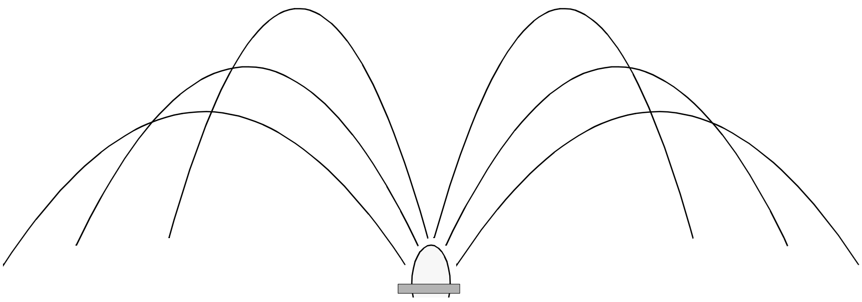
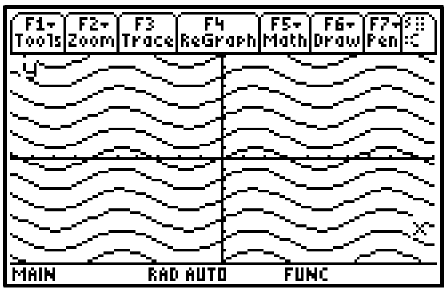
Fonteinen en bundels





Algebra leren met
computeralgebra
Freudenthal Instituut

Over dit boekje

In de eerste paragraaf van dit boekje wordt de bediening van de TI-89 herhaald. Deze eindigt met een zelftoets, waarmee je zelf kunt nagaan of je de machine voldoende beheerst.

! Bij sommige opgaven, zoals bijvoorbeeld **11 c** van paragraaf 1, staat een ! in de kantlijn. Dat betekent dat dit onderdeel belangrijk is en speciaal wordt aanbevolen.

In de tweede paragraaf wordt aan de hand van een voorbeeld geschetst waar het in deze lessenserie om gaat: om formules die een of meer parameters bevatten. De paragraaf eindigt met een serie vragen die verder in het boekje aan de orde komen.

De paragrafen 3, 4 en 5 gaan over de vraag wat er met een grafiek gebeurt als de waarde van de parameter in de formule verschuift. In paragraaf 4 wordt dat onderzocht met een computerprogramma, TI-Interactive. Paragraaf 5 heeft meer het karakter van een praktische opdracht.

In paragrafen 6 en 7 staat het opstellen van formules met parameters centraal. Ze ontstaan door het generaliseren van concrete gevallen, en vatten zo een heleboel formules en situaties samen. Zo'n hele familie van formules geeft in een plaatje een bundel grafieken.

In paragrafen 8 en 9, ten slotte, worden vergelijkingen opgelost waar parameters in voorkomen. De algemene oplossing die je zo krijgt, staat voor een hele verzameling van specifieke oplossingen en kan worden gebruikt om een speciaal lid uit een familie van formules of uit een bundel van grafieken te selecteren.

Fonteinen en bundels

Project:	Algebra leren met computeralgebra
Klas:	VWO 4-II
Staat:	Eerste versie voor experiment Werkplaats Kindergemeenschap, oktober 2002
Ontwerp:	Paul Drijvers

Inhoud

1 Herhaling TI-89

Je bent gewend om te werken met een grafische rekenmachine van het type TI-83. In dit boekje gebruik je de TI-89, die je vorig jaar bij het project in v3 al hebt leren kennen. Veel zaken gaan op de TI-89 ongeveer zoals op de TI-83. Deze paragraaf gaat over de verschillen tussen de twee machines. Belangrijk daarbij is dat je met de TI-89 algebra kunt doen die op de TI-83 niet mogelijk is.

rekenen

1 **a.** Bereken 1/2 + 1/4. Het antwoord is een breuk en niet een decimaal getal zoals op de TI-83.
b. In de invoerregel staat weer 1/2 + 1/4.
Sluit nu af met ≈ (spreek uit als "is ongeveer gelijk aan").
≈ is de groene betekenis van ENTER, dus ♦ ENTER.
Dat geeft de decimale schrijfwijze .75.
c. Bereken 0.5+1/4. Omdat 0.5 al een decimaal getal is, krijg je nu met ENTER meteen een decimaal geschreven antwoord.

2 **a.** Ga na dat 2/8 een ander antwoord geeft dan 2.0/8.
b. Bereken $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ en laat ook de decimale benadering berekenen.
c. Druk op F1. Je ziet een menu openrollen.
Kies om het scherm schoon te maken optie 8: Clear Home.

exact of decimaal

Bij het rekenen met de TI-89 moet je in de gaten houden of je met exacte getallen werkt zoals 5 of 1/3 of $\sqrt{2}$, of met decimale benaderingen, zoals 5.0 of 0.33333 of 1.41421356237. Vaak geven = en ≈ verschillende antwoorden. We schrijven in dit boekje net als de TI-89 decimale getallen met een punt in plaats van met een komma.
Bij algebra kan de TI-89 goede diensten bewijzen, bijvoorbeeld bij het vereenvoudigen van uitdrukkingen en het wegwerken van haakjes.

vereenvoudigen

3 **a.** Ga naar het HOME-scherm en voer in: 3a + 5a
De letter a voer je in met ALPHA =.
Je ziet dat de TI-89 dit meteen vereenvoudigt.
Bij grafieken gebruikt de TI-89 net als de TI-83 steeds de letters x en y; bij algebra kun je elke letter gebruiken die je maar wilt.

! **b.** Voer in: a*b*c*a*b/c. Ook dit wordt meteen vereenvoudigd.
Klopt het antwoord voor alle waarden van a, b en c?

haakjes uitwerken

4 **a.** Voer in: (p + q)^2.
Nu gebeurt er niets; de TI-89 werkt het kwadraat niet uit.
b. Wegwerken van de haakjes gaat met expand.
Kies F2: Algebra, en dan optie 3: expand.
Kies ▲ en ENTER en voeg zo (p + q)^2 toe:
expand((p + q)^2), ENTER
c. Laat ook de haakjes wegwerken in $(c + 5) \cdot (c - 3)$.

ontbinden in factoren

5 Andersom, ontbinden in factoren, gaat met optie 2:Factor uit het Algebra-menu. Voer in: factor(c^2 + 2c – 15, c). De c na de komma geeft aan naar welke variabele de machine moet ontbinden.

Je kunt de TI-89 ook vergelijkingen laten oplossen. Daarbij is het noodzakelijk dat je aangeeft naar welke letter moet worden opgelost.

vergelijkingen

6 a. Open het Algebra-menu en kies 1:solve. Vul dit aan tot:

solve(3x + 5 = 7, x)

Je voert dus na solve eerst de vergelijking in, dan een komma en en na de komma de variabele waarnaar moet worden opgelost.

b. Sluit af met ≈ in plaats van met ENTER.
Dat geeft geen breuk maar een decimale benadering als antwoord.

c. Laat ook de vergelijking $x^2 = 3$ oplossen.

