dan de opgaven in de voorafgaande paragrafen.
Kies er een uit, waaraan je samen met een of twee medeleerlingen gaat werken. Let hierbij op de volgende aandachtspunten:

– werk goed samen;
– maak een net en overzichtelijk verslag;
– neem in het verslag ook vermoedens, redeneringen, argumenten en mislukkingen op;
– probeer verschillende oplosmethoden te combineren.

Succes!

1. Een 'waaier' van lijnen



In de figuur hierboven zie je de grafiek van de functie y met

$$y = 4x^2 - 8x + 1$$

Ook is een 'waaier' van lijnen door de oorsprong getekend. Zoals je ziet, varieert het aantal snijpunten dat deze lijnen hebben met de parabool.
Vragen zijn nu:

- Tussen welke waarden kan het aantal snijpunten variëren?
- Waarvan hangt het aantal snijpunten tussen lijn en kromme af?
- Bepaal een regel die aangeeft hoe je uit de vergelijking van de lijn het aantal snijpunten met de kromme kunt afleiden.

2. Het 'point of no return'

Een piloot stijgt op voor een pleziervluchtje met zijn sportvliegtuig. Hij vliegt eerst een tijdje met de wind mee, waardoor hij extra hard gaat. De hoeveelheid brandstof van het kistje is echter beperkt, dus na verloop van tijd moet hij weer aan omkeren gaan denken. De vraag is, waar en wanneer gekeerd moet worden, zodat weer op het vliegveld van vertrek kan worden geland.

Enkele gegevens:
- Het vliegtuigje, van het type 'Beechcraft Bonanza', haalt een snelheid van 300 km/uur.
- Er is bij de start voor 4 vlieguren brandstof aan boord.
- In de hogere luchtlagen waait een wind met een windsnelheid van 60 km/uur.

Onderzoek deze situatie en beantwoord de volgende vragen:
- Waarom is het geen goed idee om na 2 uur vliegen terug te keren?
- Hoe ver is het verste punt, van waaruit nog kan worden teruggekeerd, verwijderd van het vliegveld van vertrek?
- Hoe zit het bij andere windsnelheden?
- Hoe kun je in een netwerk of een bundel zien wat er gebeurt als de windsnelheid toenneemt?

Antwoorden

1 Som en verschil

1 Een zakje hartjes kost f 1,60 en een zakje spekjes f 2,00.
Er zijn verschillende manieren om dat te vinden. Bijvoorbeeld: spekjes kosten 40 cent meer dan hartjes, dus de eerste regel kan worden geschreven als ♥ + ♥ + ♥ + ♥ + 0,40 + ♥ + 0,40 = 8,80, zodat ♥ = 1,60.

2 **a.** Dat zijn twee zakjes van elk.
b. Nu zijn er verschillende mogelijkheden: Het kunnen 10 zakjes hartjes zijn, maar ook 5 zakjes hartjes en 4 zakjes spekjes.

3

$$3h + 2s = 8,80$$
$$2h + s = 5,20$$
$$s - h = 0,40$$

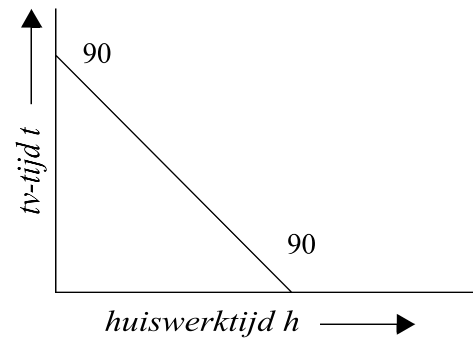
4 Een zakje hartjes kost nu f 2,00 en een zakje spekjes f 2,50.

5 **a.**

h (in minuten)	15	30	50	60	85
t (in minuten)	75	60	40	30	5

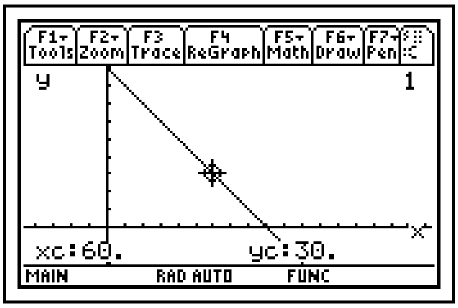
b. je kunt op zijn hoogst 90 minuten aan een van de activiteiten besteden; voor de andere is dan geen tijd meer over.
c. Als *h* groter wordt, wordt *t* kleiner.

6



7 **a.** $t = 90 - h$

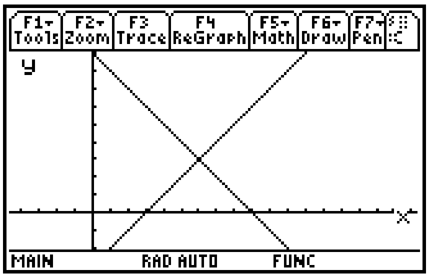
b.



c. Optellen van de coördinaten geeft steeds (ongeveer) 90.

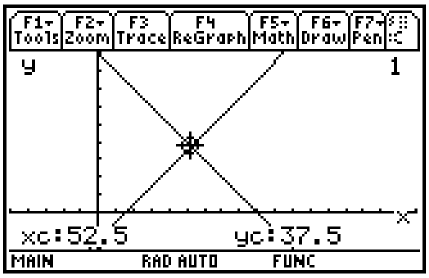
d. $t = 90 - h$, dus $t + h = 90$

8 **a.**



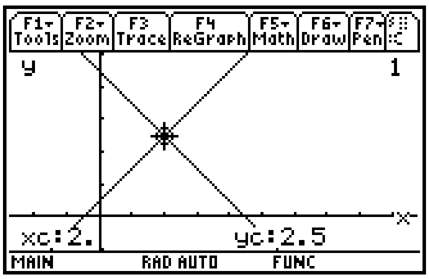
b. Als ook $t = h - 30$, dan $h = 60$ en $t = 30$.