7 a. Ga met Y= (dus met ♦ F1) naar het functiebestand en voer in:

y1 = x + 1
y2 = –x^2 + x +6

Let op de twee verschillende min-toetsen, die je kent van de TI-83.
Laat met GRAPH (♦ F3) de grafieken tekenen.

b. Benader met TRACE (F3) de coördinaten van de snijpunten.

c. Ga weer naar het HOME-scherm en voer daar in:

solve(y1(x) = y2(x), x).

Je kunt y1 en y2 gewoon intypen; VARS Y-VARS zoals op de TI-83 is niet nodig. Zo vind je de exacte x-coördinaten van de snijpunten van de twee grafieken.

d. Bereken ook de y-coördinaten van de snijpunten en ga na dat je antwoorden overeen komen met die van vraag **b**.

8 a. Voer in: solve(a*x + b = 6, x). Tussen a en x moet een * staan, anders wordt ax als één woordvariabele beschouwd.
Het antwoord is een formule: x wordt uitgedrukt in a en b.
Reken het antwoord na met de hand.

b. Verander de laatste x in de solve-opdracht van de vorige opgave in b.
Zo los je de vergelijking naar b op en wordt b uitgedrukt in a en x.
Verklaar dit antwoord.

! **c.** Wat verwacht je voor antwoord als je naar a laat oplossen?

substitueren

Met de verticale streep | kun je een letter door een getal vervangen. Dat heet ook wel substitueren. Je kunt | ook gebruiken om een variabele door een formule te vervangen. Je spreekt | uit als ‘waarin’ of ‘waarbij’.
Verwar deze ‘waarin-streep’ | niet met de deelstreep /.

9 a. Ga naar het HOME-scherm en voer in: 3x + 5 | x = 2
Wat achter de waarin-streep staat, wordt voor de streep ingevuld.
x krijgt (alleen in deze regel!) de waarde 2, dus het antwoord is 11.
Je spreekt 3x + 5 | x = 2 uit als ‘3x + 5 *waarin* x = 2’.

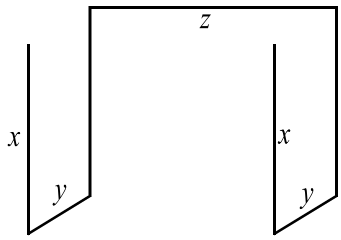
b. Vervang x in 3x + 5 nog een keer, maar dit keer door a+1.
Verklaar het antwoord dat je krijgt.

10 a. Geef a in (a+b)^3 de waarde 5.

b. Haal de uitkomst de invoerregel binnen en geef b de waarde 3.

c. Je kunt deze twee substituties ook tegelijk uitvoeren.
Voer daarvoor in: (a+b)^3 | a=5 and b=3
Je vindt and in de woordenlijst die je krijgt met catalog.

11 Een rechthoekige gebogen draad van 120 cm lengte dient om een doos te verstevigen. De zijkanten van de doos worden met reclameplaten beplakt.
Daarvoor moet gelden: $x = 2y$.
De inhoud I van de doos is gelijk aan $x \cdot y \cdot z$.



a. Voer in: I = x*y*z | x=2y.
b. Gebruik het gegeven van de totale lengte om een formule voor de inhoud op te stellen waar de hoogte z niet meer in voor komt.
! **c.** De formule voor de inhoud, die je zo krijgt, kan op verschillende manieren worden geschreven. Geef minstens drie gedaantes ervan.

12 a. Substitutie met de 'waarin-streep' | kan ook gebruikt worden in het functiebestand.
Ga daar met Y= naar toe en voer als y1 in: y1 = (x+b)^2 | b = 5.
Met GRAPH wordt de grafiek getekend voor b = 5.
b. Je kunt ook twee grafieken krijgen: y1 = (x+b)^2 | b = {5, 10}
De waarden moeten dan als verzameling tussen accolades worden ingevoerd.
c. Of een heleboel grafieken: y1 = (x+b)^2 | b = {–5, –3, –1, 1, 3, 5}

Zelftoets

Maak de volgende opgaven en schrijf de antwoorden in je schrift.
Probeer het eerst zonder terug te kijken naar de vorige opgaven.
Zet erbij hoe je aan het antwoord bent gekomen en op welke knoppen je hebt gedrukt.

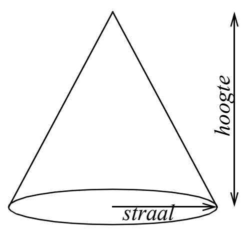
1 Werk $(x + y)^3$ uit en ontbind het antwoord weer in factoren.

2 Gegeven zijn de lijn met vergelijking $y = x + 1$ en de halve cirkel met vergelijking $y = \sqrt{25 - x^2}$.
Voer de formules in, zoek een geschikt kijkvenster en laat de grafieken tekenen.

3 Bereken de exacte coördinaten van het snijpunt van de grafieken van de vorige opgave en controleer de antwoorden met TRACE in de grafieken.

4 Laat de grafieken tekenen van $y = x + b$ voor $b = 1, 2, 3, 4, 5$.

5 De inhoud van de kegel hiernaast is de oppervlakte van het grondvlak keer de hoogte gedeeld door 3, dus $i = \frac{1}{3} \cdot g \cdot h$.
De oppervlakte van het grondvlak is π maal het kwadraat van de straal, dus $g = \pi \cdot s^2$.
Druk i uit in h en s.
π krijg je met 2nd ^.



! **6** Leg uit wat er gebeurt als je intypt $i = \frac{1}{3} \cdot g \cdot h | g = \pi \cdot s^2$.

2 Instap

gewicht en oppervlakte

In 1879 heeft de bioloog Meeh onderzocht hoe de huidoppervlakte van de 'gemiddelde mens' samenhangt met het lichaamsgewicht. Op grond van theoretische overwegingen nam hij aan dat de huidoppervlakte evenredig is met het gewicht tot de macht 2/3. Als we het lichaamsgewicht (in kg) G noemen en de huidoppervlakte (in dm^2) H, dan geeft dat de formule

$$H = \ldots\ldots \cdot G^{2/3}$$

De vraag is welk getal op de stippeltjes staat. Meeh verrichte huid-oppervlaktemetingen bij 16 mensen door de huid stukje voor stukje te bedekken met millimeterpapier. Zo vond hij voor de mens als evenredigheidsconstante 11.

1 **a.** Laat de grafiek tekenen van het verband $H = 11 \cdot G^{2/3}$.
b. Bereken je eigen huidoppervlakte volgens dit model.

2 Ook bij vleermuizen zijn dergelijke metingen gedaan, en het blijkt dat daarvoor de formule $H = 57.5 \cdot G^{2/3}$ geldt.
a. Leg uit waarom de constante in de formule groter is dan die van de mens.
b. Laat in hetzelfde assenstelsel ook de grafiek tekenen die het verband weergeeft tussen huidoppervlakte en lichaamsgewicht van de gemiddelde vleermuis .
c. Hoe kun je de 'vleermuizengrafiek' krijgen uit de grafiek van de mensen?