9 **a.** In de grafieken zie je dat (ongeveer) $h = 52{,}5$ en $t = 37{,}5$.



b. Eerst de twee grafieken laten tekenen, en dan met TRACE het snijpunt opzoeken. Je kunt het ook uitrekenen: uitgaande van de helft, 45 minuten, moet daar 7,5 vanaf en erbij om een verschil van 15 minuten te krijgen.

10



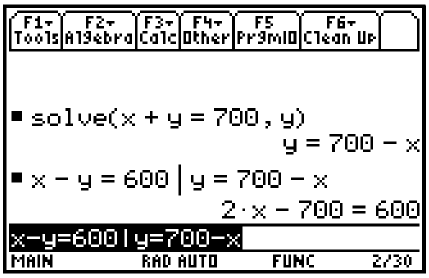
11 **a.** In beide gevallen weet je iets over de som van twee getallen en over het verschil: $t = 90 - h$ en $t = h - 30$, respectievelijk ◆ + ♥ = 4,50 en ◆ − ♥ = 0,50.

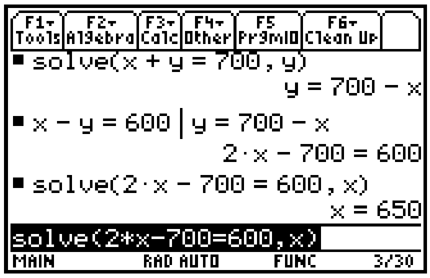
2 Algebraïsche oplossing

1 **a.** $x = 650$ en $y = 50$

b. Er zijn verschillende ‘recepten’ mogelijk. Bijvoorbeeld: je trekt 600 van 700 af, dat is 100, dat deel je door 2 en dat is dan y.
Of: Neem de helft van 700, 350. Trek daar de helft van 600, dus 300, van af. Dat geeft y.

2 **a.** / **b.** / **c.**





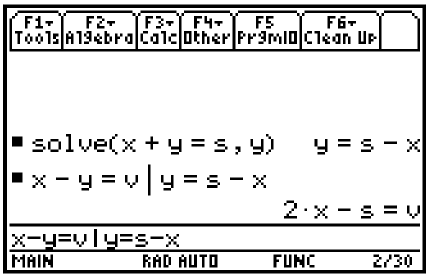
3 **a.** $s = 4,50$, $v = 0,50$

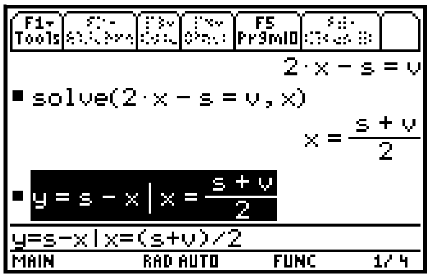
4 **a.** $h + t = 90$, $h - t = 30$

b. $s = 90$, $v = 30$

5 $s = 700$ en $v = 600$.

6





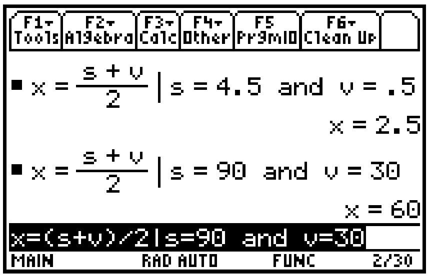
7 De lengte van het lijnstuk is s. Boven de streep zien we dat $x + y = s$. Als je vanuit s over een afstand x naar links gaat, kom je uit bij y, dus $y = s - x$.

8 **a.** $x - (s - x) = v$

b. Zie linkerscherm bij opgave 6.

c. $x = \dfrac{s + v}{2}$ en $y = \dfrac{s - v}{2}$

9 a. / **b.**



10 Simon is 15 jaar.

11 a. $h = 5$, $t = 0$
b. Er zijn geen oplossingen.

12 De algemene oplossing van het stelsel vergelijkingen

$x + y = s$, $x - y = v$ is $x = \dfrac{s+v}{2}$, $y = \dfrac{s-v}{2}$

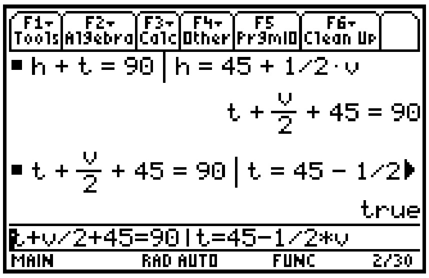
3 De kracht van algebra

1 a.

h	15	30	50	60	85
t	75	60	40	30	5
$v = h - t$	-60	-30	10	30	80
$h - 45$	-30	-15	5	15	40
$t - 45$	30	15	-5	-15	-40

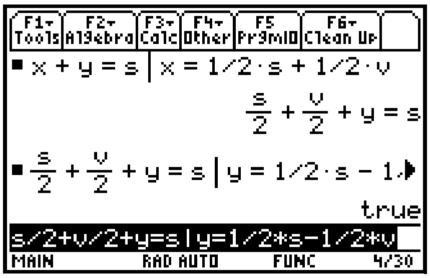
b. In de tweede nieuwe rij met $h - 45$ staat steeds de helft van de eerste nieuwe rij met $h - t$. De derde nieuwe rij is tegengesteld aan de tweede, dus $h - 45 = -(t - 45)$.
c. De helft van *v*.

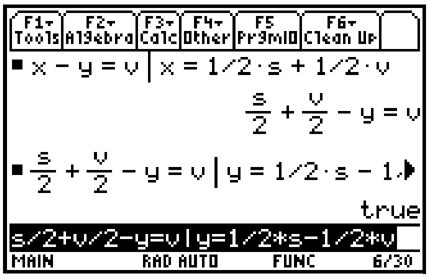
2



3 **a.** $x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}v$ en $y = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}v$

b.





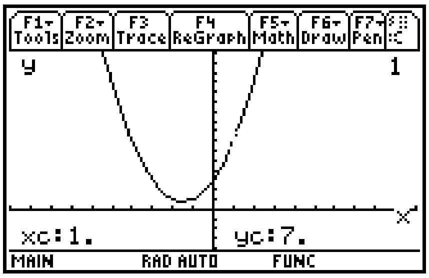
4 Een beetje een kwestie van smaak. Misschien werkt isoleren en substitueren uiteindelijk het makkelijkst als routine. Eerlijk verdelen geeft wel goed inzicht.

5 **a.** $a + b + 3 = 7$, dus $a + b = 4$

$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 3 = 1$, dus $a - b = -2$

b. Oplossen van dit som-verschil probleem geeft $a = 1$ en $b = 3$.

c.



6 **a.** Er geldt: $l + b = 140$. Omdat lengte en breedte bij het maken van de mat evenveel; toenemen, geldt bovendien: $l - b = 40$.

b. De oplossing van dit probleem is: $l = 90$ en $b = 50$.

4 Rechthoeken met vaste omtrek

1 **a.**

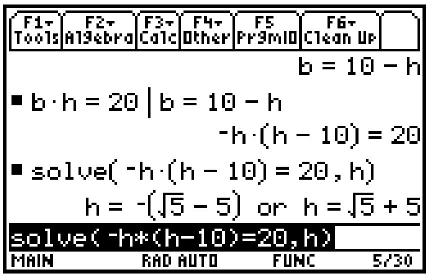
b. B heeft de grootste oppervlakte, namelijk 25. De kleinste oppervlakte is die van F : 4,75.

2 Eerst zal de oppervlakte toenemen. Na verloop van tijd zal een maximum worden bereikt. Daarna, als de rechthoek smaller en hoger wordt, zal de oppervlakte weer afnemen.

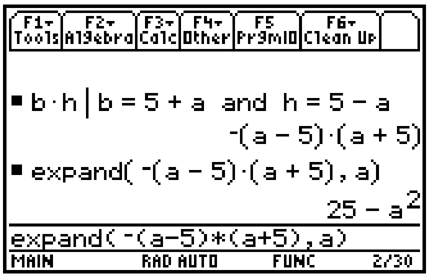
3 **a.** Vast wel: als de oppervlakte van 4,75 groeit tot 25, dan zal de tussenliggende waarde van 20 niet overgeslagen worden.

b. De vergelijkingen $b + h = 10$ en $b \cdot h = 20$.

c.



4 a.

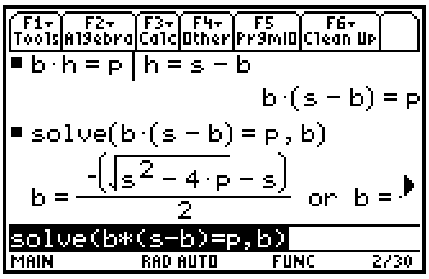


b. Haakjes uitwerken geeft $25 - a^2$. Omdat een kwadraat nooit negatief is, is $25 - a^2$ hoogstens 25.

c. solve($25 - a^2 = 20$, a) geeft op de TI-89: $a = \pm\sqrt{5}$,
dus $b = 5 \pm \sqrt{5}$.

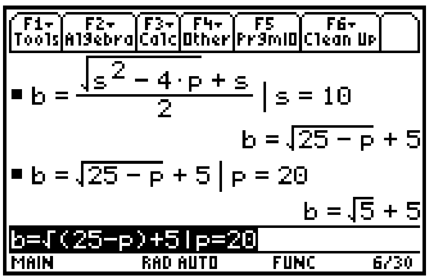
5 a. Een rechthoek van 6,5 bij 3,5.
b. Een rechthoek van ongeveer 17,4 bij 2,6.

6 a.

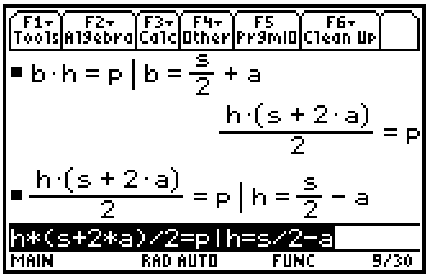


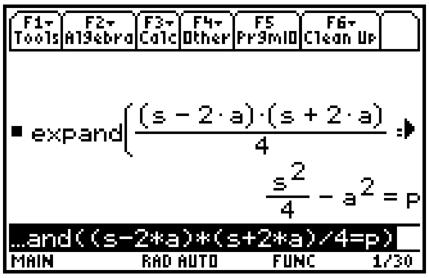
Dus: $b = \frac{1}{2}s \pm \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - 4p}$ en $h = \frac{1}{2}s \mp \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - 4p}$.

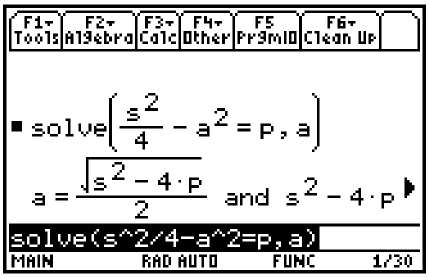
b.



7 **a.**







b. De formule is $\frac{1}{4}s^2 - a^2$, en dit is maximaal $\frac{1}{4}s^2$ als $a = 0$.

Dat betekent dat $b = h = \frac{1}{2}s$.

8 **a.** Het vierkant van 10 bij 10. De oppervlakte is dan 100.