In de tabel hiernaast staat voor verschillende diersoorten de evenredigheidsconstante, die de *Meeh-coëfficiënt* wordt genoemd.

Tabel met waarden van de Meeh-coëfficiënt.

diersoort	*k*
muis	9.0
rat	9.1
kat	10.0
guinees biggetje	9.0
konijn	9.8
hond (> 4kg)	11.2
hond (< 4kg)	10.1
schaap	8.4
varken	9.0
koe	9.0
paard	10.0
mens	11.0
aap	11.8
luiaard	10.4
stekelvarken	10.8
marmot	9.3
egel	7.5
vleermuis	57.5
vogel	10.0
kikker	10.6
vis	10.0
schildpad	10.0
slang	12.5

3 **a.** Welk dier uit de tabel heeft de laagste Meeh-coëfficiënt?
b. Hoe had je dit kunnen voorspellen?

4 **a.** Wat is de overeenkomst tussen de verschillende oppervlakte-gewicht grafieken?
! **b.** Welke 'overkoepelende' formule geeft het verband tussen de huidoppervlakte en het lichaamsgewicht voor alle diersoorten weer?
c. Kun je van de formule die je bij **b** hebt gevonden een gewone grafiek laten tekenen? Waarom wel / niet?

formules met twee variabelen

De formule van Meeh voor de mens is

$$H = 11.0 \cdot G^{2/3}$$

Deze formule bevat twee variabelen, namelijk H en G.
Andere formules met twee variabelen zijn bijvoorbeeld:

$$2x + y = 16$$

$$I = -6y^2 \cdot (y - 40)$$

$$y = \sqrt{x} + 5$$

Bij zo'n formule kun je een grafiek maken. Je bepaalt eerst welke variabele op de horizontale as komt te staan, en zet dan de andere verticaal uit.

formules met meer variabelen

De algemene, 'overkoepelende' formule van Meeh bevat een extra variabele, die samenhangt met de bouw van de verschillende diersoorten. Als we die k noemen, geeft dat:

$$H = k \cdot G^{2/3}$$

Andere formules met drie of meer variabelen zijn bijvoorbeeld

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b}$$

$$y = a \cdot x + b$$

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

familie van formules

parameter

Het voordeel van een algemeen verband zoals $H = k \cdot G^{2/3}$ is dat je met één formule eigenlijk een hele *familie van formules* beschrijft, die voor alle diersoorten geldig is. Elke waarde van de derde variable k geeft een nieuwe formule met twee variabelen. Deze derde variabele wordt een *parameter* genoemd. Een formule met een parameter beschrijft dus een familie van formules en heeft betrekking op een klasse van situaties. Je kunt bij zo'n formule niet één grafiek tekenen, want elke waarde van de parameter geeft een nieuwe grafiek. Je moet eerst een 'familielid' uit de familie kiezen, voor je een grafiek kunt maken. Als je verschillende grafieken in één figuur zet, geeft dat een bundel grafieken.

vragen

Dit boekje gaat over formules met parameters. Het draait om vragen als:

1. Wat gebeurt er met de grafiek van een familielid als de waarde van de parameter verandert?
2. Wat voor plaatje krijg je als je een bundel grafieken laat tekenen?
3. Hoe maak je formules waar parameters in voorkomen?
4. Hoe kun je vergelijkingen oplossen waar een parameter in voorkomt?
5. Hoe kun je uit de familie een familielid terugvinden dat aan een bepaalde voorwaarde voldoet?

Op deze vragen gaan we in de volgende paragrafen verder in.

! **5** **a.** Bedenk zelf een verhaaltje of een situatie die leidt tot een formule met meer dan twee variabelen.
b. Laat voor enkele parameterwaarden de grafieken tekenen.

3 Wat gebeurt er met de grafiek?

De eerste vraag aan het einde van de vorige paragraaf luidde:

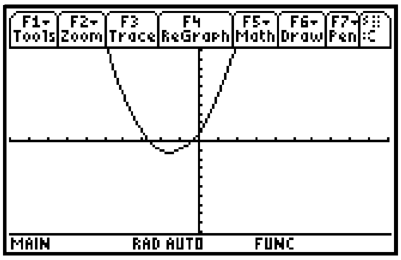
Wat gebeurt er met de grafiek van een familielid als de parameterwaarde verandert?

Dat ga je in deze paragraaf onderzoeken met de TI-89.
Schrijf je antwoorden in je schrift en schets daarbij ook de grafieken.

1 De familie van kwadratische functies wordt voorgesteld door:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Deze formule bevat de drie parameters a, b en c. Dat zijn er wat erg veel. Daarom stellen we in deze opgave dat $a = 1$ en $c = 1$.



a. Welke formule krijg je als $b = 3$? Laat hiervan de grafiek tekenen.
b. Verander de waarde van b en laat steeds de grafiek tekenen. Denk hierbij ook aan negatieve waarden van b!
! **c.** Hoe verandert de grafiek als b groter wordt?
d. Door welk punt lijkt elk van de grafieken te gaan? Verklaar uit de formule dat dat inderdaad zo is.

2 Neem nu in de algemene gedaante van de kwadratische functie $b = 1$ en $c = 1$.
a. Laat voor enkele waarden van a de grafiek tekenen.
b. Hoe verandert de grafiek als a toeneemt?
c. Voor welke waarde van a is de grafiek een rechte lijn? Verklaar dat ook uit de formule.

3 **a.** Voer y_1 in als $y_1(x) = (x - a)^3 \mid a = 2$.
b. Hoe verandert de grafiek als a groter wordt?
c. Is $y = x^3 + 18x^2 + 108x + 216$ ook 'lid van de familie'? Zo ja, welke waarde van a hoort hierbij? Zo nee, waarom niet?
! **d.** Hoe kun je de algebra van de TI-89 gebruiken om vraag **c** te beantwoorden?
e. Is $y = x^3 - 21x^2 + 147x - 344$ ook 'lid van de familie'?

In de bovenstaande opgaven heb je gezien hoe de veranderende parameterwaarde tot andere grafieken leidt. Als je de waarde van de parameter geleidelijk aan verschuift, doorloop je de hele familie van verbanden. In zo'n geval functioneert de parameter als *schuivende parameter*.

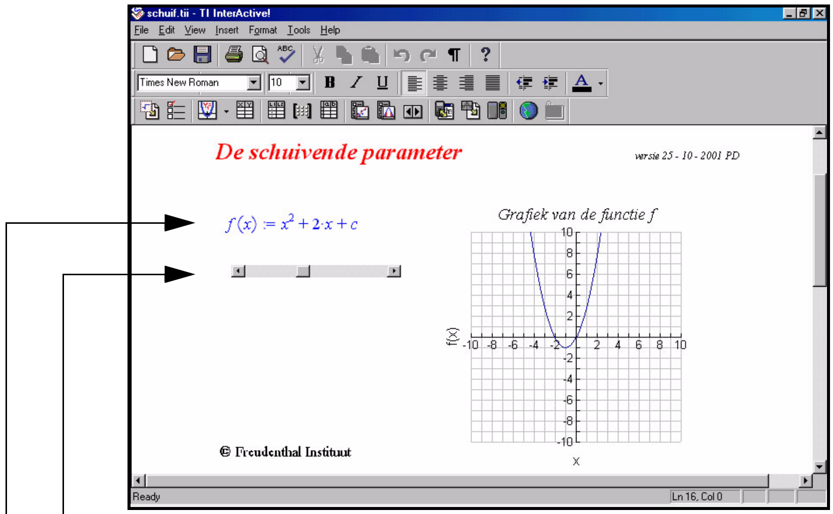
schuivende parameter

In de volgende paragraaf zie je nog meer voorbeelden van de schuivende parameter, maar dan op het scherm van de computer in plaats van de TI-89.

4 De schuivende parameter in TI Interactive

In de vorige paragrafen heb je formules gezien die een extra letter, een parameter, bevatten. Als de parameter van waarde verandert, verandert de hele grafiek. Dit in tegenstelling tot de ‘gewone’ variabele x: als die verandert, verandert alleen het punt.
Omdat de grafieken op de TI-89 niet zo mooi zijn, ga je in deze paragraaf de parameter variëren met het programma TI-Interactive. De vraag is weer wat het effect is op de grafiek. Schrijf de antwoorden op de vragen zo veel mogelijk in je schrift. Het huiswerk kan ook met de TI-89 gemaakt worden.

1 Start TI-Interactive en open het bestand SCHUIF. Je ziet het volgende scherm met een functievenster, een schuifbalk en een grafiek. De functie is weer een lid uit de kwadratische familie met $a = 1$ en $b = 2$.

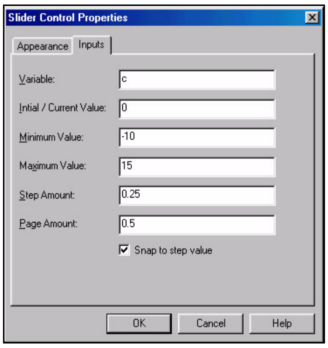


***schuifbalk**:*
activeren door erop te klikken,
waarde van de parameter veranderen door op pijltjes te klikken

***functievenster**:*
formule veranderen door hierop te dubbelklikken

2 **a.** Klik op de schuifbalk en laat de waarde van c veranderen. Zoals je ziet, wordt de grafiek meteen aangepast.
b. Welke waarden kan c op de schuifbalk aannemen en met welke stapgrootte verandert deze parameter?
c. Hoe verandert de grafiek van $f(x) = x^2 + 2x + c$ als c groter wordt?
d. Bij welke waarde van c verdwijnt de grafiek uit het venster?
! **e.** Er is een waarde van c waarbij de snijpunten van de grafiek met de x-as 6 eenheden van elkaar liggen. Welke c-waarde is dat?

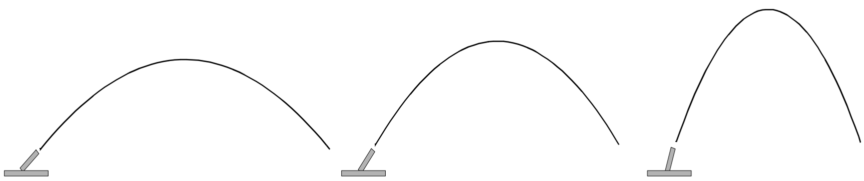
3 **a.** Bepaal de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de y-as voor verschillende waarden van c.
b. Hoe kun je de waarde van c dus meteen in de grafiek terugzien?



4 **a.** Verander de functie in $f(x) = (x-a)^2 + a$.
b. Klik met de rechter muisknop op de schuifbalk en kies Open/Activate. Verander de c in een a en pas als je wilt het bereik van de parameter aan.
c. Laat de grafiek verschuiven. Welk effect heeft een toename van de parameter a op de grafiek?
d. Hoe kun je in de grafiek al zien welke waarde a heeft? Verklaar dit uit de formule.
e. Voor welke waarde van a is (5/2, 5/2) de top van de parabool?

5 Nu een iets moeilijkere functie: $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$.
a. Ga na hoe de verandering van de parameter doorwerkt op de grafiek.
b. Wat is het domein van de functie? Hoe zie je a dus in het plaatje?

6 Water uit een tuinslang wordt onder een hoek weggespoten. De baan wordt beschreven door de formule $f(x) = x - \frac{1}{a} \cdot x^2$.
a. Hoe kun je aan de formule zien dat de stralen parabolen beschrijven?
b. Onderzoek hoe de baan van de straal verandert als a toeneemt.
c. Welke kenmerken van de grafiek veranderen *niet* als a verandert?



7 Het vorig jaar kwamen we de draaiende tuinsproeier tegen, waar de volgende formule bij hoorde: $f(x) = a \cdot x - (1 + a^2) \cdot x^2$.
! **a.** Beschrijf in woorden hoe de grafiek verandert als de schuivende parameter van 1/2 toeneemt tot 5. Via de rechter muisklik op de grafiek kun je het kijkvenster aanpassen.
b. Wat gebeurt er met de grafiek en met de formule in het geval $a = 0$?

8 Schrijf in enkele regels op wat het belangrijkste is wat je geleerd hebt over parameters tijdens het werken met TI-Interactive.

5 Een stripverhaal van grafieken

Deze paragraaf bevat de laatste opdracht over de vraag

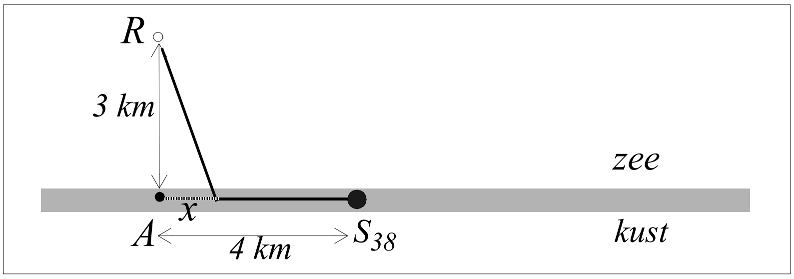
Wat gebeurt er met de grafiek van een familielid als de waarde van de parameter verandert?

Je hebt gezien: als de waarde van de parameter verschuift, heeft dit effect op de plaats en/of de vorm van de grafiek van het ‘familielid’, en ook op andere kenmerken zoals domein, nulpunten of top. In sommige gevallen kun je de parameter terugzien in de grafiek, en die op die manier betekenis geven. Je kunt de parameter dus als een soort ‘super-variabele’ beschouwen: variatie ervan beïnvloedt het hele verband tussen x en y.

De volgende opgave kun je samen met een medeleerling uitwerken. Gebruik daarbij weer SCHUIF in TI-Interactive, of de TI-89. Lever een overzichtelijke uitwerking in, waarin ook overwegingen en toelichtingen staan.