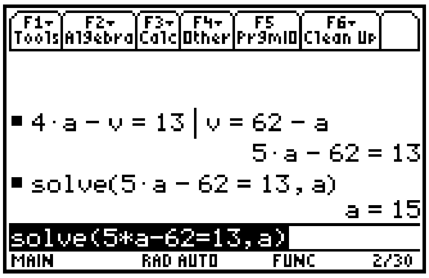
b. Dat is 4 keer zo veel als de maximale oppervlakte bij een omtrek van 20.

c. Als lengte en breedte allebei twee keer zo groot worden, wordt de oppervlakte 4 keer zo groot.

5 Substitutie

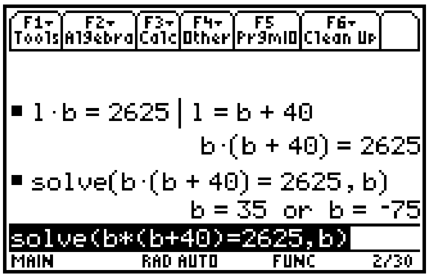
1 **a.** Als de leeftijd van Anne a is en die van haar vader v:
$a + v = 62$ en $4a - v = 13$.

b. Anne is 15 jaar:



2 De vergelijkingen voor lengte en breedte zijn:
$l - b = 40$ en $l \cdot b = 2625$.

Oplossen door isoleren en substitueren geeft $b = 35$ en $l = 75$:

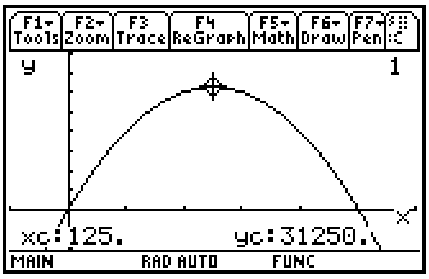


3 **a.** De lengte van de zijde loodrecht op het kanaal noemen we x en de andere y. Dan geldt: $2x + y = 500$ en $x \cdot y = 30000$.

Oplossen door isoleren en substitutie geeft: $x = 100$ en $y = 300$, of $x = 150$ en $y = 200$.

b. $opp = x \cdot (500 - 2x) = 500x - 2x^2$

c.



d. Het maximum lijkt in de grafiek te worden aangenomen voor $x = 125$. Vervang dus in de formule van vraag **b** x door $125 + a$.

Dat geeft: $opp = 31250 - 2a^2$. Dat is maximaal 31250 als $a = 0$, dus als $x = 125$.

Andere manier: de grafiek bij **c** is een parabool, omdat de oppervlakte een kwadratische functie is. De nulpunten zijn $x = 0$ en $x = 250$. De top van een parabool ligt altijd midden tussen de twee nulpunten, dus bij $x = 125$.

4 **a.** We noemen de rechthoekszijden x en y. Dan geldt:

$x + y = 31$ en $x^2 + y^2 = 25^2$.

Isoleren van y in de eerste vergelijking en substitueren in de tweede geeft: $x = 7$ en $y = 24$, of andersom.

b. Dezelfde aanpak als bij **a** geeft: $x = 15$ en $y = 20$, of andersom.

c. Stel nu $x + y = t$ en $x^2 + y^2 = z^2$.

Dezelfde manier als bij **a** en **b** leidt tot de antwoorden

$x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sqrt{2z^2 - t^2}$ en $y = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\sqrt{2z^2 - t^2}$, of andersom.

5 **a.** De lengte van de ribbe van de linker kubus noemen we x, de lengte van de andere ribbe y. De vergelijkingen zijn:

$x + y = 20$ en $x^3 + y^3 = 2240$.

Isoleren en substitueren geeft: $x = 12$ en $y = 8$, of andersom.

b. Isoleren van y in $x + y = s$ en substitutie in $x^3 + y^3 = d$ geeft ingewikkelde formules, die je met EXPAND kunt schrijven als

$x = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{4d - s^3}{12s}}$ en $y = \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{4d - s^3}{12s}}$, of andersom.

c. x is gelijk aan $\frac{1}{2}s$ waarbij een wortel wordt opgeteld, voor y moet diezelfde wortel van $\frac{1}{2}s$ worden afgetrokken.

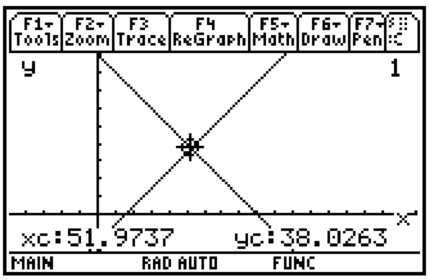
6 De afmetingen van het land stellen we x bij y. De vergelijkingen zijn: $x \cdot y = 540$ en $\sqrt{x^2 + y^2} = 39$. Deze tweede vergelijking kunnen we schrijven als $x^2 + y^2 = 39^2$. Hierin vervangen we y door $540/x$. Oplossingen: $x = 15$ en $y = 36$ of andersom.

7 Isoleren en substitueren geeft $x = 15 + \sqrt{14}$ en $y = 15 - \sqrt{14}$, of andersom.

6 Een netwerk van grafieken

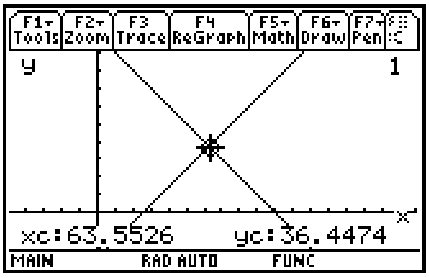
1 Zie scherm bij opgave **2**.

2 **a.** / **b.**

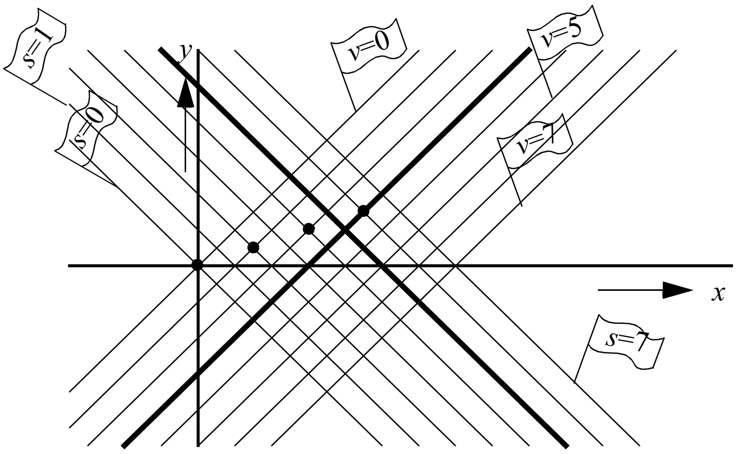


3 **a.** De dalende grafiek schuift 10 omhoog, de stijgende grafiek schuift 10 omlaag.

b.

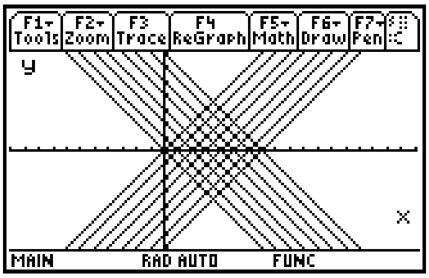


4 **a.**



b. Het snijpunt van de lijnen met vlaggetjes $s = 5$ en $v = 3$: zie de dikke lijnen in het antwoord bij vraag **a**. De coördinaten van het snijpunt zijn (4, 1).

5 **a.**

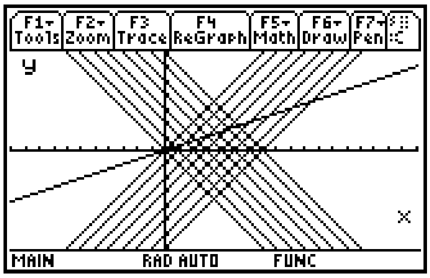


b. Dan wordt de lijn omhoog geschoven.
c. Dan schuift de lijn omlaag.

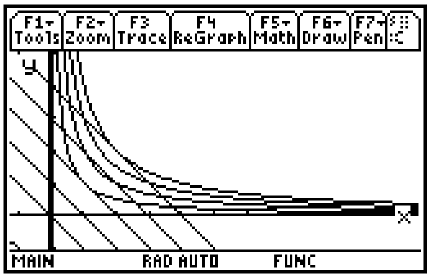
6 **a.** Zie de dikgekleurde punten in de figuur bij opgave **4a**.
b. Zie het antwoord bij onderdeel **d**.
c. De vergelijking is $y = \frac{1}{3}x$.

Verklaring: in zo'n snijpunt geldt dat $y = 2 \cdot v - x = x - v$, dus $2x = 3v$, dus $x = \frac{3}{2}v$ en $y = \frac{1}{2}v$. Daaruit volgt: $y = \frac{1}{3}x$.

d.



7 **a.**



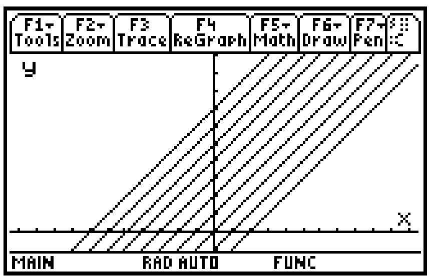
b. Neem een van de lijnen met vergelijking $y = s - x$. De kromme met de hoogste p-waarde die de rechte snijdt, raakt de rechte in punten waarvoor geldt dat $y = x$.

8 **a.** Als x groter wordt, loop je naar rechts over de grafiek. Omdat de grafiek daalt, wordt de y-waarde dus kleiner.

b. Als de waarde van s verandert, verandert de hele grafiek. Bij toenemende s wordt de grafiek als geheel omhoog geschoven. Als s kleiner wordt, schuift de hele grafiek omlaag.

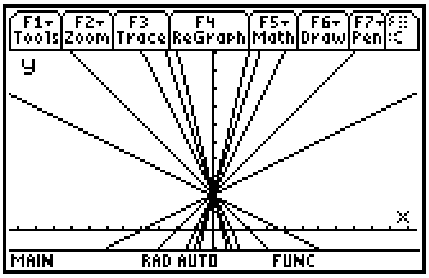
7 Een bundel grafieken

1 **a.**



b. Dan schuift de grafiek omhoog.

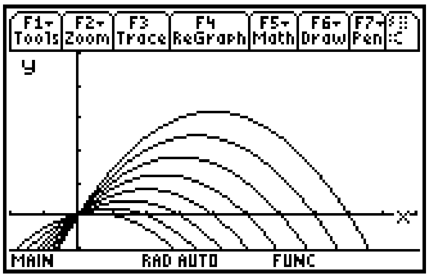
2 **a.**



b. Ze gaan allemaal door het punt (0, 2).
c. Dan gaat de grafiek steiler lopen.

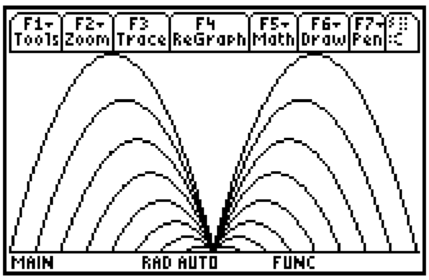
3 **a.** Nee, er gaan verschillende lijnen door (3, 1). Algebraïsch argument: invullen van de coördinaten geeft $a + b = 3$, en dat heeft verschillende oplossingen.
b. Nu wel: behalve $a + b = 3$ weten we nu ook dat $3a + b = -1$. Oplossen van dit stelsel geeft $a = -2$ en $b = 5$.