Agent 007

James Bond, Geheim Agent 007, is op drie kilometer afstand van de kust gedropt. Met een rubberboot wil hij de kust bereiken om bij strandpaal 38 een geheime boodschap achter te laten. Natuurlijk is het zaak dat hij zijn missie zo snel mogelijk volbrengt.
In onderstaande situatieschets zie je dat de strandpaal (S_{38}) 4 km verwijderd is van de plaats (A) op het strand die James Bond zou bereiken als hij de kortste weg naar het strand zou nemen.



Met de rubberboot kan hij zich roeiend verplaatsen met een snelheid van 6 km/u. Op het strand kan hij een snelheid van 12 km/u lang volhouden.

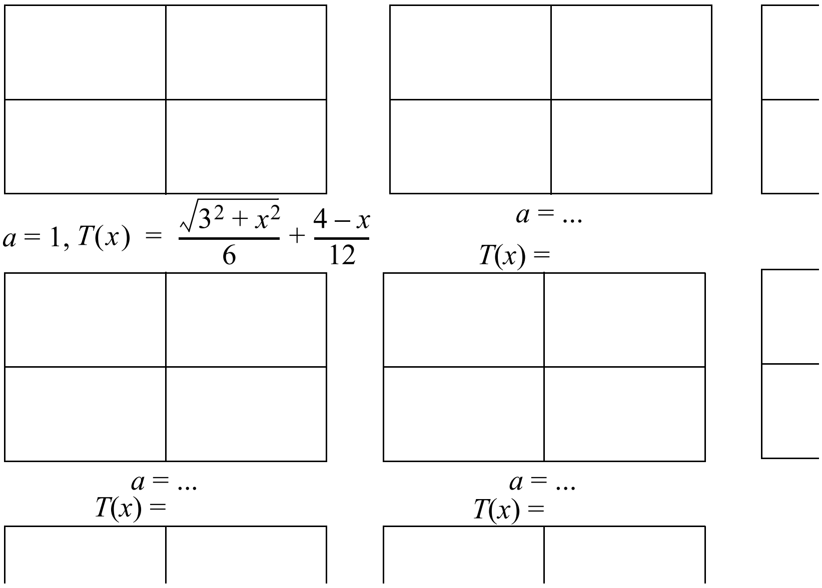
1 Stel dat hij op x km van punt A aan land gaat. De tijd die voor de missie nodig is, is dan gelijk aan $\frac{\sqrt{3^2+x^2}}{6}+\frac{4-x}{12}$ uren. Toon dit aan.

2 Door tegenwind wordt het varen ernstig vertraagd met een factor a.

De totale tijdsduur wordt hierdoor: $T = a \cdot \frac{\sqrt{3^2+x^2}}{6}+\frac{4-x}{12}$.

a. Welke formule krijg je als $a = 3$? Hoe groot is dan $T(2)$?
b. Laat de grafiek van T in dat geval tekenen.

! **3** **a.** Teken in je schrift een stripverhaal, dat weergeeft hoe de grafiek van T verandert als a groter wordt. Maak globale schetsen en zet er steeds bij om welke waarde van a het gaat en welke formule erbij hoort.



b. Denk ook aan de mogelijkheid dat a kleiner is dan 1: als de wind in de goede hoek staat, wordt de vaartijd korter!

c. Beschrijf in woorden hoe de grafiek verandert als de parameterwaarde toeneemt.

d. Welke waarden van a geven een ‘speciale’ grafiek? Wat is er in die gevallen speciaal? Hoe kun je dat verklaren uit de formule?

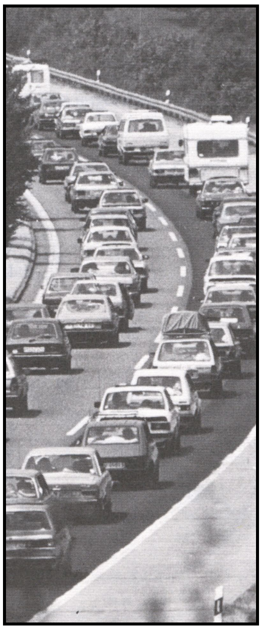
6 Bundels grafieken

Aan het einde van paragraaf 2 staat de volgende vraag:

Wat voor plaatje krijg je als je een aantal grafieken van de familie in één figuur zet?

Daarover gaat deze paragraaf.

files Dagelijks staan er op de Nederlandse snelwegen files. Bij langzaamrijdend verkeer is de vraag altijd: hoe groot moet de afstand tot de voorganger zijn? Als er te grote gaten tussen de auto vallen, vertraagt dit de doorstroming, maar 'bumperkleven' geeft weer het risico van abrupt remmen en kettingbotsingen. Een vuistregel voor de aan te houden afstand luidt:



$$a = 0{,}0075 \cdot v^2$$

Hierin is a de afstand in meters tot de voorganger, en v de snelheid van de file in km/uur. Deze afstand is gelijk aan de remweg die nodig is in geval van een noodstop. Als iedereen zich daaraan houdt, is de doorstroming van de file gelijk aan:

$$d = \frac{100 \cdot v}{6 \cdot (l + a)}$$

Hierin is d de doorstroming in auto's per minuut, en l de lengte van de gemiddelde auto in de file.

1 **a.** Stel dat $l = 4$ meter.
Maak een formule voor d waarin l en a niet meer voorkomen.
b. Laat een grafiek tekenen van d als functie van v.
c. Bij welke snelheid van de file is de doorstroming optimaal?

risico nemen Nu houden automobilisten zich vaak niet aan de voorgeschreven afstand. Ze nemen een zeker risico. Veronderstel bijvoorbeeld dat de meeste automobilisten een afstand aanhouden die slechts 90% is van de veilige.

2 **a.** Tot welke formule voor d leidt dit?
b. Laat ook nu weer de grafiek van d tekenen.
c. Neemt de doorstroming toe? Hoe verandert de optimale filesnelheid?

3 Beantwoord de vragen van de vorige opgave voor het geval dat de automobilisten een afstand aanhouden die 0.8 is van de aanbevolen afstand.

4 Laten we de fractie van de aanbevolen afstand, die door de automobilisten wordt aangehouden, r noemen, de risicofactor.
! **a.** Welke algemene formule voor de doorstroming kun je nu maken, onafhankelijk van de vraag of r nu 0.9 of 0.8 is?
b. Tussen welke grenzen liggen de waarden van r?