4 **a.**



b. Het zijn allemaal parabolen.
c. Als de omtrek groter wordt, wordt s groter. De parabool blijft dan door (0, 0) gaan, maar het tweede nulpunt schuift naar rechts. De top van de parabool komt hoger te liggen.

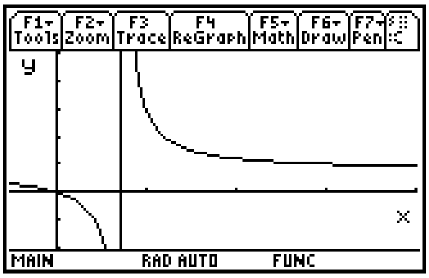
5 Bij het maken van onderstaande fontein is de bundel van opgave 4 uitgebreid met functies die voor negatieve x een 'waterstraal' geven.
Als extraatje zijn met F1 optie 9:Format de assen en de labels uitgezet.



6 Invullen geeft: b is ook gelijk aan 15.

7 Oplossen naar b geeft: $b = \dfrac{f \cdot v}{v - f}$.

8 **a.**

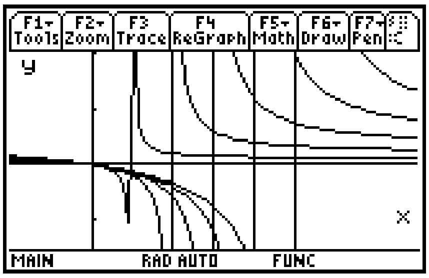


b. De sprong bij $x = 7.5$ valt op. Die is het gevolg van de $x - 7.5$ in de noemer van de formule.

c. Als het voorwerp steeds verder weg komt te staan, zal het beeld kleiner worden en dichter bij het brandpunt komen. De waarde van b zal dus naar 7.5 toe kruipen, en dat is met TRACE in de grafiek te controleren.

In de formule is dat moeilijker te zien: als <u>x</u> heel groot wordt, maakt het niet veel meer uit of je er in de noemer 7.5 van af trekt. Bij benadering zal b dan gelijk zijn aan $7.5 \cdot x / x$, dus aan 7.5.

9 **a.**



b. De grafiek, en ook de verticale sprong, schuiven naar rechts, en de grafiek komt ook hoger te liggen.

c. De afhankelijke variabele is hier b, de onafhankelijke v, en f is de parameter.

8 Driedimensionale grafieken

1 **a.** Voor 42.4 m^2.

b. Voor 75.4 m^2.

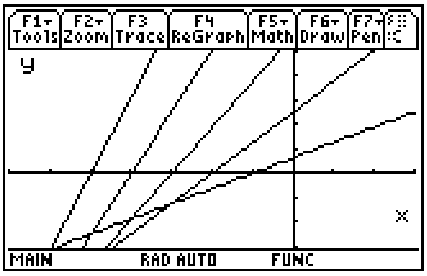
c. De oppervlakte is de som van de oppervlakte van boven- en onderkant en die van de zijkant, de cilindermantel:

$$opp = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

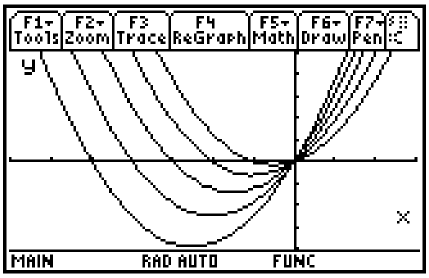
2 **a.** Als $r = 2$, dan $opp = 8\pi + 4\pi h$.

De grafiek is dan een rechte lijn.

b. Het zijn allemaal recht lijnen.



3 a.

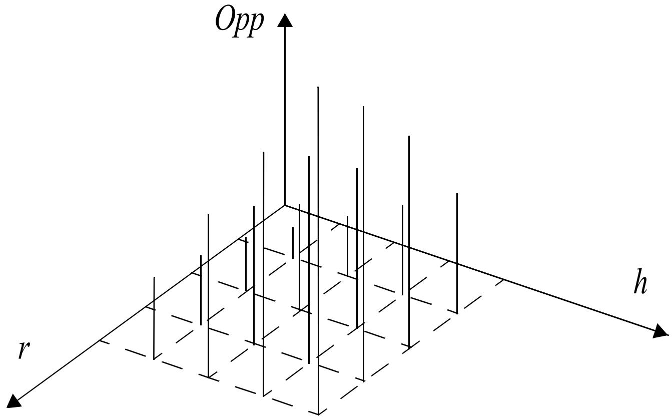


b. Het zijn allemaal parabolen.

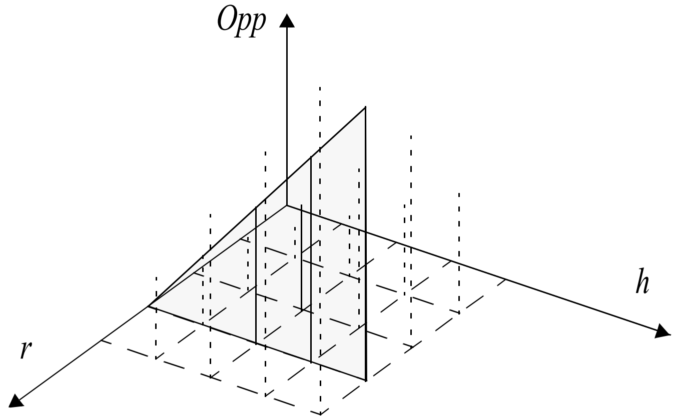
4 a.

OPP	$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$
$h = 0$	0	6.3	25.1	56.5	100.5
$h = 1$	0	12.6	37.7	75.4	125.7
$h = 2$	0	18.5	50.3	94.2	150.8
$h = 3$	0	25.1	62.8	113.1	175.9
$h = 4$	0	31.4	75.4	132.0	201.0

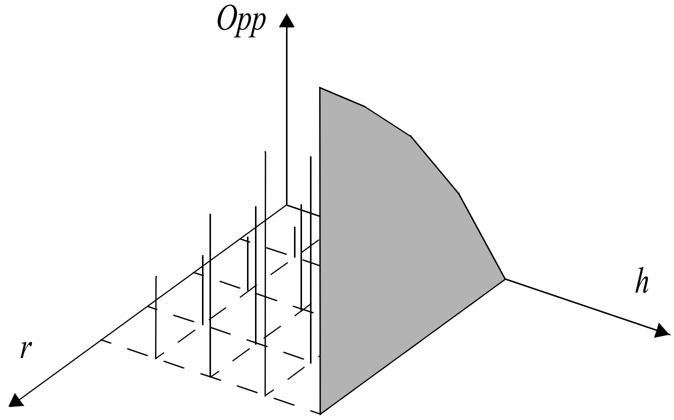
b.



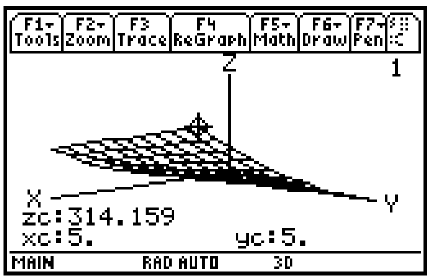
5 a. Zie figuur hieronder. De kromme voor $r = 3$ is een rechte lijn.



b. Zie figuur hieronder. De kromme voor $h = 4$ is een parabool.



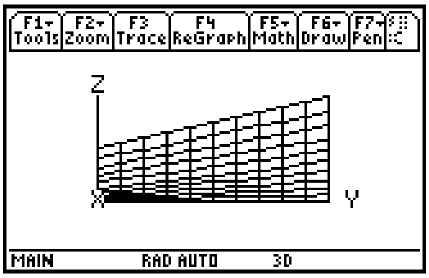
6 a.



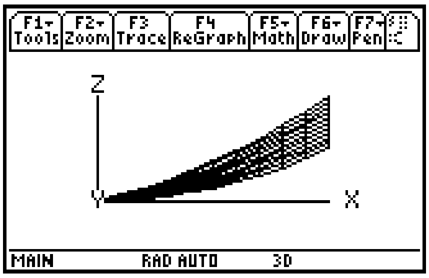
b. De grootste *z*-waarde op het ingestelde rooster is 314.2.

7 a.

b. Dit is het geval als eyeθ = 0:

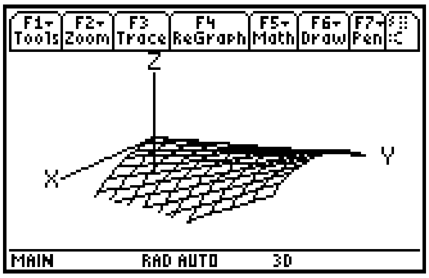


c. Dit is het geval als eyeθ = -90:

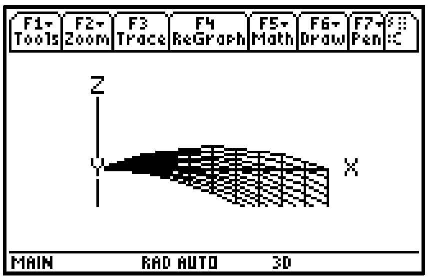


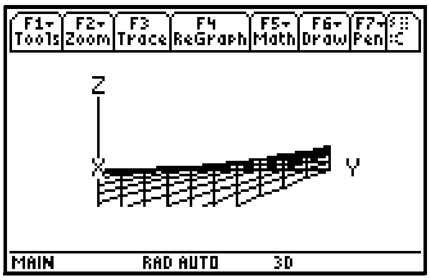
d. De grafieken van de bundel worden in de 3D-grafiek als het ware achter elkaar geplaatst. Vanuit geschikte oogpositie ziet de 3D-grafiek er uit als een bundel.

8 a.



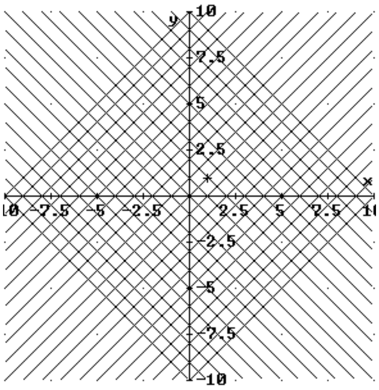
b. De doorsnedes zijn parabolen en rechte lijnen.



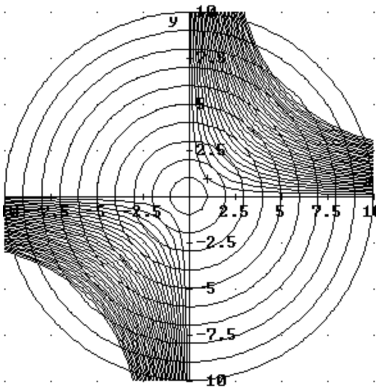


9 Grafieken met *DERIVE*

1 a. / b. / c.



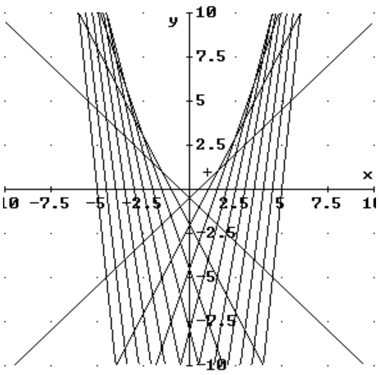
2 a.



b. Voor punten waarvoor x en y aan elkaar gelijk zijn, want dan raakt de cirkel aan de kromme met de grootste p-waarde.