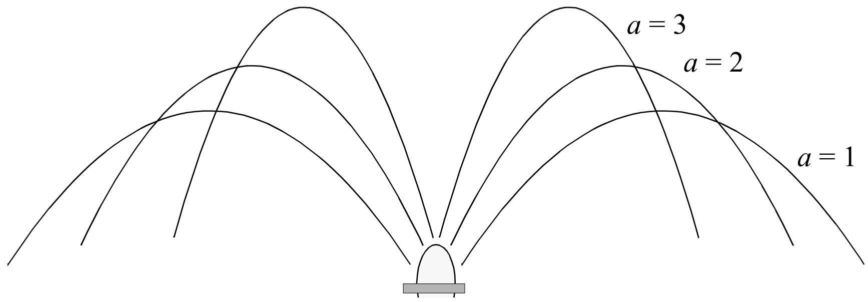
5 **a.** Laat in één figuur de grafieken van de doorstroming tekenen voor verschillende waarden van r.
b. Wat gebeurt er met de grafiek van d als r kleiner wordt?
c. Welke conclusies kun je uit het plaatje trekken voor de optimale snelheid van de file en de doorstroming als r kleiner wordt?

een fontein

In opgave 7 van paragraaf 4 werd de baan van een waterstraal beschreven met de volgende formule, waarin parameter a de steilheid voorstelt waarmee de stralen wegspuiten:

$$f(x) = a \cdot x - (1 + a^2) \cdot x^2$$

Een fontein spuit nu gelijktijdig een bundel waterstralen naar links en naar rechts:



6 **a.** Maak dit plaatje na op de TI-89. Neem als het kijkvenster [-0.5, 0.5] bij [0, 0.5] en gebruik de formule hierboven.
Tip: je kunt op de TI-89 een parameter in het functiebestand waarden geven met de ‘waarinstreep’: $y_1(x)$ = ... | a = {1/2, 1, 2, 3}

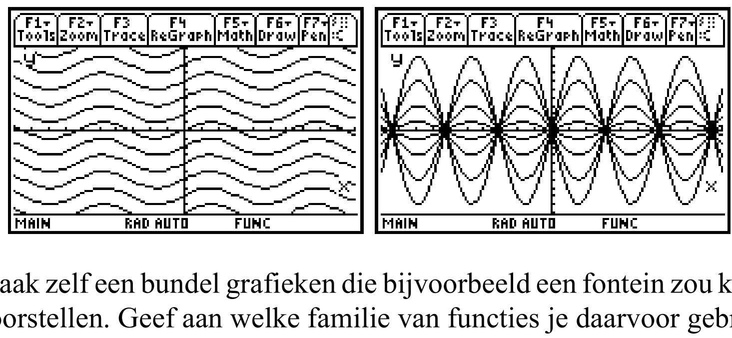
b. Welke waarden van a horen er bij de stralen naar links?

c. Bij welke waarde van a komt de straal het verst?

In het voorbeeld van de files ligt het voor de hand om niet een ‘stripverhaal’ van grafieken te maken, maar om de grafieken voor de verschillende gevallen in één figuur te zetten. Hetzelfde geldt voor de fontein, omdat geen sprake is van een draaiende straal, maar van een bundel stralen tegelijk. De parameter a functioneert als ‘*familieparameter*’. Je kunt je een beeld vormen van zo’n hele familie van functies door voor een heleboel waarden van a de grafiek te tekenen. Dat geeft een *bundel grafieken*. Zo’n bundel kan nooit alle grafieken bevatten; je kiest de waarden van a zo dat het plaatje een indruk geeft van het geheel. Als je alle grafieken tekent, zou het vlak in veel gevallen helemaal zwart worden.

een bundel grafieken

7 Maak de volgende bundels van golven na. Als het tekenen te lang duurt, kun je het afbreken met ON.



8 Maak zelf een bundel grafieken die bijvoorbeeld een fontein zou kunnen voorstellen. Geef aan welke familie van functies je daarvoor gebruikt.

7 Formules opstellen met parameters

Een parameter in een formule kun je dus opvatten als een schuivende parameter, die het verband tussen twee variabelen beïnvloedt en de grafiek verandert, of als een familieparameter, die een hele bundel grafieken voortbrengt. Maar hoe komt je nu aan zo'n parameter in de formule? Dat was de derde vraag die aan het einde van paragraaf 2 stond.
Hieronder eerst een lijstje van voorbeelden van algemene formules uit de vorige paragrafen, opgaven over het opstellen van zulke algemene formules. De paragraaf besluit met een historische noot.

voorbeelden

Het voorbeeld van de huidoppervlakte en het lichaamsgewicht leidde tot één formule voor alle diersoorten, waarin de parameter k de Meeh-coëfficiënt voorstelt:

$$H = k \cdot G^{2/3}$$

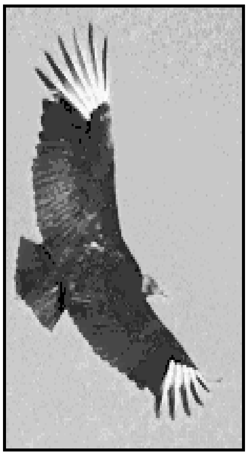
In het voorbeeld van de files werd de doorstroomsnelheid afhankelijk van de rijsnelheid beschreven met de volgende formule, waarin r de risicofactor voorstelt.

$$d = \frac{100 \cdot v}{24 + 0{,}045 \cdot r \cdot v^2}$$

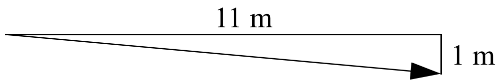
In het voorbeeld van de fontein werden de banen van alle stralen beschreven door de volgende formule, waarin parameter a de steilheid voorstelt waarmee de stralen wegspuiten:

$$f(x) = a \cdot x - (1 + a^2) \cdot x^2$$

zwevers



1 Gieren zijn uitstekende zwevers. In pure glijvlucht – dus zonder vleugelslagen en zonder steun van stijgende luchtstromen – daalt een gier maar één meter op elf meter horizontale verplaatsing. In een plaatje:



a. Een gier zweeft weg van een rotspunt 100 m boven de grond.
Maak een formule die het verband weergeeft tussen de hoogte en de horizontale verplaatsing.

b. Een albatros daalt slechts één meter op 20 meter horizontale verplaatsing. Pas de formule van **a** aan aan de albatros.

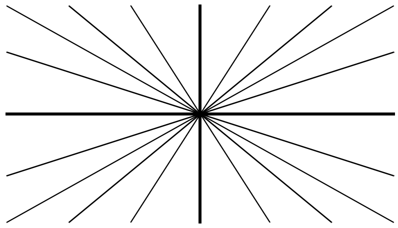
c. De horizontale verplaatsing van een vogel bij een hoogteverlies van 1 meter heet de finesse, afgekort tot f. Maak hiermee de formule voor de vlucht van 100 meter hoogte algemeen voor alle 'zwevers'.

2 Een steen wordt van een toren naar beneden gegooid met een beginsnelheid van 10 m/s. De afgelegde weg s van de valbeweging wordt dan gegeven door de formule $s = 10 \cdot t + 4,9 \cdot t^2$. Hierin staat t voor de tijd (in seconden) na het begin van de val. Het getal 4,9 is berekend uit de valversnelling van de zwaartekracht op aarde.

a. Laat de grafiek tekenen van s als functie van t.

b. Maak deze formule algemener, zodat ze ook van toepassing is op een andere beginsnelheid dan 10 m/s.

c. Hoe wordt de formule als ze ook moet gelden voor dezelfde situatie op een andere planeet, waar de zwaartekracht een andere valversnelling veroorzaakt dan op aarde?



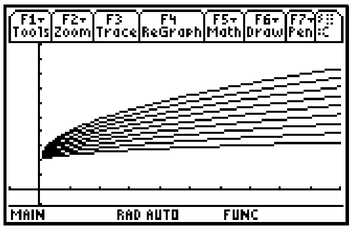
3 Hierboven staat een aantal rechte lijnen getekend, die allemaal door de oorsprong gaan.

a. Welke gedaante heeft de algemene vergelijking van een rechte lijn door de oorsprong (0, 0)?

b. Welke formule beschrijft alle lijnen die door het punt (0, 2) gaan?

! **c.** Geef een algemene formule voor alle lijnen door het punt (3, 0).

4 Voor de prijs van het drukken van een A4 folder geldt het volgende. Je betaalt een startbedrag van f 100,- voor voorbereiden van het drukwerk. Vervolgens betaal je een bedrag dat gelijk is aan de wortel van het aantal folders, vermenigvuldigd met 40 cent.



a. Welke formule geeft de kosten weer als functie van de oplage?

b. Maak de formule algemener, zodat die ook geldt als de vermenigvuldigingsfactor van 40 cent verandert.

c. En nog algemener: een formule onafhankelijk van het startbedrag?

! **5** Bedenk zelf een verhaaltje dat tot een algemene formule leidt waarin één of meer parameters voorkomen.

historische noot: Viète

De Fransman Viète maakte al in 1591 het onderscheid tussen variabelen en parameters duidelijk. Ook aan het noteren van algemene oplossingen, die in paragraaf 8 aan de orde komen, heeft Viète veel bijgedragen.

6 Bekijk de familie $y = a \cdot x^2 + c$.

a. Gewoonlijk zijn x en y de variabelen en a en c parameters. Welke vorm hebben de grafieken uit deze familie dan?

b. En als a hier de variabele zou zijn en x een parameter?

8 Algemene oplossingen

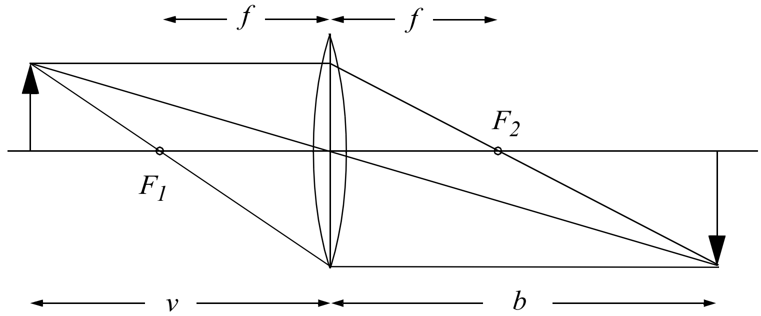
Een parameter in een formule staat in feite voor een hele familie van formules en grafieken. Als de parameterwaarde geleidelijk verandert, wordt de invloed op de grafiek duidelijk. Zolang je de waarde van een parameter niet kent, kun je vragen over bijvoorbeeld nulpunten of snijpunten niet beantwoorden. Er komt geen getalswaarde uit, het antwoord heeft de vorm van een formule. Dat brengt ons op de centrale vraag van deze paragraaf:

Hoe kun je vergelijkingen oplossen waar een parameter in voorkomt?

lenzen Om kijkend door een lens een scherp beeld van een voorwerp te krijgen (denk aan fotograferen of aan een verrekijker), moeten de afstand van het voorwerp tot de lens en die van het beeld tot de lens op elkaar zijn afgestemd. Als de voorwerpsafstand v is, de beeldafstand b, en de brandpuntsafstand van de lens f, dan geldt theoretisch het volgende verband:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$$

Dit is de zogenaamde *lenzenformule* uit de natuurkunde.



1 Een vergrootglas met $f = 5$ cm wordt 10 cm boven een postzegel gehouden. Omdat f hier vast is, beschouwen we die als parameter.

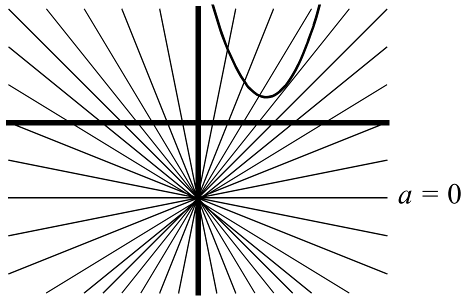
a. Hoe ver moet je je oog boven het vergrootglas houden?
b. En als je het vergrootglas 8 cm boven de postzegel houdt?
c. En bij een voorwerpsafstand van 15 cm?
d. Hoe kun je bij een vergrootglas met $f = 5$ bij gegeven v de b uitrekenen?

2 **a.** Laat de grafiek tekenen van b als functie van v wanneer $f = 5$.
b. Wat gebeurt er met de beeldafstand als de voorwerpsafstand heel groot wordt? Hoe kun je dat zien in de grafiek en in de formule?

3 **a.** Herhaal opgaven **1** en **2** voor het geval dat de brandpuntsafstand gelijk is aan 8 in plaats van 5 cm.
! **b.** Dat herhalen van opgaven voor een andere waarde van f is natuurlijk vervelend. Probeer daarom de vragen **1d** en **2b** te beantwoorden zonder dat de waarde van f bekend is.

! **4** Iemand vereenvoudigt de lenzenformule tot $f = b + v$. Commentaar?

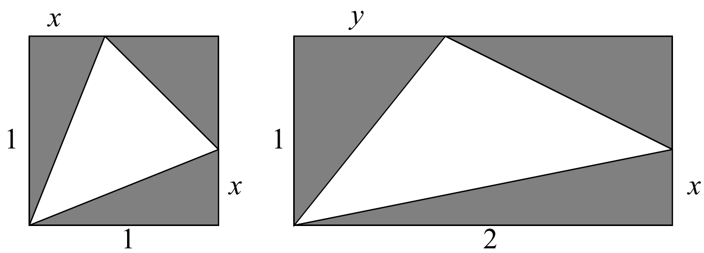
5 De parabool met vergelijking $y = x^2 - 4x + 5$ wordt doorsneden door een bundel rechte lijnen, gegeven door $y = a \cdot x - 2$. De vraag waar deze opgave om draait, is: welke lijnen raken aan de parabool?



a. Bereken de coördinaten van de snijpunten in het geval dat $a = 5$.
b. Doe hetzelfde voor $a = 6$ en voor $a = -10$.