Dus: $x = y = \sqrt{\frac{25}{2}}$

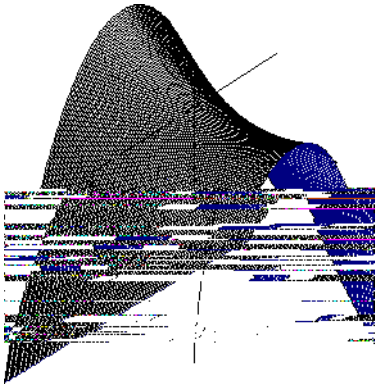
3 a.



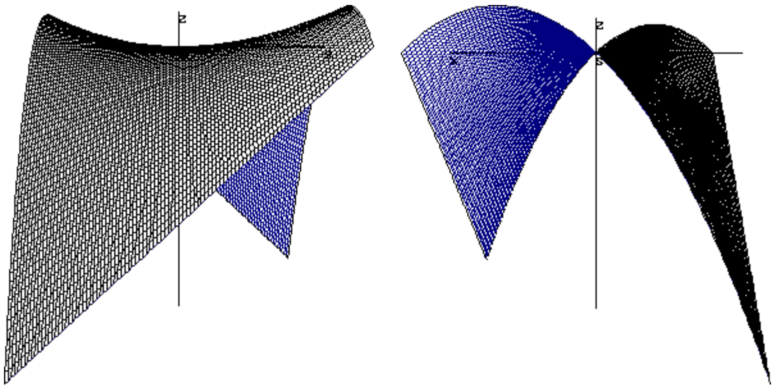
b. Het lijkt een parabool te zijn door de oorsprong.

Door te proberen blijkt: $y = \frac{1}{2}x^2$ is de goede.

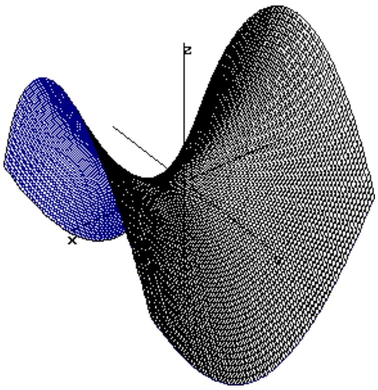
4 a.



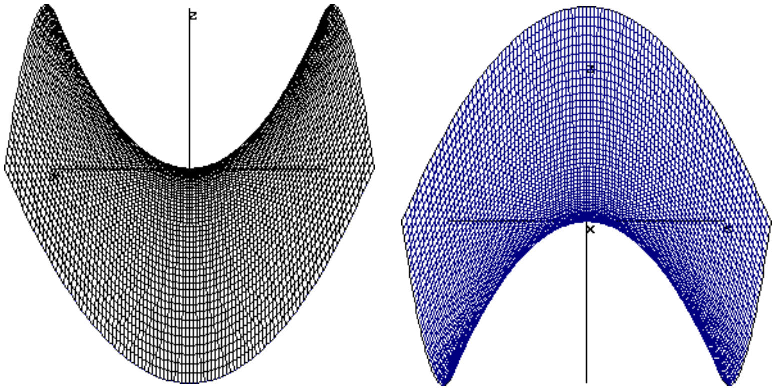
b. / **c.** De oogposities zijn (20, 0, 0) en (0, 20, 0).



5 a.



b. / **c.** De oogposities zijn (20, 0, 0) en (0, 20, 0).



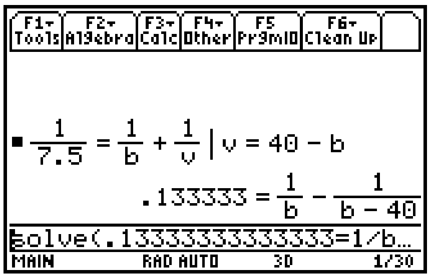
6 **a.**

b. De formule voor b is: $b = \frac{f \cdot v}{v - f}$. De vreemde ‘kloof’ die ontstaat, wordt veroorzaakt doordat b niet kan worden berekend als v en f aan elkaar gelijk zijn.

10 Samenvatting en oefening

8 **a.** De vergelijkingen zijn: $b + v = 40$ en $\frac{1}{7,5} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$.

b. Oplossen door isoleren en substitutie geeft $b = 10$ of $b = 30$.



9 **a.** Zie het antwoord van opgave **4a** van paragraaf 7.

b. De x-coördinaat van de top van de parabool met vergelijking $y = x \cdot (s - x)$ is gelijk aan $\frac{1}{2}s$.

Uit substitutie volgt dan dat de y-coördinaat dan gelijk is aan $\frac{1}{4}s^2$, en dat is het kwadraat van de x-coördinaat.

De vergelijking is dus $y = x^2$

10 De vergelijkingen zijn: $x + y = 31$ en $x^2 + y^2 = k^2$.

Oplossen door isoleren en substitutie geeft: $x = \frac{31}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - 961}$.

Dit bestaat alleen als het getal onder het wortelteken niet negatief is.

Het getal onder de wortel is gelijk aan nul als $k = \frac{31}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 21,9$

Zo groot moet *k* dus minstens zijn, wil er zo'n driehoek bestaan. Natuurlijk kan *k* ook niet groter zijn dan 31.

Er is dus geen oplossing voor $k < \frac{31}{2} \cdot \sqrt{2}$ en voor $k > 31$.

11 De lengte van de ribbe van de linker kubus noemen we *x*, de lengte van de andere ribbe *y*. De vergelijkingen zijn:
$x + y = 20$ en $x^3 + y^3 = d$.
Isoleren en substitueren geeft:
$x = 10 + \sqrt{\frac{4d - 1000}{120}}$ en $y = 10 - \sqrt{\frac{4d - 1000}{120}}$, of andersom.
Wil deze wortel bestaan, dan moet gelden dat *d* minstens 250 is.