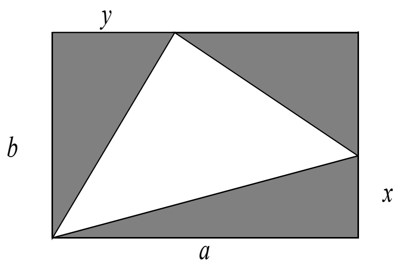
6 **a.** Generaliseer het probleem van de vorige opgave: bereken de x-coördinaten van de snijpunten zonder dat je een waarde voor a kiest.
b. Controleer je algemene oplossing door een getalwaarde voor a in de oplossingsformule te substitueren en de grafieken te laten tekenen.
! **c.** Hoe kun je aan de formule van de algemene oplossing zien voor welke waarde van a de lijnen de parabool raken? Bepaal die a-waarden.

7 Een vierkant van 1 bij 1 dm (zie de linker figuur hieronder) wordt vanuit het hoekpunt linksonder in vier stukken verdeeld, zo dat de oppervlakten van de drie gearceerde driehoeken gelijk zijn



a. Ga na dat de onderste driehoek en de linker dezelfde afmetingen hebben en bereken die afmetingen.
b. Zie de figuur rechtsboven. Hoe veranderen de afmetingen als je niet met een vierkant begint maar met een rechthoek van 2 bij 1 dm?
c. Bereken de afmetingen van de driehoeken als je een rechthoek hebt van 3 bij 5 dm.

! **8** **a.** Los het probleem in het algemeen op, dus voor een rechthoek van a bij b dm.



b. Controleer je algemene oplossing door $a = 2$ en $b = 1$ in te vullen.

9 Algemene oplossingen gebruiken

In de vorige paragraaf bleek dat het antwoord op de vraag 'Hoe kun je vergelijkingen oplossen waar een parameter in voorkomt?' luidt: generaliseer de oplossingsmethode met behulp van een parameter die geen getalswaarde heeft. Het antwoord zal dan een formule zijn in plaats van een getal. Zo'n resultaat kan nuttig zijn omdat het de *algemene oplossing* van de hele klasse van problemen voorstelt. In opgave 6 van de vorige paragraaf is zo'n algemene oplossing gebruikt om een speciaal geval te vinden. Dat gaat dus over de laatste vraag die aan het begin van het boekje is gesteld:

algemene oplossing

> *Hoe kun je uit de familie een familielid terugvinden dat aan een bepaalde voorwaarde voldoet?*

Meer daarover in de opgaven van deze laatste paragraaf. De algemene oplossing wordt gebruikt om die waarden van de parameter te vinden zodat aan een bepaalde voorwaarde wordt voldaan, of om een speciale eigenschap van de oplossingen aan te tonen.

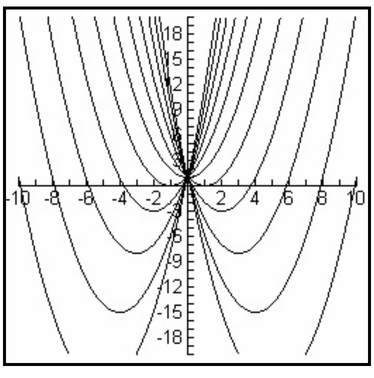
1 De algemene kwadratische functie heeft de gedaante
$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

a. Bepaal in het algemeen de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van *f* met de *x*-as.

! **b.** De oplossing ziet er anders uit dan je gewend bent. Ga na dat het antwoord van de TI-89 op hetzelfde neerkomt.

c. Uit de algemene oplossing kun je een voorwaarde voor *a*, *b* en *c* aflezen die ervoor zorgt dat er maar één snijpunt is. Welke voorwaarde is dat en waarom?

2 Hieronder staat een bundel grafieken bij de familie $y = x^2 + b \cdot x + 1$.
Deze familie heb je in opgave 1 van paragraaf 3 al bekeken.
Ditmaal letten we speciaal op de toppen van de parabolen.



a. Teken alle toppen in het plaatje en verbind ze met elkaar. Wat voor soort kromme lijk je zo te krijgen?

b. Druk de coördinaten van de top van een 'familielid' uit in *b*. Tip: de top ligt midden tussen twee nulpunten, als die er tenminste zijn.

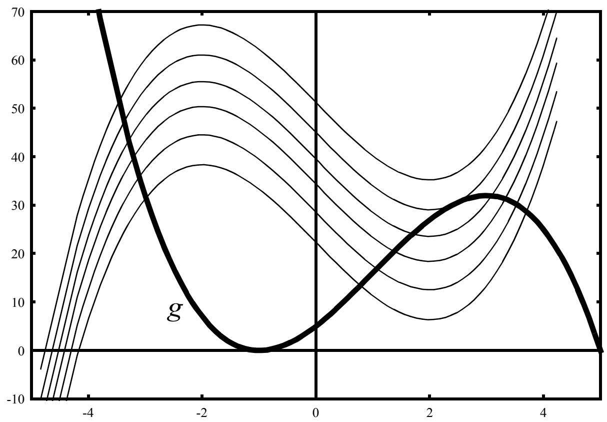
! **c.** Bepaal de vergelijking van de kromme door de toppen van de bundel en teken ter controle enkele grafieken.

3 Gegeven zijn functies f en g met

$$f(x) = x^3 - 12x + 16 + a$$

en $$g(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5 \,.$$

Hieronder staat de grafiek van g. De formule van f stelt vanwege de parameter a een bundel grafieken voor. Enkele grafieken uit deze bundel zijn getekend.



a. Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ voor enkele waarden van a op.

! **b.** Bepaal de algemene oplossing van de vergelijking $f(x) = g(x)$.

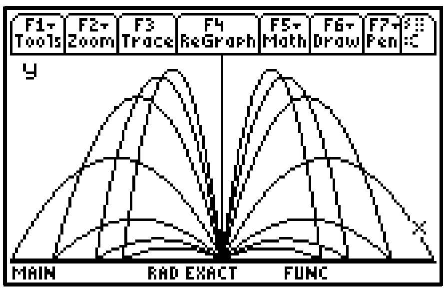
c. Hoe kun je uit deze algemene oplossing afleiden voor welke waarden van a de grafiek uit de bundel de grafiek van g raakt?

d. Bepaal weer een regel die aangeeft hoe je uit de waarde van a het aantal snijpunten van de twee krommen kunt afleiden.

4 In opgave 7 van paragraaf 4 en in opgave 6 a van paragraaf 6 werden de banen van waterstralen van een fontein beschreven met de formule

$$f(x) = a \cdot x - (1 + a^2) \cdot x^2$$

Dat gaf op de TI-89 het volgende plaatje.



Nu lijkt het wel of steeds twee stralen op dezelfde plaats op de grond terecht komen. Dat kun je met algebra verder uitzoeken.

a. Los de vergelijking $f(x) = 0$ in het algemeen op.

b. Ga na dat hier voor $a = 5$ en $a = 1/5$ hetzelfde uit komt, en ook voor $a = 3$ en $a = 1/3$.

! **c.** Geldt voor elke waarde van a dat je hetzelfde nulpunt krijgt als je $a = p$ vervangt door $a = 1/p$? Motiveer je antwoord.